박혜향의 수학교육론 바이블

박혜향의 수학교육론 바이블

박혜향

BigBook

함께 만들고 함께 나누는 공유의 지식!

▍공유와 협력의 교과서만들기 운동본부 ▍

인간은 교육으로 성숙되고 사회는 지식으로 발전한다.

교육의 기회는 만인에게 평등하게 제공되어져야 하며 지식은 사회발전을 위하여 공유되어야 한다. 교육과 지식은 인류의 문화적 유산이며 나눔의 대상이다. 우리는 이러한 신념이 우리 사회의 교육평등과 보다 나은 미래를 위한 디딤돌임을 확신하며, 함께 만들고 함께 나누는 지식 창조와 공유의 새로운 지평을 열고자 한다.

빅북이라 명명된 이 책은 지식공유의 세계적인 흐름에 동참하고 지적인 업적들이 세상과 인류의 지식이 되도록 하며, 누구나 쉽게 접근하고 활용할 수 있는 환경을 만들고자 한다.

공유와 협력의 교과서만들기 운동본부

인류의 지식은 개인의 것이기에 앞서 문화의 유산입니다. 우리는 물려받은 지식의 토대 위에 지식을 창조한 것이며 이는 다음 세대도 그러할 것입니다. 우리의 삶을 풍요롭게 하는 지식은 공기와 같이 공유되어야 하며 이를 통해 더 나은 지식창조가 가능하다고 믿습니다.

이제 지식은 상아탑을 넘어 시민사회의 참여가 필요합니다. 이는 다양한 지식을 많은 전문가들이 가지고 있으며 그 변화속도는 상상하기 어렵기 때문입니다. 고등교육기관과 시민들이 협력한다면 다양한 견해를 담은 새롭고 혁신적인 지식이 창조될 수 있을 것이며, 함께 나누고 공유한다면 지식은 인류의 삶에 더 큰 기여를 할 수 있을 것입니다.

교육을 위한 지식들은 우선적으로 공유되어져야 하며 이는 모두에게 평등하게 제공되어야 한다고 생각합니다. 인종과 성별 그리고 지위의 부의 차이에 의하여 지식의 제공이 제한되는 것은 인간의 기본권이 침해되는 것입니다. 우리의 문화적인 유산인 지식이 그들을 필요로 하는 사람들에게 다가가 그들의 삶을 개선시킬 수 있도록 여건과 제도를 만들어 가는 것은 우리 지식인의 책무라고 생각합니다.

대학의 지식창조 활동의 결과물들도 이를 배워야 할 학생들에게 효과적으로 공유될 필요가 있으며, 이를 위해 지적재산권의 문제를 비롯한 많은 걸림돌들은 시급히 개선되어야 합니다. 이제 대학의 지식을 갈망하는 우리 이웃들의 목마름을 채우기 위하여 작지만 먼 걸음을 시작합니다.

많은 뜻있는 분들의 도움으로 먼 길이 외롭지 않기를 바랍니다.

공유와 협력의 교과서만들기 운동본부

머리말 INTRODUCTION

처음 수학교사가 되려고 준비하는 학생들에게 가장 중요한 정보는 "임용고사 선정 시험에 어떤 영역이 출제될까? 어떤 문제들이 시험에 출제되고 구체적으로 어떻게 공부해야 할까?"일 것이다. 이 질문은 15년 이상의 예비 수학교사 수학교육론 부분을 담당하면서 가장 많이 들었던 그래서 자주 답했던 질문이다. 그 때 마다 다음을 소개해주곤 한다.

평가 영역	평가 내용 요소	중등학교 교육과정 관련성
수학과 교육과정 및 교육사	우리나라 수학과 교육과정의 이해, 수학과 교육과정의 국제적 동향, 수학교육사, 수학교육철학 등	교육과정–성격, 목표, 내용체계, 학년별 내용, 교수 학습 방법, 평가
수학 영역별 교육론	수와 연산 교육, 대수 교육, 기하 교육 (측정 교육 포함), 함수 교육 (미적분 교육 포함), 확률과 통계 교육, 수학 교과서의 이해 등	교육과정–내용체계, 영역별, 학년별 내용
수학 교수 학습론	수학 학습 심리학, 수학 교수 학습 원리와 방법 등	교육과정–목표, 교수 학습 방법
수학 학습 지도 및 평가	수학적 문제해결, 의사소통, 추론의 지도, 수학교육에서 도구(공학적 도구, 교구 등)의 활용, 수학사의 교육적 이해 및 적용, 수학과 수업 설계, 실행 및 분석, 수학과 평가 , 학생의 이해 및 오개념 분석 등	교육과정–목표, 내용체계, 학년별 내용, 교수 학습 방법, 평가

위의 영역은 수학교사를 양성하는 임용제도가 변하더라도 항상 유지되는 수학교육론의 임용고사 영역이기 때문이다.

이 책은 현재 수학교사 양성에 필요한 내용을 위의 표 및 여러 외부 서적과 논문에 입각하여 정리한 '순수하게 중등 수학과 임용고사만을 위해 준비한' 책이다. 더불어 수학교육을 좀 더 학문적으로 공부하고 싶어 대학원을 준비하시는 분들에게도 큰 도움이 되는 책이다.
그리고 본 저자는 오랫동안의 강의 경력과 꾸준한 지식의 축적을 바탕으로 이 책의 목적에 맞게 책을 완성하려 노력했다. 분명히 자신하건데, 수학교사를 꿈꾸는 많은 예비수학교사들에게 이 책은 '수학교육론' 파트에서 절대적인 길잡이가 될 것으로 본다.
만약, 이 책에 대한 궁금한 문의 사항 및 수학교육에 대한 질문이 생긴다면 "medu1234@hanmail.net"이나 "http://cafe.daum.net/postmedu - 박혜향과 함께하는 수학교육론"을 방문하여 좋은 생각과 자료를 공유했으면 한다.

모두 수학교육을 위해 그리고 자신의 미래와 꿈을 위해 오늘도 힘껏 노력하자!

박혜향 교수

▎목차 ▎C O N T E N T S

01
기초수교

ㅣ제1장ㅣ 수학의 특성과 목적

02
수학과 교육과정

04
문제해결

07
교구 및 공학 활용

| 제1장 | 교구 활용

08
여러 가지 수학지도법

| 제1장 | 직관과 시각화

09
수학과 수업의 실제

| 제1장 | 수학과의 좋은 수업

| 제2장 | 학습지도안 작성 및 실제적인 수업 진행

01

기초수교

박혜향의 수학교육론 바이블

1. 수학의 특성과 목적

1.1. 수학의 정의: 수학이란 무엇인가?

수학의 가치

Polya: 수학은 지력을 증진시킨다. 단, 적절히 가르치고 배운다면

Platon: '영혼의 눈'을 뜨게 한다.

Pestalozzi: ┌ 수학 학습은 '정신체조'를 하는 것
│
├ 세고 계산하는 일은 두뇌의 모든 질서의 근원
│
└ 생각하면서 배우고 배우면서 생각하는 데 가장 적합

① 수학은 모순 없는 명제들(수학적 모델)의 모임이다.

수학적 모델을 구성하기 위한 수학적 활동은 상황이나 문제의 특수한 성질을 이상화하고 추상화하는 행동으로 구성된다. 수학적 모델은 산술, 대수, 기하, 해석[1])으로 구성된다.

② 수학은 언어이다.

수학은 물리적 상황이나 문제를 이상화하고 추상화하는 과정에서 관념을 나타내기 위해서 세밀하게 선택된 용어와 기호를 수학적 언어로 사용함으로써 불필요한 수식을 하지 않는다. 수학적 언어는 양을 나타내는 언어 즉, 크기나 순서를 나타내는 언어와 논리적 탐구를 위한 언어이다.

③ 수학은 패턴과 관계를 연구하는 학문이다.

수학은 물리적 세계에서의 특수한 대상과 관계를 탐구대상으로 하여 추상화한 수학적 모델을 구성한다.

④ 수학은 사고의 방법이다.

수학은 물리적으로 존재하지 않는 관념들을 대상으로 취급한다. 물리적 세계로부터 이상화되고 추상화된 수학적 관념은 인간이 경험할 수 있는 물리적 상황에 국한된다. 그러나, 수학적 관념은 인간이 물리적으로 경험할 수 없는 무한적인 차원에서도 가능하게 된다. 따라서 수학은 실험이 아닌 엄격한 논리적 추론에 의한 수학적 사고를 요구하게 된다.

---

1) · 산술: 수 체계에서의 특수한 성질, 관계, 연산에 대한 연구
· 대수: 산술을 일반화시켜 연구
· 기하: 공간에서의 곡선과 면에 대한 수학적 성질에 대한 연구와 평면도형과 입체도형에 대한 계량적 비계량적 성질과 관계에 대한 연구
· 해석: 자연 상태에서의 연속적인 과정과 수직선에서의 연속성을 응용하는 것과 관련된 연구

1.2. 수학의 특성: 수학이라는 과목이 가지는 특성

1) 실용성

① 수학은 인간 생활의 필요에 의하여 생겨났고, 또 인간의 생활과 함께 발전하여 왔으며, 실제 생활에서도 여러 가지로 유용하게 사용되고 있다.

② 수학은 다른 학문, 특히 자연 과학의 발달에 크게 기여하여 왔다. 따라서 학생들은 수학을 배워 실제 생활에서 직면하는 어려운 문제해결의 장면을 풀어내는 데 익숙해져야 한다.

③ 수학은 실제 생활의 요구와 자연의 탐구에서 비롯되었는데 현재 비록 그러한 수학이 이론 수학으로 발전하였으며 응용과는 무관하게 공리로부터 순수하게 수학이 전개되고 있을지라도, 수학이 다른 학문과 실생활에 모델로 작용하고 있으며, 또 장차 작용할 개연성이 대단히 높다는 것은 분명하다.

2) 추상성

① 어떤 구체물들의 모임에서 각각이 가지는 특성 가운데 이질적인 속성을 버리고 동질적인 속성만을 추출하여 만든 표상을 이상화해서 얻어지는 개념을 의미한다.

(예1) 사람 3명으로 이루어진 집합, 자동차 3대로 이루어진 집합, 사과 3개로 이루어진 집합 등등에서 이 집합들이 지니고 있는 속성들 중 사람, 자동차, 사과와 같은 이질적인 속성을 제거하면 결국 각 집합은 3개라는 동질적인 속성을 지니고 있음을 알게 된다. 즉, 이 과정이 이들 집합에서 3이라는 수의 개념을 추상화한 것이다.

(예2) 성냥갑, 벽돌, 선물상자 등에서 이들의 색깔이나 물체를 구성하는 성분, 이들 물체들의 용도, 크기 등의 이질적인 속성들을 제거하면 결국에는 각 면은 직사각형으로 이루어지고, 모서리는 선분으로, 모서리와 모서리가 만나는 곳을 점으로 이루어진 직육면체의 개념을 얻게 되는데 이 과정이 직육면체라는 개념을 추상화한 것이다.

(예3) "임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 P, Q를 지나는 직선 l이 유일하게 존재한다."는 유클리드의 공준은 직선을 그어 보는 조작(operation)의 추상화를 통하여 이끌어 내어진 것이다.

② 수학의 추상성이란 우리가 느끼고, 보고, 듣는 물리적 세계나 그 세계에 대한 우리의 경험을 직접 다루는 것이 아니라 우리 마음속에 있는 아이디어를 다루는 것이다.

③ 추상화는 수준이 증가하는 방향으로 이루어진다. 이러한 의미에서 추상화는 물리적 대상의 추상화뿐만 아니라 수학적 대상의 새로운 추상화, 곧 수학적 대상의 재추상화도 포함한다고 볼 수 있다.

3) 형식성

① 형식적 방법으로 격식을 만들고 따르며 통일된 원리나 규칙을 만들어내는 것을 의미한다. 이때, 수학적 개념은 추상적인 것으로써 그 일반성을 넓히기 위해서 고도로 형식화된 것이 대부분이다.

(예) 0을 수로 보는 것, 공집합을 집합으로 보는 것, 집합 A 에서 공집합과 집합 A 자체를 집합 A 의 부분집합이라고 보는 것, 이차방정식의 일반형을 $ax^2+bx+c=0$ 으로 나타내는 것

② 수학은 형식 언어로 쓰여진 공리 또는 공준과 형식적인 추론 규칙에 의해 전개될 수 있으며, 이때 공리의 의미는 중요하지 않다.

③ 수학의 형식성은 수학적 증명의 엄밀성을 보장하기 위한 장치로써 19세기 말 독일의 힐베르트에 의해 더욱 명확하게 제시되었다.

(예) 기하학기초론

4) 계통성

① 어떤 기초적인 내용을 토대로 하여 새로 조합하거나 또는 통합하여, 새로운 개념을 구성하기도 하고 새로운 내용을 형성하기도 하는 체계를 말한다.

② 계통성은 수학적 개념의 확장과 관련된다.

③ 수학은 어느 교과보다도 계통성이 강한 교과이며, 계통성은 학습내용의 순서를 정할 때 논리적 연결성을 가지고 학습이 단계적으로 이루어지도록 해준다.

(예1) 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수의 포함 관계

(예2) 분수는 곱의 개념, 나눗셈의 개념, 비의 개념으로 표현

5) 직관성과 논리성

> 유클리드의 기하와 같이 수학은 엄밀한 논리적 구조로 이루어져 있다. 즉, 분석적이고 단계적으로 전제나 선행명제로부터 결론이나 후속명제가 정당하게 이끌어 내어지고 있는 것이다. 그러나 논리적으로 정당화되는 대상은 사실상 직관에 의해서 발견, 발명된다.

① 전제나 선행명제로부터 결론이나 후속명제를 타당하게 이끌어내는 논리성은 다른 어떤 교과보다 수학 교과에 특징적인 것이다. 그러나 논리적이고 정당화되는 대상은 사실상 직관에 의해 발견되고, 발명되는 경우가 많으므로 수학에서 직관성은 매우 중요하다.

② 직관적 사고(수학의 발명 또는 발견에 중요한 역할을 함)란, 사고의 대상을 인지하는 활

동이 다소 분명하지 않으나, 관찰·실험·실측·작도·제작 등이나 직감(영감)을 통하여 감지하는 사고이며, 이론 전개의 선행·방향·기틀을 마련해 주는 직감적 아이디어로서 이론과 구체를 맺어 주는 것 또는 구체에서 논리의 방향을 시사해 주는 것이다.

- 초등학교와 중학교 저학년의 수학에서 매우 중시되고 있다.
- 귀납적 사고와 유비적 사고(=유추)가 이에 포함된다.
- 귀납적 사고: 어떤 사물 현상의 부분에 관한 지식이나 각각의 특수한 사례에서 출발하여 전체에 관한 지식이나 공통적이고 보편적인 성질을 이끌어 내는 사고를 말한다.

(예) '삼각형의 내각의 크기가 180도임을 밝히시오'라는 문제에서 몇 개의 삼각형을 그린 다음에 각 삼각형의 내각의 크기를 실제로 측정한 후 이것을 합한 것이 모두 180도이기 때문에 삼각형의 세 내각의 합이 180도이다라는 것을 유도한다.

- 유비적 사고(=유추)는 몇 개의 유사점을 기초로 하여 어느 특수한 사실의 성질로부터 그와 유사한 다른 특수한 사실을 이끌어 내는 사고이다.

(예) 삼각형의 넓이를 구하는 공식 $A=ah/2$ (a 는 밑변, h 는 높이)라는 식으로부터 사면체의 부피를 구하는 식이 $V=Ah/3$ (A 는 밑넓이, h 는 높이)라는 것을 생각한다.

- 귀납추론과 유비추론에 의해서 밝혀진 명제는 항상 참인 것은 아니다. 간혹 조사한 100개의 예에 대해서는 성립하지만 특수한 하나의 예에 대해서는 성립하지 않는다거나 비슷한 점을 고려했지만 그 예측이 어긋나게 결론지어질 경우 이 명제는 거짓인 명제가 되고 만다. 그러므로 귀납적 사고와 유비적 사고에 의해 추론한 명제는 반드시 연역적 방법으로 검증을 해야 한다.

③ 논리적 사고(발명 또는 발견된 수학의 정리에 정당성을 부여함): 분석적, 단계적이고 추론적(연역적)인 과정을 통하여 정당한 논리적 근거에 의해서 가정으로부터 결론을 이끌어 가는 사고이다.

6) 일반성과 특수성

① 일반성이란 하나의 대상에 대한 고찰로부터 그 대상을 포함하는 집합에 대한 고찰로 확장시키는 일반화의 성질을 가리키며, 일반화를 통하여 수학이나 과학에서 많은 법칙을 발견(구성)하고 때로는 단 한 가지 사실을 관찰하고도 일반화를 통하여 놀라운 일반적인 법칙을 발견(구성)하기도 한다.

(예) 물리적 문제에 대해 수학적 용어와 명제 전체를 수학적 모델이라고 하는데, 물리적 세계가 수학적 모델이 되는 과정은 일반화에 의해 일어난다.

② 특수성이란 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대한 고찰로 옮겨가는 특수화의 성질을 가리키며, 일반성에 대립되는 개념이다. 일반화된 명제를 검증하거나 그 증명 또는 풀이의 힌트를 제공하기도 한다.

(예) 수학적 모델에서의 수학적 실체와 명제는 물리적 세계에서 특수한 대상과 관계로 다시 해석되고 물리적 문제에 대한 해답에 적용되는 특수한 과정을 밟는다.

7) 이상성

수학적 사고 과정에서 그 사고의 대상인 사물이나 현상에 대하여 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 그 겉모양으로 보는 것이 아니라, 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만 고려하여 새로이 바람직한 형태로 단순화시킴으로써 얻게 되는 특성이다.

(예) 유클리드 원론의 정의, 공리, 공준 등

1.3. 수학교육의 목적: 수학을 가르쳐야 하는 이유(가치)

1) 수학의 실용적 가치

① 수학은 사회생활을 할 때나 과학이나 다른 학문을 공부하는 데 도움이 되는 실용적인 학문이다.

② 수 개념이나 사칙연산 등과 같이 어떤 수학적 지식은 사회생활을 하는데 필수적이며, 또 어떤 수학적 지식은 사회생활에 직접 소용이 되지 않는다 하더라도 다른 학문을 하는 데 필수적이다.

③ 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 수학의 중요성이 점점 증대되고 있을 뿐만 아니라 공학, 경제학을 비롯하여, 산업, 금융, 국방, 정보통신, 의학 등 많은 학문 분야에서 수학은 기초적인 학문으로서 중요한 역할을 한다.

(예) 화학교실에서 한 학생은 20%의 메탄올 용액을 필요로 하는데 그는 24%와 12%의 용액으로 되어 있는 병을 가지고 있다. 이 학생은 20% 용액 $5l$를 만들기 위하여 각 용액을 얼마만큼 혼합해야 하는가?

2) 수학의 정신 도야적 가치

① 수학을 배우면 우리의 정신 능력 특히 합리적이고 논리적인 사고력, 추상적 사고력,

창의적 사고력, 비판적 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등을 기를 수 있다.

② 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 수학이 전달해주는 정신적 능력이 요구된다.

3) 수학의 심미적 가치

① 기하학적 도형이나 황금 분할 등의 수학적 대상을 통해 수학의 아름다움을 인식하고, 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 것을 통해 수학의 아름다움을 느낄 수 있다.

② 위대한 수학자들은 수학의 아름다움을 인식하였고, 바로 이 아름다움이 그들이 수학을 계속 공부하고자 하는 데 커다란 원동력이 되었다.

③ 학생들 수준에서 수학의 심미적 가치를 쉽게 인식하기는 어렵지만, 많은 수학자들이 수학에서 볼 수 있는 추상화된 아이디어들의 아름다움을 강조하였다.

④ 우주와 자연의 조화로운 질서를 밝혀내는 수학적 개념과 이론들은 그 자체로 아름답다.

4) 수학의 문화적 가치

① 인류가 오래 전부터 오늘날까지 구축해 온 수학이라는 문화는 수용, 전달할 가치가 있는 학문임을 느낄 수 있다.

② 수학은 수많은 사람들의 노력을 거쳐 생동하며 발전해 오면서 각 시대마다 그 사회 발전에 공헌해왔으며, 현대에도 다방면에 걸쳐 기여하는 바가 큰 인류의 소중한 정신적, 문화적 유산이므로 수학을 배우는 것은 곧 인류가 남긴 문화적, 학문적 유산을 계승하여 활용하고 발전시키는 일에 참여하는 셈이 된다.

5) 민주시민으로서의 자질[2)]

① 질서의식과 합리적인 행동 양식을 인식시켜주는 과목이다.

② 수학 문제해결과정을 통해 수학문제뿐만 아니라 인생, 생활 속의 문제까지도 수학적인 사고를 바탕으로 해결해 낼 수 있는 지성인이 되어야 한다.

---

2) 꼭 필요한 '수학교육의 목적'은 아님

2. 수학교육학

수학교육학은 교육받는 대상, 교육할 내용, 그리고 대상과 내용의 관계로서 성립되는 교육적 상황의 구조와 과정을 연구하는 학문이다.

2.1. 수학교육학의 의미(우정호)

수학의 학습지도 개선을 위해 그와 관련된 분야를 연구하는 과학이다. 이 때, 수학 학습지도는 다음 2가지로 구분할 수 있다.

① '무엇을 가르치면 좋을까?'에 대한 것: 교사가 교육과정, 교과서, 지도서 등에서부터 얻어진 정보를 전달하는 교수 활동

② '어떻게 가르치면 좋을까?'에 대한 것: 학생이 여러 가지의 정보원으로부터 정보를 받아, 그것들을 변환하고, 교사의 요청에 의해 교재 습득의 질이나 사고 활동의 발달 정도에 관한 정보를 교사의 발문에 대한 답으로서, 또 연습 문제의 해답 등의 모양으로 교사에게 전달하는 활동

2.2. 수학교육학의 영역

러시아의 수학교육학자인 Stolyar(1969, p.26)는 수학교육학의 구조(영역)를 '무엇을 가르칠 것인가(교육내용)'와 '어떻게 가르칠 것인가(교육방법)'로 나누어 설명하였다. 박경미(1997)는 수학교육학의 구조를 교과 내용을 구성하는 수학의 '내용적 명제'로의 수학(순수수학과 학교수학을 포함하여), 내용적 명제인 수학을 깊이 있게 이해하기 위한 배경 지식인 '설명적 명제' 그리고 수학교육학의 주요 영역인 '교육적 명제'로 나누어 설명하였다.



[그림] 수학교육학의 구조

이러한 수학교육학의 구조를 구성하는 요소들을 개략적으로 살펴보면 다음과 같이 구분된다.

① 수학교육과정론(커리큘럼)

㉠ 수학교육과정은 가르치고 배울 수학 내용의 범위, 계열성 등을 명시함으로써 수학교육 프로그램의 개관을 보여주는 영역이다. 이는 현재 진행 중인 수학과 교육과정을 의미한다.

㉡ 심리학적, 사회학적, 철학적, 간학문적 측면을 고려하여 학교에서 가르치고 배워야할 내용을 선정하고 조직하는 문제를 다룬다. 이 때 학교별, 학년별 학생의 인지발달단계와 다른 과목과의 연계성, 도구 교과로서 수학에 부과되는 사회적 요구 등을 고려하고 다른 나라의 교육과정과도 비교 연구해야 한다.

㉢ 수학교육의 목적에 대한 논의를 바탕으로 초등학교, 중학교, 고등학교의 수학에 있어 각 영역의 내용들을 선정하고 조직하게 된다.

② 수학교재론

㉠ 수학교재론은 교수 · 학습을 염두에 두고 선정된 내용을 교육적으로 좀 더 정교화 시키는 과정이다.

㉡ 학문으로서의 수학 고유의 정신을 지키면서 어떻게 내용을 초등화시켜 학생의 이해가 용이하도록 변모시킬 것인지를 연구하는 것이 수학교재론의 주된 관심사이다.

㉢ 학문으로서의 수학을 전담하는 수학자의 복잡한 사고 과정에서부터 출발하여 학생의 학습활동이라는 종착점에 이르기까지의 복잡하고도 다차원적인 변화의 과정을 고찰하는 것이다.(=교수학적 변환론)

㉣ 학문으로서의 수학을 학생의 인지발달단계에 맞게 번역하여 재구성한 것이 곧 교과로서의 학교수학이다. 이러한 변역의 과정에서 수학 본연의 내용에 많은 변화가 오며, 수학적 왜곡이 일어나기도 한다(=지식의 파손성). 따라서 수학 고유의 본질을 지키면서 어떻게 내용을 초등화시켜 아동과 학생의 이해가 용이하도록 변모시킬 것인가가 주요 관심사이다.

③ 수학 교수 · 학습론(수학교육심리학 포함)

㉠ 학생의 학습과정을 이해하고 그로부터 교수·학습 방법을 제시하는 것과 관련된 분야로 수학교육심리학이라고도 한다. 수학교육심리학은 수학 교수 · 학습의 인지적 측면에 관련된 것을 연구하는 분야로 수학적 사고의 과정 또는 수학 학습의 과정을 심리학적

인 관점에서 규명하려고 노력하는 분야이다.

ⓛ 교육학 일반에서의 교수 · 학습 이론을 수학과의 특성에 맞게 각색한 이론이 있다.

(예) 브루너의 지식의 구조와 발견학습, 가네의 학습 위계 이론, 구성주의에 의한 교수 · 학습 이론, 형태주의 심리학에 근거한 학습 이론

ⓒ 수학과 고유의 이론으로 수학에서 출발한 순수 수학 교수 · 학습 이론이 있다.

(예) 폴리아의 문제해결을 위한 학습 이론, 딘즈(Dienes)의 활동주의적 학습 이론, 반 힐레(van Hiele)의 기하학습수준 이론 등

ⓔ 수학적 지식의 본성에 대한 인식론적 연구, 여러 가지 수학적 개념 획득에 대한 인지 과정에 대한 고찰, 수학적 지식을 획득하는 데 있어서 언어적인 문제점, 문제해결 과정에서의 메타인지, 수학 영재아부진아의 심리적 특성 등이 모두 해당된다.

④ 수리철학(=수학기초론)

ⓖ 수학기초론은 용어 그대로 수학의 기초를 이루는 근거에 관심을 갖고 수학의 진리성이 어떻게 보장되는가를 밝히려는 연구로, 고대 그리스 시대부터 최근에 이르기까지 그 형태는 다소 다르지만 연구가 지속되어온 분야이다.

ⓛ 수리철학, 수학인식론, 수학사상사 등 여러 가지로 호칭되어 왔으나, 1950년경부터 고유한 연구 방법과 고유한 연구 성과에 따라 이들 분야를 하나의 연구 영역으로 설정하여 수학기초론으로 부르게 되었다.

ⓒ 수학적인 대상이 존재하는가 하는 존재론적 문제와 수학적 진리를 보장하는 마지막 근거는 무엇인가와 같은 인식론적 문제를 다루며 '수학이란 무엇인가? 수학적 지식 및 인식의 본질은 무엇인가? 수학적 지식은 참인가? 수학적 지식이 참이라는 것은 어떻게 보장되는가? 수학에는 모순이 없는가? 논리적으로 참이란 무엇인가?' 등과 같은 문제들을 수학, 철학, 논리학 등과 관련지어 연구한다.

ⓔ 최근에는 구성주의와 같은 이론이 존재하며 수학교육의 많은 탐구영역이 수리 철학과 철학적 관점에 의존하고 있다고 할 수 있다.

⑤ 수학교육평가

ⓖ 수학과의 평가는 인지능력, 문제해결력, 수학적 성향을 지필검사, 관찰, 면담, 질의응답 등의 다양한 방법과 도구로 이루어져야 한다.

ⓛ 수학교육평가의 연구 주제는 다양한 평가 방법의 개발과 그 방법의 타당성과 신뢰도

문제라고 할 수 있다.

㉢ 아직 교육학에서 다루는 일반적인 교육평가와 구별하기 어려운 분야이긴 하지만 앞으로 수학이라는 교과가 가지는 특성에 비추어 평가 목표나 방법, 수학교육에 적합한 평가도구의 자체적 개발과 표준화 작업 등에 대한 논의도 여기서 다루어야할 연구 분야이다.

⑥ 수학문제해결

㉠ 수학문제해결은 1980년대 이래 수학교육학에서 가장 활발하게 연구가 이루어지는 분야이다.

㉡ '문제'라고 하는 것은 이미 학습한 계산 기능 또는 알고리즘의 구사 능력을 강화하기 위한 연습문제나 단순한 회상에 의해 해결될 수 있는 질문과 같은 것이 아니라, 성취해야 할 목표가 있고 그 목표에 도달하는데 장애물이 있으며 적어도 문제를 해결하고자 하는 사람에게는 그것을 해결하는 알고리즘이 없기 때문에 심사숙고를 요하는 상황을 말한다.

㉢ '문제해결'은 '문제'에 도전하는 과정으로써 문제를 형식화하고 목표를 분명히 하여 해결 계획을 세우고 이를 수행한 다음 결과를 평가하는 것이다.

㉣ 문제해결 연구의 선구자는 폴리아(G. Polya)이며 그는 교육적 측면에서 수학적 발견술의 부흥을 시도했다. 최근에는 폴리아의 연구결과를 비판적으로 수용한 여러 대안들이 제시되고 있으며, 메타인지적 측면에서 문제해결을 조망하는 연구, 문제제기 등에 대한 연구도 활발하게 이뤄지고 있다.

⑦ 수학사 및 수학교육사

㉠ 수학사는 특정한 수학 내용이 누구에 의해 언제 어떻게 발달되었는가 하는 단편적인 사실 외에도, 수학을 형성하고 다듬은 사회적·문화적·사상적 배경과 같이 다양한 관점에서 수학을 조명하게 된다. 따라서 수학사에 대한 지식은 수학에 대한 폭넓은 이해를 가능하게 한다.

㉡ 수학사에서는 수학과 교육과정과 관련된 수학의 역사적 발달과정을 살펴보며 특히 수학적 개념, 원리 및 문제의 생성, 변천, 발전 등을 수학 사상사적 관점에서 연구하고 그 교육학적 의미와 시사점을 추출하는 연구가 필요하다.

㉢ 수학사를 반영한 수학교육 학습법이 역사발생적 원리이다. 즉 개체발생은 역사 발생을 단축된 형태로 되풀이 한다는 원리에 따르면 수학사에서 일어났던 사건들은 바로 학교 수학 내용의 구성이나 지도 방법에 대한 구체적인 처방으로 연결될 수 있다. 즉 수학

발전의 종축을 따라 진화되어 온 사고의 결과를 계열화하고 학생들이 그러한 발전의 각 단계를 반복적으로 경험할 수 있도록 도움으로써, 즉 역사 발생적 측면을 계통 발생적 측면으로 전환시킴으로써 학생들의 수학 학습에 도움을 줄 수 있다.

㉣ 수학교육사에서는 수학교육의 변화, 그 변화의 요인, 그에 대한 반성 등을 고찰하여 현재와 미래의 수학교육에 방향을 제시하는 일이 필요하다.

2.3. 수학교육학의 연구 방법

1) 연구자의 견해에 따른 분류

① 경험주의적 견해

실험 연구를 선호하는 경험주의자들이 조건을 주의 깊게 조절하여 자료를 수집하고 정확하고 객관적인 측정을 하여, 자료 분석을 하는 방법이다. 이러한 연구에는 신뢰성 있고 어떤 이론적 골격에 들어맞는 것을 발견할 수 있다.

② 직관주의적 견해

수학교육 연구의 최선의 길은 재능이 뛰어난 실천가의 경험과 수학 지도법에 대한 그들의 직관에 주목하는 것이라고 생각한다. 그들의 주장에 따르면 경험적 자료는 필연적으로 불완전하기 때문에 경험적 자료보다도 자신 또는 타인의 직관적 판단이나 통찰을 추출 정리하는 것이 바람직하다는 것이다.

③ 현장 교사들의 견해

독단적인 이론이나 공상적인 실험 설계는 흥미로운 것이 될 수 없고, 수학교육 연구는 무엇보다 현장 지도와 관련된 문제에 구체적 해답을 제공할 수 있어야 한다. 수학의 교수 행위 자체를 전개되는 그대로의 현상으로 관찰하고, 이 현상과 관련된 요소인 수학 교과의 내용이나 학습자를 분석함으로 바람직한 교수 학습 모델을 구성하고 검증하려고 한다.

2) 연구 방법에 따른 분류

① 문헌적 · 역사적 연구 방법

수학교육의 여러 가지 분야의 역사적 연구라든가, 수학교육학의 목표나 어떤 목표에 적합한 교육과정안 등 종횡의 면에서 연구 주제들이 많이 있다. 이러한 주제가 정해지면 필요로 하는 문헌을 읽고, 그것을 어떻게 해석하고 판단하는가가 중요한 과제이다.

㉠ 통합적 연구(문헌연구): 연구에 관한 연구(=메타분석법)

㉡ 철학적 연구: 비판 기준에 따라 비판하면서 일반화하는 연구

㉢ 역사적 연구: 발달적·전기적 상황의 변화와 인과관계를 연구

② 실험 · 실증적 연구 방법

크게는 학교 제도의 적합성 비교라든가, 교육과정 비교, 작게는 어떤 내용이 몇 학년의 학생에게 교재로서 가장 좋은가 등을 생각할 수 있다. 또 학생의 추적조사 등은 장기간에 걸친 실험에서 얻어진 자료를 통계적으로 처리를 하게 된다. 수학교육학의 정의적 측면이나 태도 등에 대한 조사 연구에는 교육심리학의 적절한 이론을 빌려 그것에 의해 조사 방법을 정한다. 이 때 타당성, 신뢰성 있는 측정 도구를 선택해야 하며, 적절하게 수량화해야 한다. 또 표본의 수, 표본 선정방법 등을 신중하게 정해 먼저 예비 조사를 행한 후, 측정 도구를 수정, 개선한 다음에 본 조사를 실시하도록 한다. 얻어진 자료는 교육통계적 수법을 이용해 적절히 구사되어 결론이 이끌어진다.

㉠ 관찰기술, 조사연구: 있는 상태 그대로 조사, 기술하고 해석(=상태연구, 관계연구)

㉡ 실험연구: 집단에 변인을 작용시켜 나타나는 변화를 관찰

㉢ 현장연구: 조건을 거의 통제하지 않고 실천을 강조할 목적으로 개선방향을 제안

③ 질적, 임상 연구 방법

개개인의 특성을 관찰, 면담을 통해 녹화, 녹음하고 이에 대한 프로토콜 분석을 통해 국소적인 원리를 찾는다. 연구 설계가 매우 중요하다.

3. 수리철학(수학기초론)

수학이란 무엇이고 그 특징은 무엇인가?

· 화이트헤드(Whitehead): 수학은 모든 유형의 형식적이고 필연적인 연역적 추론이다.
· 러셀(Russel): 순수 수학은 'p이면 q이다'라는 형태의 모든 명제의 모임이다.
· 블랙(Black): 수학은 그 형식이 기호로 표현될 수 있는 모든 구조에 대한 연구이다.
· 니본(Kneebone): 수학은 어떤 특별한 종류의 사실의 총체라기보다는 사고 활동이다.
· 코랑(Courant)과 로빈스(Robbins): 인간 사고의 표현으로서의 수학은 능동적인 의지, 세련된 추론, 미적 완전함에 대한 갈망을 반영한다. 그 기본적인 요소는 논리와 직관, 분석과 구성, 일반화와 개별화이다. 서로 다른 전통이 서로 다른 측면들을 강조할지라도, 이들 대조적인 측면들의 상호 작용과 그 종합을 위한 투쟁만이 수학의 삶이요 유용성이며 최상의 가치이다.
· 소비에트 백과사전: 수학은 현실 세계의 量的 관계 및 공간의 형태에 관한 학문이다.
· 포앙카레(Poincare): 수학은 조화의 정신이다.
· 와일(Wile): 수학은 대칭의 미이다.
· 갈릴레이(Galilei): 신은 자연이라는 책을 수학이라는 문자로 썼다.
· 칸토르(Cantor): 수학의 본질은 자유에 있다.

…

수학은 무한을 주제로 하는 과학이다.
수학은 단순함을 지향하는 사고이다.
수학은 구조를 다루는 학문이다.

수학을 가르치는 교사라면 '수학교육의 현실에서 학생들에게 어떻게 수학에 대하여 관심과 흥미를 갖게 할 수 있으며, 어떻게 수학을 경험할 수 있도록 가르칠 것인가? 진정한 수학교육의 목적은 무엇인가?' 등 수학교육의 문제점들과 해결방법 등에 대하여 의문과 고민을 가지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 수학의 기초 및 본질에 대한 수리철학과 수학교육 철학을 조망해 보고 수학에 대해 폭넓게 이해하여 수학교육의 지향점을 발견해야 한다. 이때, 수학의 기초 및 본질에 대해서는 수학, 철학, 심리학 등의 학문에서 다각도로 접근할 수 있다. 이러한 접근 자체를 단순화하는 데에는 무리가 따르나 수학에서는 이러한 분야를

‘수학기초론’이라고 명명하고, 철학에서는 ‘수리철학’이라는 범주로 분류하며, 심리학에서는 ‘수학인식론’이라 부른다. 학자에 따라서는 수리철학과 수학인식론 모두 수학적 지식의 본질을 다루고 수학에 대한 반성을 주로 하고 있다는 점에서 공통성을 지니고 있기 때문에 수학기초론이라는 범주에 이를 모두 포함시키기도 한다.

3.1. 수리철학의 발달[3)]

① 수리철학은 수학의 본질에 대하여 고찰하고 설명하는 수학에 대한 일종의 반성이다. 즉 수학의 기원, 수학의 본질, 수학의 목적을 살펴봄으로써 오랜 세월에 걸쳐 누적된 많은 수학 지식에 의미와 순서를 주기 위한 의도적인 재구성이 바로 수리철학이라고 할 수 있다.

② 수리철학의 탐구 대상인 수학 및 수학적 지식에 대한 관점은 우선 절대주의와 회의주의로 대별될 수 있다. 수학적 지식에는 절대적으로 안전한 기초가 있다는 입장이 절대주의로, 플라토니즘, 논리주의, 직관주의 그리고 형식주의가 여기에 해당된다. 이에 반해 수학적 지식에는 절대적인 기초가 존재하지 않으며 존재한다 하더라도 어떤 것이 기초인지 판단할 수 없다는 입장이 회의주의이며, 준-경험주의와 사회적 구성주의가 여기에 해당한다.

③ 절대주의 및 회의주의와 더불어 제기될 수 있는 수리철학의 관점에는 二元論과 多元論이 있다. 이원론에서는 진리 對 거짓, 옳은 것 對 옳지 않은 것만이 존재한다. 그러나 다원론에서는 다양한 답과 다양한 풀이 방법이 인정되고, 동일하게 타당한 것이 가능하며, 개인의 선호도 문제도 고려된다. 따라서 절대주의는 ‘이원론’, 회의주의는 ‘다원론’과 대응된다고 볼 수 있다.

④ 수리철학에서 대두될 수 있는 관점은 ‘개인적 수리철학’과 ‘공동체적 수리철학’이다. 플라톤 주의자나 논리주의자, 직관주의자, 형식주의자들은 수학적 지식의 확실성을 보장해 주는 절대적이고 궁극적인 기초가 존재하며, 이러한 기초는 능력 있는 개인의 직관이나 경험에 의해서 발견할 수 있다고 보기 때문에 개인적 수리철학의 관점을 견지한다고 할 수 있다. 반면에 준-경험주의는 수학적 지식의 오류 가능성을 인정하며, 오류를 발견하고 개선할 수 있는 수단을 역사적인 대화로 보고 있다. 또 사회적 구성주의는 수학을 사회적 구성물로 보고 있기 때문에, 개인의 주관적 수학보다는 사회적, 역사적 공동체가 함께 만들어 나가는 수학을 강조하는 바, 이는 공동체적 수리철학이라고 할 수 있다.

---

3) 이 부분은 강문봉(인천교대)의 이화여자대학교 특강 자료를 참고로 하여 작성되었다.

〈표〉 수리철학의 특성별 분류

절대주의	플라톤주의 논리주의 직관주의 형식주의	이원론	개인적 수리철학
회의주의 (=상대주의)	준-경험주의 구성주의	다원론	공동체적 수리철학

3.2. 절대주의

절대주의는 절대적 진리로서의 수학의 존재성 및 수학의 절대적 기초를 인정하는 수리철학이다. 20세기 초까지의 수리철학을 지배하였다.

1) 플라톤주의[4](고대 그리스~19세기 말)

① 플라톤주의는 존재의 세계가 질적 차이에 의해 구분 가능한 ‘위의 세계(또는 안의 세계)’와 ‘아래의 세계(또는 밖의 세계)’라는 두 세계로 이루어져 있다고 보며 위의 세계(可知界)는 사고의 대상으로 이루어져 있고 아래의 세계(可視界)는 감각 경험을 대상으로 이루어져 있다고 구분하였다.

② 이데아는 논리적으로나 시간적으로 가시계의 사물보다 선재하는 것으로, 사물이 지금 여기에 이러저러한 모습으로 있는 것을 가능하게 해주는 사물의 존재 준거이다.

③ 플라톤에 따르면 인간은 물리적 기원을 갖는 가시적 존재인 육체와 신적 기원을 갖는 비가시적 존재인 영혼으로 구성되며 인간의 참된 삶은 육체의 본성이 아니라 영혼의 본성에 따르는 삶으로 구성된다. 즉, 영혼은 항구적 존재로서 육체에 들어오기 전에 이데아계에 선재했으므로 감각 경험을 단서로 하여 이데아에 관한 지식을 상기할 수 있다.

④ 플라톤주의에 의하면, 앎은 감각 경험이 아니라 영혼이 독자적 능력으로 존재들과 대면할 때 얻어지며 앎은 이데아적 존재에 대한 상기 또는 회상이다. 수학적 대상은 인간의 의식과 독립적으로 실존하며 창조되지도 변하지도 소멸되지도 않는다. 즉, 수학적 대상은 이미 존재하므로 콜럼버스가 아메리카 대륙을 발견한 것처럼 수학자는 이미 있는 수

4) 플라톤주의는 이성의 기능을 인간의 타고난 특성으로 간주하면서 그것에 의해 진리를 관찰과 무관하게 선험적으로 지각할 수 있다고 생각했다. 이 기능의 존재는 수학에서 가장 잘 밝혀진다.

학적 존재의 성질을 발견할 뿐 어떠한 것도 발명할 수 없다.

⑤ 플라톤주의는 수학의 대상이 이데아와 같은 것이므로 눈에 보이는 세상에는 폭이 없는 선도 크기를 갖지 않는 점도 찾아볼 수 없다. 자나 컴퍼스로 아무리 정확하게 직선이나 원을 그려도 완전히 곧은 직선이나 둥근 원을 그릴 수 없으며 종이나 칠판 위에 그려진 삼각형은 완전한 삼각형이 아니다. 즉, 불완전한 삼각형에 대해 이야기하는 것이다. 따라서 완전한 삼각형이란 우리 마음속에서 상상할 수 있는 완전한 유클리드 삼각형을 의미한다.

⑥ 수학에서 구성 내용은 명확한 대상이고, 일부는 밝혀졌지만 많은 부분이 밝혀지지 않고 있는 성질들을 갖고 있다. 더불어 수학적 대상들은 물리적인 존재인 시간과 공간 밖에 존재하며, 불변한다. 즉, 창조되거나 변하거나 소멸되지 않는다. 그리고 수학적 대상에 관한 모든 문제는 우리가 알아냈든 못 알아냈든 상관없이 명확한 답을 갖고 있다.

⑦ 모든 것은 이미 존재하고 있기 때문에 플라톤주의에 의하면 수학자는 발명가가 아니라 경험 과학자이다. 따라서 수학자가 할 수 있는 것은 발견이다. 수학은 자명한 진리에서 출발해서 면밀한 추론에 의해 숨겨진 진리를 발견한 결과이다.

⑧ 플라톤은 철학자 군주를 양성하는 교육과정에서 수학을 중요하게 생각하였는데, 그 이유는 수학적 지식이 이데아를 접하는 최초의 단계로서 인간의 마음을 아래의 세계에서 위의 세계로 전향하도록 만드는 성격을 지니고 있다고 보았기 때문이다.

⑨ 플라톤에 따르면, 교사는 산파와 같은 역할을 하며 교사가 해야 할 일은 학생들에게 지식을 주입하는 일이 아니라 학생들이 자신 안에 배태하고 있는 것을 낳도록 하는 일이다. 산파로서의 교사가 할 일은 학생들 스스로가 생각하도록 돕는 일이다. 이를 위해 교사는 경이 또는 당혹감을 이끌어 내는 과정의 '부정적 수업'을 활용할 수 있다.

⑩ 교사가 산파의 역할을 잘 수행하기 위해 가르칠 내용에 대해 잘 알고 있을 뿐 아니라, 가르칠 내용이 어떤 상상적 견해에 대비되는 학문적 견해인지를 알고 있어야 한다. 또한 가르칠 내용에 담겨 있는 질문이 무엇인지 잘 알고 있어야 한다.

[변화] 16, 17세기 이후에 사람들의 의식이 변화하면서 수학적 대상의 실재 여부보다 그것을 어떻게 인식할 것인가의 문제에 더 관심을 갖게 되었다. 여기에서 플라톤주의는 어려운 문제에 부딪힌다. 수학적 대상이 관념적인 비물질적 세계를 형성하고 있다면, 인간의 정신은 어떻게 이 세계와 접촉하는가하는 의문점이 생긴다. 물리적 감각이 물리적 실재를 지각하는 것과 똑같이 관념적인 실재를 직접 지각할 수 있는 정신적인 기능이 있는가 하는 것이다. 플라톤주의는 이 정신적인 기능이 직관이라고 말

하지만 직관의 본질에 대해 분석을 하거나 직관을 서술하려고 하지 않는다. 직관은 ‘영혼’과도 같이 그저 존재하는 것일 뿐이다. 이런 대답은 과학적인 성향을 가진 사람들에게 매우 불만족스러운 것이었다.

2) 수학기초론(19세기 말~20세기 초)

19세기가 시작되고 나서 상당히 지난 후까지도 플라톤주의와 유클리드 기하의 입지는 아주 확고했다. 모든 사람들이 수학을 가장 확실하고 가장 믿을 만한 분야로 생각했다. 그런데 19세기에 비유클리드 기하학이 발견되어 두 가지 이상의 기하학을 고려할 수 있다는 사실이 밝혀졌고, 해석학이 발달하여 모든 곳에서 미분 불가능한 연속 곡선 등의 이상한 발견을 통해 기하학적 직관이 파괴되었으며 러셀의 역리가 발견되어 수학적 완전성이 흔들리게 되었다. 당시까지 수학의 견고한 기반으로 여겨진 기하학적 직관의 취약성이 드러났고, 이로 인해 기하학에서의 확실성이 흔들리게 되었다. 이러한 위기를 극복하고 수학의 완전성과 확실성을 재확립하고자 하는 시도로 수학기초론이 등장하였다. 19세기의 수학자들은 수학의 기초를 기하학이 아니라 산술에서 찾았다. 해석학과 기하학을 산술로 환원하려는 노력의 일환으로 실수와 무한집합이 도입되었다.

(1) 논리주의

① 논리주의는 프레게(Frege)와 러셀(Russell)을 대표로 하며, 수학의 확실성을 확보하기 위하여 수학을 논리 위에 세우자고 주장했다. 즉, 논리학의 의심할 여지가 없는 확실성을 수학에 부여함으로써 수학의 기초에 확실성을 제공하려 하였다.

② 논리주의의 특징적인 주장은 다음 두 가지로 정리된다.

㉠ 수학의 모든 개념이 집합론의 개념 또는 러셀의 유형론과 같은 어떤 체계의 개념을 포함하는 것으로 간주된다면, 궁극적으로 수학의 개념은 논리적 개념으로 환원될 수 있다.

㉡ 모든 수학적 정리(theorems)는 공리와 논리의 추론 규칙만으로 증명될 수 있다.

③ 수학이 논리 위에 건설될 수 있음을 보이려면, 수학의 모든 개념을 논리적 개념으로 환원할 수 있음을 보여야 한다. 그리고 모든 수학적 지식이 논리의 추론 규칙에 의해 증명될 수 있음을 보여야 한다.

④ 프레게(Frege)는 수와 산술 법칙을 순수한 논리적 용어로 정의하려고 시도하였으나 역리가 발생했으며 러셀(Russell)은 이러한 역리를 피하기 위해 유형론(type theory)을 제안하였지만 환원공리나 선택공리, 무한공리와 같은 자명해 보이지 않는 공리들을 받아들여야 하는 문제가 발생하였다.

⑤ 또한 괴델(Gödel)의 불완전성 정리는 연역적 증명은 모든 수학적 진리를 입증하는데 불

충분하다는 것을 보여줌으로써, 수학적 공리를 논리의 공리로 성공적으로 환원해도 모든 수학적 진리를 유도하는 데는 충분하지 않음을 주장하였고 따라서 수학적 지식의 확실성을 논리의 확실성으로 환원하려는 논리주의자적 프로그램은 원칙적으로 실패하였다.

(2) 직관주의

① 논리주의가 형성되는 동안 그와 다른 방향의 접근법이 직관주의에서 시작되었다. 직관주의는 수학적 지식의 유일한 원천을 근본적인 직관에 두고 직관으로 인해 기본적인 수학적 개념과 정리가 자명하게 된다고 주장하였다.

② 직관주의는 수학적 진리가 유한 번의 단계로 구성 가능함(=구성적인 증명)을 보임으로써 참이 된다고 주장하였다. 따라서 구성적인 증명을 제시할 수 없는 수학적 지식은 모두 버렸다.

③ 직관주의의 선구자는 크로네커(Kronecker)이며 대표적인 직관주의자는 네덜란드의 위상 수학자 브라우어(Brouwer)이다. 브라우어는 직관적으로 자명하다고 인정되는 자연수에 기초하여 유한한 구성 과정으로 수학을 전개하려고 시도하였다.

④ 직관주의는 고전 논리의 모든 법칙을 수학에 임의로 적용하는 것에 대하여 반대하였다. 예를 들어 배중률은 무한집합에 임의로 적용될 수 없는 직관적으로 자명하지 않은 논리이며 새로운 수학적 진리를 발견하는 도구로 배중률을 사용하는 것을 반대하면서 배중률을 사용한 수학적 증명을 받아들이지 않았다.

⑤ 직관주의자들은 수학적 존재성과 구성 가능성을 같은 것으로 보았다. 즉, 수학적 논의에서 정당한 것으로 받아들일 수 있는 대상은 유한 번의 단계로 그 실체를 나타낼 수 있는 방법이 있거나 임의로 원하는 정도의 정확성으로 그들을 계산하는 방법이 있어야(=구성적인 것이어야) 한다.

⑥ 논리주의에서와 같은 역설이나 모순은 피할 수 있었지만, 수학의 내용을 지나치게 제한하는 오류를 범하여 미적분학, 실함수론 등의 고전 수학의 많은 부분을 포기해야 하는 상황에 직면하였다. 실제로, 칸토르(Cantor)의 무한집합, 초한수이론, 체르멜로(Zermelo)의 선출공리, 실무한 집합을 사용하는 해석학의 많은 내용들이 버려졌다. 이러한 모습에, 힐베르트(Hilbert)는 직관주의자들을 “귀찮다고 우리의 가장 귀중한 보물의 대부분을 포기하려고 한다”고 비난하였다.

⑦ 또한 직관주의는 자신들이 근거로 하고 있는 주관적 직관이 어떻게 객관성을 갖게 되는지에 대하여 적절한 설명을 하지 못하였다.

⑧ 프로이덴탈(H. Freudental)의 수학화 교수 · 학습 이론을 전개하는 기본 철학이다.

(3) 형식주의

① 형식주의는 논리주의에 의해 생겨난 역리와 직관주의에 의해 야기된 고전 수학의 포기라는 수학적 위기를 극복하려는 시도로, 힐베르트(Hilbert)는 집합론의 역리를 수학의 정의와 증명의 정확성과 엄밀성이 부족한 데서 생긴다고 보고, 수학을 엄밀한 방법으로 모순이 없고 완전한 공리 체계로 구성하고자 시도하였다.

② 공리에서 출발한 고전의 증명은 각 단계가 기계적으로 점검 가능한 형식으로 표현될 수 있으므로 먼저 형식적 언어와 추론의 형식적 규칙을 도입한 후, 이 형식적 언어의 조합적 성질에 대한 이론(초수학)을 전개하고, 이 체계의 내부에서 모순이 유도될 수 없음을 순수하게 유한한 논법으로 증명하고자 하였다. 이런 방법으로 수학은 무모순성의 보장이라는 의미에서 안전한 기초를 가지게 될 것으로 보았다.

③ 힐베르트는 수학을 완전한 형식 체계로 보고, 명제는 형식적인 추론 규칙에 따라 다루어지는 기호의 유한 번의 연쇄로 간주하였다. 이렇게 수학을 추상적인 기호를 다루는 형식 체계로 보면, 기호가 의미하는 것은 문제가 되지 않으며, 기호를 다루는 규칙 체계가 건전한가 하는 문제만 남게 된다.

④ 형식주의에서 수학적 기호가 의미하는 것은 문제가 되지 않으므로 이러한 기호를 다른 기호로 나타내어도 상관이 없다. 예를 들어 점, 선, 면 대신 컵, 접시, 책상이라는 용어를 사용하여도 무방하다. 형식적인 체계 내에서 이런 용어들은 의미를 지니지 않는 무정의 용어로 다루어지며 이 용어들의 관계만 모순 없이 잘 규정될 수 있으면 된다.

⑤ 그러나 1931년 괴델(Gödel)은 무모순인 공리 체계는 불완전하다는 것을 증명하여, 무모순인 공리 체계에 증명도 반증도 할 수 없는 결정불가능한 명제가 존재한다는 것을 보였다. 결국 수학을 형식 체계로 간주하여 수학적 지식의 확실성을 확립하려 한 형식주의 프로그램도 충분히 성공적이지 못했다.

(4) 구조주의 (참고만 하세요)

① 구조주의는 부르바키(Bourbaki) 학파에 의해 주장된 수리철학의 한 사조를 일컫는다.

② 논리주의와 형식주의의 실패에도 불구하고 집합론의 공리계는 여전히 모든 수학을 건설하는 데 바람직한 기초로서 여겨졌다. 부르바키 학파는 적절한 공리들을 선택하여 이 공리에 따라 수학의 복잡한 내용을 공리적 체계로 명쾌하게 재현시키려고 하였다.

③ 모두라고 할 수는 없으나 대단히 많은 분야에 관하여 일반적인 공리적 체계를 세움으로써 수학적인 수단을 표준화하였다. 집합론에서 시작하여, 단순한 것에서 복잡한 것으로, 일반적인 것에서 특수한 것으로 계층적인 구조를 가진 질서 있는 수학을 이룩하여 나가려 했다.

④ 고전수학에서는 산술, 기하학, 대수학, 해석학을 각각 독립된 서로 다른 것으로 생각해 왔으나, 부르바키 학파는 이와는 반대로 기본구조에서 시작하여 단일한 수학을 재현시키려 했다. 이와 같은 방법을 진전시켜 나아가는 데는 고도의 추상능력을 필요로 했다.

⑤ 구조주의는 1950년대와 1960년대에 전 세계적으로 새수학(New Math)이라는 이름의 수학교육 현대화 운동과 맞물려 초·중등은 물론 유아교육까지 엄청난 영향을 미쳤다. 그러나 엄밀함이 강조된 완성된 형태의 지식을 다량으로 포함한 교육과정은 오히려 부작용을 많이 낳았고, 형식적인 설명의 엄밀함보다는 구체적이고 응용 가능한 수학에 대한 요구가 커지면서 새 수학 교육과정에 대한 반성이 일었다.

	수리철학	증명관
플라톤주의	· 수학적 지식은 영구불멸의 완전한 이상적 세계인 이데아	· 수학 내용의 절대적 진리성을 정당화하는 유일한 방법
논리주의	· 수학은 논리의 일부분, 수학적 개념을 논리의 개념으로 환원 · 수학적 지식의 확실성을 논리의 확실성으로 대체	· 수학 지식을 논리적으로 정당화하는 장치 · 수학적 진리는 논리의 공리와 추론 규칙만으로 입증 가능
직관주의	· 직관은 수학적 지식의 근원으로서 다른 어떤 논리보다 선행 · 수학적 활동은 직관적으로 자명한 공리에 근거한 내성적 구성	· 수학 명제의 참은 구성 가능성과 동치 · 구성적 증명만을 인정, 비구성적 논증과 배중률 배제
형식주의	· 수학을 의미가 배제된 형식 체계로 재조직 · 수학의 확실성, 무모순성과 완전성	· 증명은 특별한 규칙을 따르는 의미 없는 기호 조작 · 엄밀한 연역적 증명은 무모순성과 완전성을 보장하는 수단

앞에서 살펴 본 플라톤주의, 논리주의, 형식주의, 직관주의와 구조주의는 모두 수학의 절대적 확실성에 대한 믿음을 가지고 있었으며 그 기초를 제대로 확립하려고 노력하였다. 이런 절대주의적 관점은 현재에도 많은 지지자들을 갖는다. 과학이 오류 가능하다는 것은 쉽게 받아들이지만, 수학과 논리는 누구에게나 필연적이고 확실한 것으로 본다.

3.3. 상대주의(20세기 중반 이후)

수학의 확실성을 찾고자 그리고 수학의 본질을 찾고자 하는 노력의 실패와 한계에 의하여 수학적 지식이 절대적임을 부인하고 오류 가능함을 인정하는 사조가 등장한다. 즉, 전통적인 수리철학이 결과로서의 수학적 지식의 확실성에 초점을 맞추었다면, 준-경험주의나 구성주의는 수학적 지식의 형성 과정, 과정으로서의 수학적 지식 쪽에 초점을 맞추었다. 이런 상대주의적인 견해는 20세기 중반 라카토스(I. Lakatos)의 준-경험주의로부터 시작한다.

1) 오류주의 수리철학: 준-경험주의(Quasi-empiricism)

(1) 라카토스[5)]

> 수학 활동은 인간의 활동이다. [수학적 활동의] 어떤 측면은 여타의 다른 인간적 활동과 마찬가지로 심리학적으로 연구될 수 있고, 또 다른 측면은 역사적으로 연구될 수 있다. 발견술은 근본적으로 이런 측면들에는 관심이 없다. 수학적 활동은 수학을 만들어낸다. 인간 활동의 산물인 수학은, 수학을 만들고 있는 인간의 활동으로부터 '멀어진다'. 수학은 살아서 성장하는 유기체가 되어, 그것을 만들어 낸 활동으로부터 모종의 자율성을 획득한다. 다시 말해서 수학은 자체의 자율적인 성장 법칙과 자체의 변증법을 발달시켜 간다. (Lakatos, 1976, p.146)

① 라카토스는 수학의 발생이 어떠한 논리에 따라 이루어지는가를 파악하기 위하여 18세기로부터 20세기 초까지의 수학사를 역사 발생적으로 분석하고 이를 대화 형식으로 논의하였다. 그는 수학을 완성된 산물로 간주하여 발생의 순서와 반대로 전개된 절대주의의 '유클리드적 연역 체계'를 독단론이라고 비판하면서, 수학의 역사 발생적 논리에 따른 수학 인식론을 제기하였다.

② 라카토스는 유클리드적인 연역적 양식이 수학교육에 해로운 영향을 끼쳤다고 비판하면서, "현재의 과학교육과 수학교육은 권위주의의 온상이며 독립적이고 비판적인 사고의 가장 나쁜 적이라는 사실이 아직도 충분히 자각되지 못하고 있다. 수학에서 이 권위주의는 연역주의자의 패턴을 따르는 반면 과학에서 그것은 귀납주의자의 패턴에 따라 조작된다."고 주장하였다.

③ 라카토스(1986)에게 수학의 절대적 확실성에 대한 탐구는 순환 논리였다. 절대주의 인식론에서는 공리에 의존하여 그러한 공리로부터 수학적 지식을 연역적으로 이끌어냄으로써 수학의 확실성을 확립하려고 하는데, 공리가 진리인 지식으로서 자격을 갖기

5) 『수학 학습 심리학』의 라카토스 참고

위해서는 공리가 주장하는 바에 대한 보증이 필요하나 절대주의에서의 공리는 입증되지 않은 하나의 가정인바, 입증되지 않은 공리는 오류 가능한 믿음에 불과하며 절대적으로 확실한 지식은 아니다. 따라서 절대주의에서 할 수 있는 최선의 방안은 공리들을 입증 없이 받아들임으로써 순환 논리를 깨뜨리던가, 아니면 공리들을 최소화하여 축소된 공리 집합으로 환원하는 것이 된다. 그러나 환원된 공리 집합은 기껏해야 같은 정도의 힘을 갖는 다른 공리로 대치됨으로써 다시 순환 논리에 빠지게 된다.

④ 수학의 절대적 확실성을 위한 기초에 대한 추구는 거부되며, 수학적 지식은 오류 가능하고, 수정 가능하고, 절대적 기초를 갖지 않는 것으로 간주된다. 여러 가지 개념과 증명을 포함해서 수학자들의 연구 결과는 결코 최종적이고 완전한 것으로 인정되어서는 안 되며, 새로운 반례가 나타나거나 엄밀성의 기준이 변화함에 따라 재조정을 필요로 한다는 것이다. 따라서 준-경험주의는 인간 활동으로서의 수학을 수학의 역사와 과학 및 다른 분야에의 응용으로부터 분리된 것으로 파악해서는 안 된다고 본다.

(2) 준-경험주의

① 준-경험주의는 라카토스로 대표되는 수리철학으로, 수학적 지식은 준-경험적이고 오류 가능하며, 여타의 다른 지식과 마찬가지로 인간의 창조적 활동, 즉 발명의 산물이라고 단언한다.

② 수학은 고정된 기초 위에 세워진 유한한 구조가 아니라, 항상 성장하고 변화함에 따라 기초를 수정해 나가는 지식체이다.

③ 수학적 지식은 절대적 진리도 아니고 절대적 확실성도 갖지 않으며, 수학적 지식은 오류 가능하므로 끊임없는 개선의 여지가 있다.

④ 수학은 경험 과학인 자연 과학과 유사한 방식으로 진행하며, 추측(가설)에 대한 거짓이 공리와 정의에 재전달 된다는 의미에서 준-경험적이라고 할 수 있다.

⑤ 수학이 준-경험적이라는 것은 수학이 ‘잠재적 반증자(potential falsifier)’를 갖는다는 것이다. 잠재적 반증자란 추측을 반박할 가능성이 있는 기초 명제를 말하며, 잠재적 반증자가 실제로 추측을 반박하게 되면 그것은 반례가 된다.

⑥ 준-경험주의 수리철학의 주요 관심은 수학적 발견의 논리 또는 발견술이며, ‘수학의 자율적인 변증법’을 기초로 수학적 지식 발생의 메커니즘의 기초를 제시하자는 것이다.

(3) 수학지식의 성장

① 라카토스는 형식적 수학보다 성장하는 비형식적 수학을 중요시하였으며, 주어진 수학

체계에서의 유한 계열의 연역인 형식적 증명보다 발견과 성장에 유용한 도구로서의 비형식적 증명을 더욱 강조하였다.

㉠ 형식적 증명: 주어진 수학 체계에서의 유한 계열의 연역

㉡ 비형식적 증명(준형식적(quasi-formal) 증명): 타당성을 확립하려는 논쟁이지만 명확한 공리 체계에 근거하지 않은 논쟁(=약간의 틈이 있는 형식적 증명)

② 비형식적 수학 이론의 성장 단계(I. Lakatos, 1976, pp. 127-128)

[1단계] 추측 제기	· 수학적 추측을 제기하기
[2단계] 추측을 부분추측으로 분해	· 원시적 추측을 그것의 하위추측 또는 부분추측으로 분해하는 개략적인 사고 실험
[3단계] 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박	· 증명과 원시적 추측에 대한 반례의 출현
[4단계] 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선	· 전반적 반례가 국소적 반례가 되는 '혐의있는 보조 정리(guilty lemma)'가 확인, '혐의있는 보조 정리'가 명백해지고 원시적 추측에 조건으로 부가됨 · 개선된 추측으로서의 정리는 원시적 추측을 대신함

(단) 증명의 재검토, 즉 증명 분석은 전면적인 반례가 나타나거나 확실하다고 생각하였던 증명에 대하여 의심이 생길 때 시작되며, 그러한 의심은 반례를 발견하는 계기가 된다. 발견된 증명-생성 개념과 새롭게 드러난 보조 정리들은 새로운 이론을 형성하게 된다.

③ 반례의 유형

㉠ 전면적 반례: 원시적 추측에 대한 반례

㉡ 국소적 반례: 원시적 추측의 부분추측에 대한 반례

④ 수학적 지식은 원시적 추측이 제안되고, 증명되고, 반례가 출현하고, 증명을 분석하여 추측을 개선하고 새로운 개념이 발견되는 방식으로 발전해 왔다. 수학은 자연과학처럼 경험적인 실험을 통해 연구하는 분야는 아니지만, 수학적 지식의 성장 과정이 추측이고 추측에 대한 반례가 나타나며 추측을 수정하는 방식이라는 점에서 자연과학의 발전과 유사하기에 수학을 준-경험과학이라고 부를 수 있다.

⑤ 라카토스에 의하면 수학은 증명과 반박의 논리에 의해 추측과 비판의 끊임없는 개선을 통하여 변증법적으로 성장한다. 이처럼 수학의 인간적인 측면을 강조함으로써 이전에 수학의 비형식적 측면을 무시하고 수학의 형식적인 측면만을 강조함으로써 표출되었던 문제들을 해결하고자 노력하였다.

2) 구성주의

수리철학에서 말하는 구성주의는 '급진적 구성주의'와 '사회적 구성주의'를 의미한다. 그러나 수학이 처음부터 만들어져 있던 것이 아니라 구성되어진 것이라는 구성주의의 인식론적 바탕은 피아제(Piaget)의 조작적 구성주의에 그 뿌리를 두고 있다. 급진적 구성주의는 철학적 · 문화적 상대주의에 맞추어 객관적이고 절대적인 지식이나 가치의 존재를 부정하는 포스트모더니즘과 관련된다. 이후 급진적 구성주의를 수정 · 보완하며 등장한 사회적 구성주의 역시 절대주의적 수학관을 비판하고 지식을 사회적 구성물로 보는 등 상대주의적 관점을 취하고 있다.

(1) 급진적 구성주의

① 본 글라저스펠드(von Glasersfeld)는 지식은 개별 주체가 특정한 환경에 적응하기 위해 구성하는 것이므로 그러한 지식에 객관성을 부여할 수 없다고 주장한다.

② 지식은 인식하는 주체에 의하여 능동적으로 구성되며(자주적 구성의 원리), 인식의 기능은 적응적이며 생장성을 지향하고(생장 지향성의 원리), 인식은 주체가 경험 세계를 조직하는데 도움을 주는 것이지 결코 객관적인 존재론적 실재를 발견하는 것이 아니다(비객관성의 원리).

③ 급진적 구성주의는 수학적 지식을 상호 주관적이며 상대적인 것으로 이해해야 한다고 보았다. 그러나 급진적 구성주의자들이 피아제의 이론을 자주 언급하기는 하지만 수학적으로 '구성'이 무엇인가에 대한 설명은 명확히 제시하지 않고 있다. 급진적 구성주의에 의하면 수학이 언어로 정확히 전달될 수 있다는 것은 헛된 바람이며 학생 개개인은 서로 다른 각자의 주관적 지식을 구성한다고 지적한다.

(2) 사회적 구성주의

① 사회적 구성주의는 급진적 구성주의의 '지식의 자주적 구성의 원리'와 '지식의 생장 지향성의 원리'는 수용하되, 급진적 구성주의가 주장했던 '지식의 비객관성의 원리'를 사회적 상호 작용의 메커니즘에 근거하여 '지식의 사회적 구성'으로 수정하고 보완하는데 주안점을 두었다.

② 카브(P. Cobb)는 급진적 구성주의에서의 '독립 주관적인 의미에서의 객관성'의 의미를 '공통 주관적인 의미에서의 객관성 개념'으로 변경하며 '합의성'을 제안하였고, 어니스트(P. Ernest)는 급진적 구성주의에서의 '언어의 비공유성의 강조' 대신에 '언어

의 사회적 공유성'을 주장하며 '사회성'을 강조하였다.

③ 사회적 구성주의는 수학을 사회적인 구성으로 고려하며, 수학의 객관성의 근거를 사회적인 언어 관습에 있다고 주장한다.

㉠ 수학은 사회적 구성물로서, 절대화된 수학적 지식은 없으며 지식은 오류 가능하다.

㉡ 수학은 사회적 환경에 따라 상대적이므로 다른 수학이 구성될 수 있다.

㉢ 수학은 가치 독립적이지 않으며 다른 지식과 문화, 이데올로기 등과 관련된다.

㉣ 객관성은 사회적 합의 가능성을 의미한다.

㉤ 개인의 주관적인 수학적 지식은 공표를 통해 사회에 알려지고 라카토스의 발견술을 거쳐서 객관적인 수학적 지식이 된다. 이러한 객관적 지식은 다시 개인에게 주관적 지식으로 내면화된다.

㉥ 수학이 사회적 구성물이라는 사실은 수학이 언어에 기초하며 언어가 사회적 산물이라는 점에 의해 뒷받침된다.

④ 주관적 지식으로부터 객관적 지식으로의 이행 과정에 관심을 두고 있는데, 여기서 사회적 상호 작용이 지식 형성 또는 구성 과정의 핵심이다.

⑤ 논리적인 수학적 증명의 뿌리는 변증법, 인간의 대화 그리고 의사소통에 있다. 따라서 수학의 교수와 학습에서도 대화와 변증법 즉, 언어가 필수적인 역할을 한다.

⑥ 어니스트(P. Ernest)는 사회적 구성주의의 적절한 수학 교수 원리로 학습자의 의미와 사전 지식을 존중하기, 아동의 방법들을 기초로 지식의 중재를 통해 교육하기, 수학과 응용의 분리불가능성 그리고 동기와 적절성의 중요성 등을 제시한다.

3.4. 수리철학의 교육적 시사점

수학교사가 수학에 대하여 어떠한 입장을 견지하는가에 따라 취급되는 수학의 내용은 물론 지도 방법 면에서도 차이를 가져올 수 있다.

1) 플라톤주의

① 플라톤에게 수학은 철인(哲人)이 될 사람에게 가르치되 변증법 이전에 지도되어야 하는 교과이다.[6] 따라서, 플라톤 철학에서의 수학교육은 근본적으로 엘리트 교육과 형식도

6)

기초교육	수학교육	변증술교육	실무교육
20세	30세	35세	50세

야적 목적을 지향하며, 이러한 점에서 '만인을 위한 수학'이라는 요즘의 추세에 부합되지는 않는다고 할 수 있다. 또 수학적 대상은 인간과는 무관하게 객관적으로 존재한다고 간주하기 때문에, 자칫하면 수학의 연역적 구조를 수동적으로 암기하는 학습이 되기 쉬운 점을 경계해야 한다.

② 그러나 플라톤에게서 앎이란 배워서 암기하는 것이 아니라 회상하는 것이며, 회상은 탐구를 통하여 스스로 발견해 내도록 하는 것이다. 이러한 회상을 위해 플라톤이 제시한 교수 방법이 곧 대화법으로, 플라톤의 철학은 최근에 강조되고 있는 발견학습은 물론 문제해결에서의 발문 방법에 대한 시사점을 제공해 준다고 할 수 있다.

2) 논리주의

① 논리주의가 수학교육에 미친 대표적인 예는 유클리드 기하학의 지도와 1960년대의 새 수학 운동(New Math Movement)이라고 할 수 있다. 전통적으로 유클리드 기하의 지도는 학생들에게 논리적으로 사고하는 것을 가르치는 것으로 정당화되었으며, '공리, 보조정리, 정의'의 목록에서 시작하는 연역주의자적 양식을 고착화시켰다. 이런 양식은 엄밀하고 우아한 수학의 모습을 보여주지만, '수학적 개념이 왜, 어떤 이유로 도입되었으며, 왜 그렇게 사고하여야 하는가'라는 물음에 대해서는 아무런 답을 주지 못하는 경향이 있다.

② 논리주의자들이 수학적 개념을 논리적 개념으로 환원하려는 시도 중의 하나가 집합을 이용하여 수를 정의하는 것인데, 이는 새 수학 운동에서 일대일 대응을 이용한 자연수의 정의나, 교환법칙·결합법칙·배분법칙 등의 연산법칙의 지도 및 집합론에 기초를 둔 내용 전개 등으로 나타났다. 집합과 산술 법칙을 명확하게 취급하는 것은 수학의 기초 연구에서는 도움이 되지만, 수학의 추상성과 상징성을 너무 일찍 도입하는 것은 학교수학에서, 특히 초등학교 수준에서 무리가 된다는 점에서 문제로 지적될 수 있다.

3) 직관주의

① 직관주의자들이 고전 수학의 상당 부분을 포기하는 잘못을 범하고 주관적 직관이 어떻게 객관성을 갖게 되는지에 대해 적절하게 설명하지 못하였지만, 직관과 활동을 바탕으로 정신적으로 구성하는 것이 수학을 한다는 것이며 수학적 실재를 구성한다는 측면은 바람직한 학습방법으로 받아들여지고 있다.

② 게다가 '무엇인지 알 수도 없고 계산할 수도 없는 특정한 성질을 가진 수의 존재를 안다

는 것이 무슨 소용이 있는가?, 존재하지 않을 때에는 모순이 발생한다는 것을 보임으로써 존재가 확립되어진 수 또는 함수를 믿을 만한가?' 등의 문제를 제기함으로써, 수학적 실재에 대한 의미를 강조하였으며, 이러한 접근 방법 역시 교육적으로 시사하는 바가 크다고 하겠다.

③ 프로이덴탈(H. Freudenthal)은 전통적인 플라톤적인 관념(수학은 절대적으로 확실한 객관적으로 존재하는 완전한 지식 체계이며 상기, 곧 발견을 통해 알게 됨)을 수용하지 않고, 직관주의 수리철학적 입장(수학은 기본적인 직관을 바탕으로 일련의 정신적 활동에 의해 구성되어 감)을 기초로 하여 수학화 학습-지도론을 완성하였다.

4) 형식주의

① 형식주의적 관점에 따를 때, 수학은 규칙을 따르면서 기호들을 가지고 하는 게임이며 수학의 교수 · 학습은 단순 암기 등에 의존하는 기계적인 방법이 될 가능성이 높다.

② 하나의 주제가 기계적인 방법으로 가르쳐질 때, 그것은 의미를 갖지 못하며, 이해되거나 정당화되지 않은 채 맹목적으로 규칙을 따르게 될 때, 그 학습은 형식적인 방법이 되기 쉽다.

③ 또한 기호나 개념의 도입도 모순이 없으면 의미와 별 상관없이 도입될 수도 있다.

5) 준-경험주의

① 준-경험주의, 오류주의에 따른 수학교육은 추측하고 비판하는 과정을 통해 발견 능력을 신장하고, 특별한 지식의 의미 있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하게 하는 것이 주요 목적이다.

② 학생들에게 발견을 경험하게 하고 비판적 사고를 신장시킬 수 있는 방법론으로 '변증법적 대화법'을 제시하고 있다. 소크라테스의 대화법과 라카토스의 대화의 논리는 그 인식론적 입장의 차이에도 불구하고 추측이 이루어지고 그 추측에 대한 반박과 발견 과정이 이어지는 교육적인 측면을 갖는다.

③ 학생들은 문제의 잠정적인 해로 소박한 추측을 얻은 다음 그것을 증명하게 되는데, 학생의 수준에 따라 교사가 사고 실험 과정을 제시해주거나 학생이 증명을 할 때 추측과 증명의 각 단계에 대한 적절한 반례를 준비해 두었다가 필요할 때에 제시할 수 있어야 한다.

④ 라카토스식의 검사와 논의 과정을 수업시간에 활용할 때 주의할 점은 다음과 같다.

㉠ 수학이 오류 가능하다는 라카토스의 관념을 교실에서 학생들에게 직접적으로 전달하는

것은, 수학에 대해 충분히 알지 못하는 학생들에게 오히려 혼란을 가중시킬 위험이 있다.

ⓛ 라카토스의 비형식적 반증자와 수학의 오류가능성의 관념을, 교육과정에서 '형식적' 수학을 제거해야 하며 형식적 증명을 배제해야 한다는 식으로 해석하는 것은 바람직하지 않다. 형식적 증명은 정당화를 위한 유용한 수단이며 지속적인 관심의 대상이 되어야 한다. 따라서 준-경험주의 수리철학의 입장을 수학교육에 전적으로 반영하기보다는, 현재의 증명 교육에서 결여된 부분을 보완한다는 의미에서 적용 가능한 것만을 완화시켜 도입할 필요가 있다.

6) 급진적 구성주의

① 급진적 구성주의에 따르면, 각각의 주체는 그들 자신의 방식으로 그들 자신을 둘러싼 환경에 적응하기 위해 그들 자신의 경험을 조직한다. 각 사람의 경험 세계는 그 사람에게 고유한 것으로 그 본질은 다른 사람이 접근할 수 없다.

② 그러므로 각 개인이 구성한 지식은 필연적으로 고유하며 상황 의존적일 수밖에 없다. 따라서 지식의 주관적 측면을 강조하고, 학생 개개인이 고유한 방식으로 그들 자신의 지식을 구성하도록 하는 교육이 필요하다.

③ 급진적 구성주의에 따른 교육에서는 창조성과 개성, 다양성을 중시하는 것이 기본 사항이다. 따라서 교사에게서 제시되는 정확한 답이나 유일한 사고 방법을 찾는 것보다, 학생 스스로 사고를 전개하는 것이 무엇보다 중요하다.

7) 사회적 구성주의

① 개인의 주관적 지식이 공표되어 사회 속에서 공적인 비평과 재형성 과정을 거쳐 객관적인 지식으로 되는 것이 수학적 지식이라 보는 사회적 구성주의는 학생들의 발표와 토론이 중시되는 사회적 상호 작용 수업을 지지해야 하며 소집단 협력 학습이 그 한 가지 유형으로 볼 수 있다.

② 수학은 사회적 환경에 따라 상대적이므로 문화에 따라 대안적인 수학이 구성될 수 있도록 기회를 제공해야 하며 다른 지식, 문화, 집단 이데올로기 등과 관련될 수 있도록 안내해야 한다.

③ 주관적인 수학적 지식이 객관적인 수학적 지식이 되기 위해서는 사회적 과정이 필요하다. 여기서 사회적 상호 작용이 지식 형성 또는 구성 과정의 핵심이다. 즉, 공표된 수학은 다른 사람들에 의해 비판과 조사의 대상이 되는데, 라카토스의 증명과 반박의 논리

에 따라 재형식화 되고 객관적인 수학적 지식으로 받아들여진다. 라카토스가 오일러 다면체 정리를 소재로 하여 보여준 증명과 반박에 의한 수학적 지식의 역사적인 성장 과정은 사회적 구성주의에서 말하는 지식 구성의 한 과정으로 해석된다.

4. 수학교육의 발달 및 전 세계적인 동향(NCTM 포함)

〈수학교육의 변천 과정〉

Euclid 시대	생활중심 수학 (존 듀이의 진보주의)	New Math (새수학)	Back to Basics (기초로의 회귀)	Problem Solving (문제해결)	The Standards
~ 19세기	1900년~1950년대	1957~1970(60년대)	1970년대	1980년대	1990년대 이후

[참고] 우리나라 각 교육과정과 그에 영향을 미친 외국의 수학교육 동향

외국의 수학교육 동향		우리나라 교육과정
진보주의	⇨	교수요목기 제1차 교육과정기 제2차 교육과정기
새수학	⇨	제3차 교육과정기
Back to Basic	⇨	제4차 교육과정기
Problem Solving	⇨	제5차 교육과정기 제6차 교육과정기
(1989, 2000) Standards 시대	⇨	제7차 교육과정 이후

기원전부터 19세기 말까지를 일반적으로 'Euclid 시대'라고 한다. 즉, 13권의 유클리드 원본을 어떻게 잘 익히느냐가 수학교육의 중심과제였다. 18세기 말 산업혁명이 일어나면서 수학교육의 실용화가 요구되고 교육을 받을 계층이 확대되었으며, 과학문명의 발달로 인하여 수학교육의 혁명이 불가피하게 되었다. 이에 발을 맞추어 수학교육계에서는 당시의 시대적 상황과 사회적 요구에 부합하는 수학교육의 필요성을 인식하고 수학교육을 개선하려는 움직임이 일어났으며, 20세기 초의 이러한 움직임을 '수학교육 근대화 운동'이라고 한다.

4.1. 수학교육 개혁 운동(=수학교육 근대화 운동): 20세기 초

1) 수학교육 근대화 운동의 발생

① 18세기 후반, 산업 혁명으로 인해 노동자를 위한 과학 기술 교육이 필요(실용적 측면)해

지면서 서서히 수학교육의 변화를 인식하다, 결국 20세기 초 그동안 유클리드 기하학 중심으로 한 정신 도야적 교재에서 벗어나 일상생활이나 과학적 연구의 활용에서 수학교육의 필요성이 증가되었다.

㉠ '논증'을 강조하는 방향에서 '실험, 실측, 실용'을 강조하는 방향으로 이동

㉡ 산술, 대수, 기하 등의 전통적인 교과 구분 폐지

② 영국의 페리, 미국의 무어, 독일의 클라인 등이 주축이 되어 수학의 실용성을 강조하면서 수학 학습에서 실험, 실측, 측량 등의 활동이 중심이 되어야 한다고 주장하였다.

㉠ 페리(J. Perry, 영국)의 운동(1901년)

- 소수 특권층 대상의 유클리드 원론에 의한 두뇌 도야 위주의 수학교육에서 벗어나서 일상의 생활 의무를 위한 일반인을 위해 수학교육이 수행되어야 한다는 주장이 제기되었다.
- 1901년 '수학의 교육(The Teaching of Mathematics)'이라는 제목의 강연에서 번영된 국가를 건설하기 위해 발명 정신과 창조 능력을 양성할 수 있는 교육이 가장 우선적으로 이루어져야 한다고 강조하였다.
- 수학교육 개혁에 대한 입장을 요약하면 다음과 같다.
  - · 수학의 실용성과 유용성, 특히 자연과학과 연결되는 측면을 강조
  - · 유클리드 기하에서 탈피하여 실험 기하 강조
  - · 모눈종이를 활용하고 입체 기하의 내용을 더 많이 지도
  - · 실험상의 측량을 중요시 함
  - · 대수 공식을 이용하는 지식과 능력 강조

㉡ 클라인(F. Klein, 독일)의 운동(1904년)

- 19세기 말에 산업혁명의 시기가 도래하면서 과학이 장려되고 교육 문제가 활발하게 연구되면서 수학이 중요한 교과로 부각되었다. 그리고 산업 및 과학이 비약적으로 발전하는 시대의 사회생활에 필요한 응용수학을 학교교육에서 더 많이 다루어야 한다는 주장이 설득력을 얻으면서, 수학교육을 개선하려는 보다 적극적인 시도가 이루어졌다.
- 클라인은 수학교육에서 가장 강조해야 할 것으로 함수 개념의 함양과 공간 관찰력의 함양을 주장하고 유클리드 원론보다 학생들의 심리에 적절한 초보적인 기하학을 지도할 것을 주장하였다.
- 수학교육 개혁에 대한 입장을 요약하면 다음과 같다.
  - · 수학의 추상적인 측면과 실용적인 측면 사이의 균형 유지
  - · 수학적 사고와 자연과학적 사고의 결합 강조
  - · 미적분과 해석기하를 조기에 도입하되, 그 기초적인 내용을 자연 현상과 관련지어 지도

· 실제적인 내용을 중요시하고 기능(skill) 위주의 내용 경험

· 연역적 사고와 귀납적 사고가 균형을 이루도록 지도

· 자연 현상과 사회 현상을 수학적으로 관찰하는 능력 발달 강조

· 1905년경 현장 교사들을 모아 김나지움(Gymnasium, 문화고등학교)의 수학교육 요목을 작성하여 메란 교육과정을 제창하고 1908년 메란 교육과정에 따른 교과서를 출판하면서 함수 개념을 처음 교과서에 도입하였다.

㉢ 무어(E. H. Moore, 미국)의 운동(1902년)

– 19세기 말, 신흥 국가인 미국에서는 실리실익을 수반하는 교육이 중시되면서 사회적 상황과 일관되게 학교수학에서 상업계산, 실용기하, 항해술, 측량술, 삼각법 등을 주로 다루었다.

– 무어는 1902년 '수학의 기초에 관하여(On the Foundation of Mathematics)'라는 강연에서 수학교육에서 가장 우선적으로 해야 할 일로 수학을 구체적인 사실과 직접 관련지을 수 있도록 학생의 관찰, 실험, 추리의 힘을 육성하는 것이라 주장하였다.

– 수학교육 개혁에 대한 입장을 요약하면 다음과 같다.

· 학교에서 지도되는 수학의 내용과 방법의 풍부함 강조

· 도형 그리기, 종이 접기, 모형 제작 등을 통해 직관 기하의 조작적 학습의 경험 제공

· 기하 지도에서 직관 기하, 비형식적 추론, 형식적 추론을 병행

· 대수와 기하와 물리는 서로 긴밀한 관계가 있으므로 중등학교에서 이 과목들을 하나의 과정으로 지도할 것을 강조

· 무어는 수학교육 개혁을 수행하기 위한 수학 교수 · 학습법으로 실험실법을 주장하였다. 무어의 이 방법을 통해 우수한 수학 교사를 양성하고, 대학을 졸업한 후 학교 현장에서 실험실법을 활용하여 수학을 지도하는 데 도움이 되어야 한다고 주장하였다.

③ 듀이 역시 경험주의 교육 이론에서 활동적인 학습을 강조하였고, 프로이델탈, 페스탈로치, 가테뇨, 슈타이너, 퀴즈네르 등도 활동 중심 학습의 중요성과 필요성을 강조하였다.

④ 풍부한 수학적 활동의 경험은 문제해결을 보다 용이하게 하고, 고차원적인 수학적 개념도 학습이 가능하게 한다. 수학적 활동에 관한 조직적인 연구와 그 적용 예는 영국의 수학교육단체인 Nuffield Mathematics Project(1967), 미국의 수학교육 연구단체인 SMSG(The School Mathematics Study Group, 1958~1975), 미국의 수학 교사 협의회인 NCTM(The National Council of Teachers of Mathematics)의 교육과정에서 찾아볼 수 있다. 이들의 중요한 공통된 주장은 "수학을 한다"는 것으로 다음과 같다.

I do, and I understand
The best way to learn mathematics is to do mathematics.
Knowing mathematics is doing mathematics.

⑤ 수학교육 근대화 운동은 전반적으로 수학교육의 중요성을 크게 부각시켰으며, 학교 수학의 내용을 충실하게 하기 위한 체계적인 노력을 시작하였고, 수학의 실용적 측면과 학생들의 심리적 측면에 대한 고려를 중요시하였다.

2) 수학교육 근대화 운동의 한계

① 수학교육 근대화 운동이 진행됨에 따라 논리적 원칙을 깊이 고려하지 않았고, 극단적으로는 논리를 불신하는 경향마저 나타났으며 현실적으로는 물리량과 공간의 구조를 정식화하고 교재화하는 이론적, 실천적 연구가 전개되지 못하였다.
② 페리, 클라인, 무어를 중심으로 영국, 독일, 미국 등에서 시작된 수학교육 근대화 운동은 여러 나라 사이의 협력을 통한 개혁을 추구하는 방향으로 전개되었으나 그 무렵 발발한 제1차 세계대전(1914~1918)으로 인해 별다른 성과를 거두지 못한 채로 그 열기가 수그러들었으며, 제2차 세계대전(1939~1945)이 끝나기까지 수학교육을 개선하려는 노력은 큰 진전을 보이지 못하였다.

4.2. 수학교육 현대화 운동(=새수학): 1960년대

1) 수학교육 현대화 운동의 발생 이유

1957년 10월, 사상 처음으로 구소련에서 스프트니크 인공위성 1호 발사가 성공하였고(직접적인 동기) 이에 자극을 받은 미국과 유럽을 중심으로 세계적인 수학교육 현대화 운동(새수학, The New Math Movement)이 진행되기 시작하였다.

① 제2차 세계대전 이후 수학 자체가 급격하게 성장, 발달하였다.
㉠ 제2차 세계대전 이후 과학기술의 급격한 진보에 따른 여러 변화에 대응하기 위한 교육 특히 과학 · 수학 교육의 개혁의 필요성이 요구되었다.
㉡ 20세기에 들어 수학은 이전 세기까지 발전된 양을 능가하였으며, 그 분야도 100개에

근접할 정도로 세분화되었고, 고도의 추상화, 집합론의 도입, 대수적 구조의 강조를 그 특징으로 하는 ‘현대 수학’이 발전하였다.

② 기존 수학교육에 대한 반성이 있었다.

㉠ 대학에서 연구되는 전문 수학은 ‘현대 수학’을 중심으로 발전을 거듭한 반면, 학교에서는 계속적으로 고전적인 수학 내용을 중심으로 지도하고 있기에, ‘현대 수학’의 정신을 학교수학에 도입하고자 하였다.

㉡ 1930년대부터 현대수학을 학교수학에 반영하려는 움직임이 있어왔다.

(예) 1955년 대학입시위원회(CEEB)가 대학 진학을 희망하는 중학교 3년에서 고등학교 3년까지의 학생이 이수해야 할 현대화된 수학교과과정의 편성을 시작

③ 수학의 응용 범위가 확대됨에 따라 현대 수학의 강력한 응용성에 대처할 필요성이 대두되었다. 즉, 과학기술의 발전은 경제와 산업의 발전을 가져왔고, 결국 수학의 응용 범위와 사회적 유용성은 더욱 확대되었으며, 수학이 자연과학 분야는 물론 인문과학, 사회과학 등 모든 과학의 기초학문으로서 그 면모가 바뀌면서 사회적 유용성에 대처해 나가기 위해서 현대화되어야 했다.

④ 과학기술의 발달에 따라 사회적 구조가 변함으로써 전문 기술 인력이 절대적으로 필요하였다. 즉, 유능한 전문 기술 인력을 양성하기 위하여 수학교육이 상당히 기여해야 한다는 사회적 요청이 있었다.

2) 수학교육 현대화 운동의 강조 방향[7)]

미국[8)]을 중심으로 현대수학을 학교수학에 반영하자는 수학교육 개혁이 일어나면서 수학교육 현대화 운동이 시작되었고 SMSG (School Mathematics Study Group, 미국 학교수학 연구회)는 유치원에서부터 고등학교에 이르는 실험교과서[9)]를 편찬하였다.	유럽에서는 브루바키 학파의 듀돈네(Dieudonné)를 중심으로 수학교육 현대화 운동이 진행되었다. ┌ 현대 수학을 과감히 도입한다. ├ 논리적 엄밀성을 보장한다. ├ 현대수학에의 접근을 위하여 전통적인 교재를 정 │ 비한다. └ 대수적 구조와 현대적 방법을 중시한다.

7) 우리나라의 경우 1973년부터 시행된 제3차 교육과정이 수학교육 현대화 운동의 영향을 받은 것이다.

8) 미국의 20세기 초는 복잡해져 가는 산업 사회가 학생들에게 특별히 요구하는 교과 내용들을 교과과정 전반에 반영하기 위해 노력하였던 시기이다. 이 시기에 학교는 국가적인 요구에 부응하여 각자의 역할 수행에 적합하도록 학생들을 한 사람의 사회인으로서 육성하는 기관으로 탈바꿈하였다. 20세기 중반은 현대화의 시기로, 주 정부나 사회단체의 정치적인 요구에 따라 부과된 책임을 수행하게 되고, 20세기 후반에는 ‘The Back-to-Basics Movement’나 ‘문제해결’ 등과 같은 슬로건을 내세우면서 단순화된 상징적 목표를 지향하게 된다. 그리고 20세기 말에는 앞선 시기의 교육과정에 대한 반성이 일어, 슬로건을 지양하고 교육과정과 평가에 관한 국가적인 표준을 설정하려는 노력을 보이게 된다.

① 현대수학의 내용과 방법을 조기에 과감히 도입하였다. 즉, 집합, 함수, 확률, 대수적 개념 등과 이와 관련된 용어, 기호 등을 과거에 비해 일찍 도입하였으며 특히 현대수학의 기본 토대라고 할 수 있는 집합 개념을 초 · 중등학교 수학에서 강조하였다.

② 대수적 구조를 강조하였다. 즉, 다양한 수학적 개념을 개별적으로 다루던 종래의 방식을 지양하고 군 · 환 · 체 등의 현대수학의 개념을 활용하여 수학적 개념을 추상적이고 통합적으로 다루었다.

③ 논리적 엄밀성을 강조하였다. 초 · 중등학교 수학에서 논리적 엄밀성을 보장하는 공리론적 방법을 직접 도입할 수는 없지만, 학생들의 발달 단계에 적절한 수준에서 가능한 논리적 엄밀성을 확보하려 했으며, 개념을 애매모호하게 규정하는 종래의 방식에서 벗어나 가급적 엄밀하게 규정하였다.

④ 현대수학에의 접근을 위하여 전통적인 교재를 정리하였다. 즉 새로 도입되는 내용이 많음에 따라 불필요한 내용(예를 들어 유클리드 기하)이 과감히 삭제되었다.

⑤ 수학교육과 교육학, 심리학의 연구 성과를 토대로 새로운 지도법을 도입하였다.

(예) 브루너(J.S. Bruner): 어떤 교과든지 지적으로 올바른 형식으로 표현만 하면 어떤 발달 단계에 있는 어떤 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다(현대화 추진의 이론적 원동력).

3) 수학교육 현대화 운동의 한계

① G. Polya와 M. Kline 등의 유명 수학자들로부터 비판을 받게 되었다(1962).

㉠ 수학자가 수학적 방법을 희생한 채 수학의 내용만을 중시하고 있다.

㉡ 장래 수학자가 되기 위한 소수의 학생만을 대상으로 하고 있다.

㉢ 학생들이 정신적으로 충분히 성숙하지 않았음에도 불구하고, 형식화를 서두르고 있으며, 추상화의 도입을 도모하고 있다.

㉣ 논리적 엄밀성과 연역적 추론이 지나치게 강조되고 있다.

㉤ 타 교과와의 관련을 무시하고 있다.

㉥ 교사들이 학생들을 가르칠 준비가 충분히 되어 있지 못하다.

---

9) 실험교과서의 특징
┌ 집합개념 도입
├ algebraic structure에 역점
├ 엄밀한 axiomatic system 설정
├ 전체 교재의 통일성
├ 교재를 나선적으로 배열
└ 발견적 교수법 채택(학생의 창조력 개발)

㉦ 현대화 운동은 아래로부터의 자발적인 개혁이 아니라 과학기술 및 수학의 발달에 따른 사회, 문화적 상황에 의해 요청된 위로부터의 개혁 운동이다.

㉧ 현대화 운동은 교육학자와 심리학자보다는 수학자 위주의 개혁이었으므로 수학교육적으로는 약점이 있다.

㉨ 교사를 위한 재교육이나 충분한 지원이 없다.

㉩ 현대화 교재와 전통적 교재와의 조화를 도모하는 연구가 충분치 못하다.

② 클라인(Morris Kline, 1973): "Why Johnny Can't Add?" 〈The Failure of the New Math〉

㉠ 왜 '2+3=3+2 , 9+2=11인가?'를 이해 못하나?

㉡ 정의와 엄밀한 공리적 취급을 강조

㉢ 학생들은 혼란에 빠지고 이로 인해 오히려 기초 계산능력마저 저하, 엄청난 경제적 낭비 초래, 전통적인 교육과정의 결점에 대한 근본적인 치료에 실패

4.3. 기초(기본)로 돌아가는 운동(The Back-to-Basics Movement) : 1970년대

1) 수학교육 현대화 운동에 대한 평가

① NACOM(National Advisory Committee on Math. Edu.)

㉠ "1970년대 미국의 수학 상태는 현대화 때문에 도입된 어려운 문제들을 풀기 위하여 학생들이 괴로움을 당하고 있다. 최초로 '스푸트닉' 발사 성공 때문에 대소동이 일어난 후부터는 수학적, 과학적 및 기술적인 학문이 특히 중시되었지만, 오늘의 세론(世論)은 이들 학문에 그와 같은 특권은 부여하려 하지 않는다. 젊은 사람들의 흥미는 타교과에 쏠리고 있고, 따라서 수학의 대중화라든가 또는 재정적 지지는 받지 못하고 있다."

㉡ "수학이 왜 모든 학생에게 다 필요한 것일까?"

㉢ "모든 학생에게 어떤 수학이 필요할까?"

(cf) 〈㉠, ㉡, ㉢〉와 같은 문제가 이 시대의 미국에서 진지하게 검토되고 있었다.

㉣ 사실상 개발도상국과 같이 수학교육이 초등학교에서 끝이 나고 만다든가 또는 중학교 교육과정에서 대부분 끝이 나버리는 국가에서 직관과 경험을 중심으로 한 수학적 지식 이외에 대학교육이나 전문가를 위하여 필요한 엄밀한 이론 위주의 지식체계를 강요할 필요성이 있겠는가?

② 1971~1973년에 걸쳐서 R. Thom, H. Freudenthal, M. Kline 등이 수학교육 현대화 운동의 실패를 주장하였다.[10)]

③ 현대화 과정에서 나타난 'Bourbaki적 방향'이 시정되어야 한다고 주장하고 있다.

2) 기본으로 돌아가기 운동 전개

① "아동에게 자기 활동으로서 참다운 수학을 하도록 하려면 어떻게 해야 좋은가?"로 인식이 전환되었다.

② Morris Kline은 다음과 같이 수학교육은 개선되어야 한다고 주장하였다.

㉠ 구조중심 교육, 학문중심 교육에서 창조성을 개발할 수 있는 인간중심 교육으로 바뀌어야 한다.

㉡ 과거의 수학적인 문화를 이해하고 새로운 수학적인 문화를 창조하여야 한다.

㉢ 기초, 기본이 되는 내용을 정선하여 가르치는 '기초로 돌아가는 운동'을 실시하여야 한다.

㉣ "하나(기초, 기본)를 배우고 열(응용력)을 알자."

③ 기초로 돌아가기 운동 방향

㉠ 행동적 목표를 강조하였다.

㉡ 필산과 함께 소비자 수학을 강조하였다.

3) 기본으로 돌아가기 운동의 한계

① 우수한 학생들의 학력은 저하되었다.

② 응용력과 문제해결력이 감소되었다.

4.4. 문제해결 시대(Problem Solving): 1980년대

① 1976년 8월 서독의 Karlsruhe에서 개최된 제3회 ICME에서 1980년대의 수학교육에 대한 새로운 방향이 나타났다. 이 대회에는 76개국에서 2000명에 가까운 수학교육에 관

---

10) ㉠ 집합론적 사고방식의 맹목적 존중을 탈피하자
㉡ 비생산적인 추상화를 탈피하자
㉢ 쓸데없이 어렵기만 한 기호나 술어를 많이 사용한 수학적 언어를 탈피하자
㉣ 공리적 방법의 맹목적 신앙을 탈피하자
㉤ 엄밀성의 맹목적 신앙을 탈피하자
㉥ 수학적 idea의 원천이라고도 할 수 있는 물리적 실재의 무시와 기하학의 원천이라 볼 수 있는 물리적 공간의 무시를 탈피하자
㉦ 형식적 대수의 algorithm적 사고를 탈피하자

심을 가진 학자들이 참가하여 수학교육의 앞으로의 방향과 그 방법에 관하여 연구발표와 진지한 토의가 거듭된 결과 “수학교육의 새로운 동향(New trends in Mathematics teaching)”이라는 종합보고서가 출판되었다(1979). ICME에서는 다음을 수학교육의 목표(중학교 단계)로 정하였다.

㉠ 학습의 대상이 그것이 발달하기 위하여 특히 적절하다고 생각되는 과학의 초보적인 내용과 학생들이 접촉할 수 있도록 함으로써, 지적인 활동을 용이하게 도와주자.

㉡ 현대사회에 활동적이며 지성적으로 참가하기 위하여 필요불가결한 지식이나 기능 및 개념적인 도구와 그것을 활용할 수 있는 능력을 배양시키도록 하자.

㉢ 학습을 계속하는 학생에 대해서는, 한편으로는 수학적인 준비를 위한 기회를 부여하며, 동시에 또 한편으로는 수학을 학습할 수 있는 능력을 확고히 부여하자.

⇒ 요컨대, 현대화에서 강조되는 “Bourbaki식 방향”에서 탈피하여 학문위주보다는 보다 현실을 직시하는 인본위주의 교육이 강조되었다고 볼 수 있다.

② NCTM은 1980년대 수학교육의 방향[11]을 8가지로 주장하였다.

㉠ 앞으로의 수학교육의 초점은 “문제해결(Problem solving)”에 두어야 한다.

㉡ 현대화 과정에서 소홀히 다루어진 기초기능(basic skill)이 중시되는 동시에 그 개념이 보다 광범위한 뜻으로 해석되어야 한다.

㉢ 교과 내용 중에서는 calculater와 computer의 활용이 중요시되어야 하며, 기타 시청각 교재의 적절한 활용과 그 활용 방법의 연구가 필요하다.

③ 1980년대의 학교수학은 문제해결을 중심으로 이루어져야 한다고 강조하였으며 이때 제안된 수학교육에서의 문제해결의 강조는 오늘날까지도 광범위한 지지를 받고 있다.

4.5. 규준 시대(Standards): 1990년대 이후

미국수학교사협의회(NCTM, National Council of Teachers of Mathematics)는 현재까지 5개의 규준집(Standards)을 소개했다. 1989년 「학교수학을 위한 교육과정과 평가규준(Curriculum and evaluation standards for school mathematics)」, 1991년 「수학교수를 위한 전문 규준(Professional standards for teaching mathematics)」, 1995년 「학교수학을 위한 평가규준(Assessment standards for school mathematic s)」, 2000년 「학교수학을 위한 원리와 규준(Principles and standards for school

11) 총 8가지: ① 문제해결의 강조 ② 계산 기능보다 폭넓은 기본 기능의 강조 ③ 컴퓨터와 계산기를 이용한 수학교육 ④ 효과와 효율을 동시에 고려하는 엄격한 기준 설정 ⑤ 다양하고 폭넓은 평가 방법의 적용 ⑥ 학생의 선택권이 다양한 유연한 교육과정의 구성 ⑦ 수학 교사의 전문성 제고 ⑧ 수학교육을 위한 공공 지원의 확대

mathematics)」 그리고 2007년 「오늘날 수학 지도(Mathematic teaching today: Improving practice, improving student learning)」이다. 이 중에서 우리나라 수학교육에 지대하게 영향을 미친 1989년 규준집과 2000년 규준집의 내용은 다음과 같다

1) 1989년 규준집(Standard 1989)[12)]

학생들이 수학적 활동을 소중히 여기고, 수학적 사고 습관을 기르고, 인간 생활에서 수학의 역할을 이해하고 그 가치를 인식할 수 있는데 도움을 주는, 다양한 경험의 기회가 학생들에게 주어져야 한다.

① 유치원부터 고등학교(12학년)까지를 3과정으로 나누어 각각의 과정에 필요한 규준을 정하여 아래 표와 같이 제시하였다. 이 규준을 통하여 각 주(states)마다 교과서가 다르더라도 내용적인 면과 학년의 필수요소적인 면을 따르도록 권하고 있다.

② 현대사회는 학교가, 모든 학생들이 수학적으로 소양을 갖출 기회를 가지며, 그들의 학습을 확장시킬 수 있으며, 균등한 학습 기회를 가지며, 기술공학적인 사회에서 제기되는 제반 문제들을 이해할 수 있는 정보를 잘 갖춘 시민이 될 수 있도록 보장할 것을 기대한다.

③ K-12학년 규준들은 모든 학생들을 위한 다섯 가지 일반적 목표를 달성하도록 명료화하고 있다.

㉠ 학생들은 수학의 가치를 이해할 수 있어야 한다.
㉡ 수학을 행하는 자신의 능력에 대해 확신을 가져야 한다.
㉢ 수학 문제의 해결자가 되어야 한다.
㉣ 수학적으로 의사소통하는 것을 배워야 한다.
㉤ 수학적으로 추론하는 것을 배워야 한다.

12) 1990년대 수학교육의 핵심 방향은 ① NCTM의 규준집(Standards) ② 구성주의 ③ 메타인지에 대한 관심 ④ 컴퓨터와 계산기의 도입이었다.

유치원에서 초등학교 4학년 (K-4)까지의 교육과정 규준	5학년에서 8학년(5-8)까지의 교육과정 규준	9학년에서 12학년(9-12)까지의 교육과정 규준
규준 1: 문제해결로서의 수학 규준 2: 의사소통으로서의 수학 규준 3: 추론으로서의 수학 규준 4: 수학적 연결성 규준 5: 어림 규준 6: 수감각과 수개념 규준 7: 범자연수의 연산에 대한 개념 규준 8: 자연수와 연산 규준 9: 기하와 공간감각 규준 10: 측정 규준 11: 확률과 통계 규준 12: 분수와 소수 규준 13: 규칙성과 관계	규준 1: 문제해결로서의 수학 규준 2: 의사소통으로서의 수학 규준 3: 추론으로서의 수학 규준 4: 수학적 연결성 규준 5: 수와 수관계 규준 6: 수체계와 수론 규준 7: 계산과 어림 규준 8: 규칙성과 함수 규준 9: 대수 규준 10: 통계 규준 11: 확률 규준 12: 기하 규준 13: 측정	규준 1: 문제해결로서의 수학 규준 2: 의사소통으로서의 수학 규준 3: 추론으로서의 수학 규준 4: 수학적 연결성 규준 5: 대수 규준 6: 함수 규준 7: 종합적 관점에서의 기하학 규준 8: 대수적 관점에서의 기하학 규준 9: 삼각법 규준 10: 통계 규준 11: 확률 규준 12: 이산수학 규준 13: 미적분의 개념적 토대 규준 14: 수학적 구조

④ 공통규준

[규준 1] 문제해결에서의 교육목표

· 수학적 내용을 탐구하기 위해서 문제해결 방법을 사용할 수 있다.
· 일상생활과 수학적 장면으로부터 문제를 제기할 수 있다.
· 광범위한 문제를 해결할 수 있는 전략을 개발할 수 있다.
· 결과를 원래의 문제에 비추어 해석할 수 있다.
· 수학을 의미 있게 사용하는 데 대한 자신감을 갖고 있다.

[규준 2] 의사소통에서의 교육목표

· 수학적 아이디어에 구체물, 그림, 도표 등을 관련지을 수 있다.
· 수학적 아이디어와 상황에 대한 그들의 생각을 반성하고 입증할 수 있다.
· 일상생활 언어와 수학적 언어 및 기호를 관련지을 수 있다.
· 수학을 표현하고 토론하며, 읽고 쓰고 듣는 것이 수학을 배우고 사용하는 중요한 부분임을 깨닫는다.

[규준 3] 추론 능력에서의 교육목표

· 수학에 관한 논리적 결론을 유도할 수 있다.
· 그들의 생각을 설명하기 위해 모델, 알려진 사실, 성질, 관계를 사용할 수 있다.

· 답과 답을 얻는 과정을 입증할 수 있다.
· 수학적 상황을 분석하기 위해 패턴과 관계를 사용할 수 있다.
· 수학이란 의미 있는 것이라는 것을 확신한다.

[규준 4] 수학적 연결성에서의 교육목표
· 개념적 지식과 절차적 지식을 관련지을 수 있다.
· 개념이나 절차의 다양한 표현을 서로 관련지을 수 있다.
· 수학 내에서 다른 주제들 사이의 관계를 인식할 수 있다.
· 매일의 일상생활에서 수학을 사용할 수 있다.

2) 2000년 규준집(Standard 2000)

① 2000년 4월 NCTM 연례학회에서 공식적으로 발표된 학교수학의 원리와 규준 「Standard 2000(Principles and Standards for School Mathematics)」은 이전 Standard의 정신을 계승하면서 수정 · 보완한 개정판이다.

② NCTM은 2000년에 사회가 학교 수학에 요구하는 3가지 소양을 다음과 같이 나누어 규정하였다.

㉠ 수학적 소양(literacy): 수학적이고 과학 기술적인 것이 지속적으로 일상생활의 중요한 부분이 되고 있다. 우리 학생들은 합리적인 결정을 위해 양적인 이해를 자주 필요로 하는 세계에 살게 될 것이며, 따라서 수학적 소양이 필요하게 된다.

㉡ 문화적 소양: 수학은 인류의 거대한 문화적, 지적 유산이므로 우리 시민들은 그러한 유산을 계속해서 향유하고 이해해 가야 한다.

㉢ 직업을 위한 수학: 지적인 시민의 삶을 영위하는 데 요구되는 수학의 수준이 극적으로 향상되고 있는 것과 같이, 직업에서 요구되는 수학적 사고와 문제해결의 수준 또한 향상되고 있다.

③ 여기에는 유치원부터 고등학교 3학년에 이르기까지 지켜져야 할 학교 수학의 6가지 원리와 학교 수학의 내용에 관한 10가지 규준이 제시되어 있다.

· 수학의 6가지 원리(Principles for School Mathematics)
┌ 평등의 원리(The Equity Principle)
├ 교육과정의 원리(The Curriculum Principle)
├ 지도의 원리(The Teaching Principle)
├ 학습의 원리(The Learning Principle)

├ 평가의 원리(The Assessment Principle)
└ 테크놀로지의 원리(The Technology Principle)

· 학교 수학의 내용에 관한 10가지 규준

과정 규준(Process Standards)	내용 규준(Content Standards)
문제해결 추론과 증명 의사소통 연결성 표현	수와 연산 대수 기하 측정 자료분석과 확률
내용 지식을 배우고 사용하는 방법들을 강조한다.	학생들이 배워야하는 내용을 명백하게 설명한다.

④ 학교수학을 위한 원리(Principles for School Mathematics): 이것은 학생과 사회에 큰 영향을 끼치는 교육적 결정에 관한 지침을 제시한 것이다.

㉠ 평등의 원리(The Equity Principle): 모든 학생은 개인의 특성, 배경, 육체적 여건에 관계없이 수학을 잘 배울 기회와 충분한 지원을 받아야 한다. 우수아는 수준 높은 교육과정에 의해 수월성 있는 학습을 할 수 있어야 하고, 부진아는 방과 후 프로그램이나 개인 교수 등의 지원을 받을 수 있어야 한다. 재능이 많고 적음에 따라 그에 걸맞은 교육과정과 프로그램으로 강력한 지원을 받아야만 한다.

㉡ 교육과정의 원리(The Curriculum Principle): 잘 조직된 교육과정은 전 학년에 걸쳐 통일성을 유지해야 하며, 수학의 중요한 영역에 초점이 맞추어져 있어야 하고, 분명히 기술되어 있어야 한다. 학생들은 같은 내용을 반복하면서 시간을 보내지 않아야 하고, 교사는 학생들이 무엇을 배웠고, 무엇을 배울 것인가를 알고 있어야 한다.

㉢ 지도의 원리(The Teaching Principle): 효과적인 지도는 학생이 알고 있는 것이 무엇이고, 배워야 할 것이 무엇이며, 무엇에 도전해야 하고, 어떤 지원을 해야 할 것인가를 이해하고 있을 때 이루어진다. 교사는 교육과정에 적합한 소재와 교재를 선택하고, 교수 도구와 기술 공학 등을 적절히 사용하며, 자기 개선을 연속적으로 추구해야 한다.

㉣ 학습의 원리(The Learning Principle): 학생들은 자신의 경험과 선수 지식을 바탕으로 새로운 지식을 능동적으로 구축하고 이해하면서 수학을 배워야 한다. 적절히 선택된 과제에 도전할 때 어려운 문제에 대해서도 자신감을 갖게 되고, 스스로 알아내려는 의욕을 갖게 되며, 수학적 아이디어의 탐구에서 유연해지고 인내하게 된다.

㉤ 평가의 원리(The Assessment Principle): 평가는 학습을 지원하고 교사나 학생에

게 유용한 정보를 제공해야 한다. 교사는 끊임없이 질문이나 상담, 과제물 검토, 그리고 그 밖의 여러 방법으로 학생들에 관한 정보를 수집하고 교재를 검토하여 어려운 개념은 다시 가르치고, 어려움을 겪는 학생은 도와주고, 좀더 다채로운 수학적 경험을 요구하는 학생에게는 또 다른 내용을 제공하는 등 적절한 결정을 내려야 한다.

ⓑ 테크놀로지의 원리(The Technology Principle): 테크놀로지는 교수와 학습에서 필수적인 요소로 수업에 영향을 미치고 학습의 효과를 높인다. 계산기와 컴퓨터는 수학적 환경을 재구성한다. 학교 수학은 이런 변화를 반영하여야 한다. 공학을 이용하여 추측하고 실험하고 일반화와 추상화를 추구하는 등 높은 수준의 수학을 학습할 수 있게 해야 한다.

⑤ 유치원부터 12학년까지 수학교육을 위한 규준

· 4개의 분리된 학년 band 기준 ㉠ 유치원부터 2학년 ㉡ 3학년부터 5학년 ㉢ 6학년부터 8학년 ㉣ 9학년부터 12학년

[규준 1] number and operations(수와 연산)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 될 수 있도록 수와 연산 감각의 발달을 촉진시켜야 한다. · 수, 수의 표현 방법, 수 사이의 관계, 수체계를 이해한다. · 연산의 뜻과 연산들의 관계를 이해한다. · 계산을 자유롭게 하고, 합리적인 추정을 한다.

[규준 2] algebra(대수)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 패턴, 함수, 기호, 모델에 대한 관심을 보여야 한다. · 규칙성, 관계, 함수를 이해한다. · 대수적 기호를 사용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석한다. · 수량적인 관계를 표현하고 이해하는 데 수학적 모델을 사용한다. · 다양한 문맥 속에서 변화를 분석한다.

[규준 3] geometry(기하)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 기하와 공간 감각에 대한 관심을 포함시켜야 한다.
· 2차 · 3차 기하 도형의 특성과 성질을 분석하고, 기하 관계에 관한 수학적 논의를 발전시킨다.
· 좌표 기하와 또 다른 표현 체계를 써서 위치를 찾고 공간 관계를 서술한다.
· 수학적 상황을 분석하기 위하여 변환을 적용하고 대칭을 이용한다.
· 문제해결을 위해 시각화, 공간적 추측, 기하 모델 등을 이용한다.

[규준 4] measurement(측정)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 측정에 대한 관심을 기울여야 한다.
· 사물의 잴 수 있는 속성과 단위 체계, 측정 과정을 이해한다.
· 측정값을 결정하는 적절한 기법, 도구, 공식을 적용한다.

[규준 5] data analysis and probability(자료분석과 확률)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 자료 분석, 통계, 확률에 관심을 기울여야 한다.
· 자료를 바탕으로 문제를 구성하고, 이러한 문제를 해결하기 위해 관련된 자료를 수집하고 조직하고, 표현해본다.
· 자료를 분석하는 적절한 통계적 방법을 선택하고 사용한다.
· 자료에 근거를 둔 추정과 예상을 발전시키고 평가한다.
· 확률의 기본 개념을 이해하고 적용한다.

[규준 6] problem solving(문제해결)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 수학을 이해하는 부분으로 문제를 해결하는 것에 초점을 맞추어야 한다.
· 문제해결을 통하여 새로운 수학적 지식을 세운다.
· 다양한 문맥에서 나타나는 문제를 푼다.
· 문제를 풀기 위해 적절한 전략을 선택하고 적용한다.
· 수학적 문제해결의 과정을 주시하고 반성한다.

[규준 7] reasoning and proof (추론과 증명)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 수학을 이해하는 부분으로 추론하고 증명을 구성하는 것을 학습하는 것을 강조해야 한다.

· 추론과 증명을 수학의 기본적인 측면으로 인식한다.
· 수학적으로 예측하고 탐구한다.
· 수학적 논증과 증명을 발전시키고 평가한다.
· 여러 종류의 추론과 증명의 방법을 선택하고 이용한다.

[규준 8] communications(의사소통)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 수학의 이해를 촉진시키도록 의사소통을 사용해야 한다.

· 의사 소통을 통하여 수학적 사고를 조직하고 강화한다.
· 수학적 사고를 동료나 교사나 타인과 조리 있고 분명하게 의사 소통한다.
· 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하고 평가한다.
· 수학적 아이디어를 분명히 표현하기 위해 수학적 언어를 사용한다.

[규준 9] connections(연결성)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 수학의 이해를 촉진시키는데 연결성을 강조해야 한다.

· 수학적 아이디어 사이의 연계성을 인식하고 이용한다.
· 수학적 아이디어들이 어떻게 결합하여 전체를 구성하는지를 이해한다.
· 수학 이외의 문맥에서 수학을 인식하고 적용한다.

[규준 10] representation (표현)

수학 교수 프로그램은 모든 학생들이 다음과 같이 되도록 수학의 이해를 촉진시키는데 수학적 표현을 강조해야 한다.

· 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 의사소통할 표현을 창조하고 사용한다.
· 문제해결을 위하여 수학적 표현들 중에서 선택하고, 적용하고, 변환한다.
· 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델화하고 해석하기 위하여 적절한 수학적 표현을 사용한다.

[참고] 1989년와 2000년의 규준집 비교표

<table>
<tr><td colspan="4">1989년도</td><td colspan="4">2000년도</td></tr>
<tr><td colspan="3">교육과정</td><td>평가</td><td colspan="4">교육과정 및 평가</td></tr>
<tr><td>k-4</td><td>5-8</td><td>9-12</td><td>k-12</td><td>preK-2</td><td>3-5</td><td>6-8</td><td>9-12</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">〈학교수학의 원리〉
· 평등의 원리
· 교육과정의 원리
· 교수의 원리
· 학습의 원리
· 평가의 원리
· 테크놀로지의 원리</td></tr>
<tr><td colspan="3">문제해결로서의 수학
의사소통으로서의 수학
추론으로서의 수학
수학적 연결성</td><td rowspan="3">일관성
정보의 다양한
출처
적절한 평가 방법
사용
수학적 힘
문제해결
의사소통
추론
수학적 개념
수학적 절차
수학적 성향
프로그램 평가의
지표
교육과정과 수업
자원
수업 평가팀</td><td colspan="4" rowspan="3">수와 연산
대수
기하
측정
자료 분석과 확률
문제해결
추론과 증명
의사소통
연계성
표현</td></tr>
<tr><td>어림
수 감각과 수 개념
범자연수의 연산
개념
범자연수의 계산
기하와 공간감각
측정
확률과 통계
분수와 소수
규칙성과 관계</td><td>수와 수 관계
수 체계와 수론
계산과 어림
규칙성과 함수
대수
통계
확률
기하
측정</td><td>대수
함수
종합적 기하학
대수적 기하학
삼각법
통계
확률
이산수학
미적분의 개념적
토대</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>수학적 구조</td></tr>
</table>

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 수학의 특성 중 이상성이란?

: 수학은 사고의 대상이 되는 사물이나 현상을 그 겉모양이 아닌 최적의 사고가 가능하도록 본질적인 요소만을 고려하여 새로이 바람직한 형태로 단순화시킨 대상을 다루는 학문이다.

2. 절대주의와 상대주의를 간략히 설명하고 하위 수리철학을 나열하면?

: 절대주의에서는 수학적 지식에 절대적으로 안전한 기초가 존재한다고 보며, 플라톤주의, 논리주의, 직관주의, 형식주의가 해당된다. 상대주의에서는 수학적 지식에 절대적으로 안전한 기초는 존재하지 않으며 존재한다 하더라도 어떤 것이 기초인지 판단할 수 없다고 보며, 준-경험주의와 사회적 구성주의가 해당된다.

3. 플라톤주의란?

㉠ 수학적 대상은 인간의 의식과 독립적으로 실존하며 창조되지도 변하지도 소멸되지도 않는 실체이다. 우리가 삼각형의 내각의 합을 이야기할 때, 종이나 칠판에 삼각형을 그리기는 하지만, 종이에 그린 불완전한 삼각형에 대해서 이야기하는 것이 아니라 우리 마음속에서 상상할 수 있는 완전한 유클리드 삼각형에 대해서 말하는 것이다.

㉡ 교사는 산파와 같다. 즉, 교사가 해야 할 일은 학생들에게 지식을 주입시키는 일이 아니라 학생이 자신 안에 배태하고 있는 사고를 낳도록 하는 일이 된다. 산파로서의 교사가 할 일은 학생들로 하여금 생각하도록 돕는 일이다. 학습자가 사고하게 하기 위해서는 학습자가 학습할 내용에 대하여 당혹감 또는 경이를 느끼게 해야 한다(부정적 수업 활용). 산파로서의 교사가 되기 위해서는 가르칠 내용이 어떤 상식적 견해에 대비되는 학문적 견해인지를 알고 있어야 한다. 또한 가르칠 내용에 담겨 있는 질문이 무엇인가를 잘 알아야 한다.

4. 플라토니즘에 따른 교육법은?

: 플라톤에게 앎이란 배워서 암기하는 것이 아니라 회상하는 것이며, 회상은 탐구를 통하여 스스로 발견해 내도록 하는 것이다. 이러한 회상을 위해 플라톤이 제시한 교수 방법은 대화법이다. 즉, 교사는 학생 스스로가 지식을 상기 또는 탐구할 수 있도록 적절한 발문을 제공하여야 한다.

5. 직관주의에 따른 교수법은?

: 프로이덴탈은 직관주의 수리철학적 입장(수학은 기본적인 직관을 바탕으로 일련의 정신적 활동에 의해 구성되어 감)을 수학화 학습-지도론의 기초로 삼았다. 따라서 학생이 현상을 본질로 조직해내는 조직화 활동을(=수학화를) 할 수 있도록 해야 한다.

6. 준-경험주의에 따른 수학교육의 목적은?

: 수학교육은 추측하고 비판하는 과정을 통해 발견 능력을 신장하고, 특별한 지식의 의미 있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하게 하는 것이 주요 목적이다.

7. 준-경험주의에 따른 교수법은?

: 학생들에게 발견을 경험하게 하고 비판적 사고를 신장시킬 수 있는 방법론으로 '변증법적 대화법'을 제시해야 한다.

8. 준-경험주의에 따른 수업에서 교사의 자세는?

: 학생들은 문제의 잠정적인 해로 소박한 추측을 얻은 다음 그것을 증명하게 되는데, 학생의 수준에 따라 교사가 사고 실험 과정을 제시해주거나 학생이 증명을 할 때 추측과 증명의 각 단계에 대한 적절한 반례를 준비해 두었다가 필요할 때에 제시할 수 있어야 한다.

9. 급진적 구성주의에 따른 교수법은?

: 창조성과 개성, 다양성을 중시하는 것이 기본 사항이다. 따라서 교사에게서 제시되는 정확한 답이나 유일한 사고 방법을 찾는 것보다, 학생 스스로 사고를 전개하는 것이 무엇보다 중요하다.

10. 사회적 구성주의에 따른 교수법은?

: 개인의 주관적 지식이 공표되어 사회 속에서 공적인 비평과 재형성 과정을 거쳐 객관적인 지식으로 되는 것이 수학적 지식이라 보는 사회적 구성주의는 학생들의 발표와 토론이 중시되는 사회적 상호 작용 수업을 지지해야 하며 소집단 협력 학습이 그 한 가지 유형이다.

11. 급진적 구성주의와 조작적 구성주의의 공통점과 차이점은?

: 피아제의 조작적 구성주의와 급진적 구성주의 모두 수학을 인식하는 주체에 의하여 능동적으로 구성되며 적응적이고 생장성을 지향하는 구성물로 보는 공통점이 있다. 그러나

피아제의 조작적 구성주의에 따라 구성된 결과물은 객관적인 존재론적 실재이지만 급진적 구성주의에서 수학은 인식은 주체가 경험 세계를 조직하는데 도움을 주는 것이지 결코 객관적인 존재론적 실재는 아니다.

12. 유클리드적인 교육의 문제점은?

㉠ 수학이 실제적으로 활용되고 필요시 되는 부분과 관련된 내용은 전혀 다루지 않고 단지 공리, 공준, 참인 명제로부터 새로운 명제가 참임을 이끄는 공리론적 방식으로만 수학이 전개되어 있어 수학의 유용성과 실용성을 학생들이 경험하고 이해할 수 없었다.

㉡ 학생들의 수준과 준비도와 관련 없이 엄밀하고 형식적인 논리적 전개 과정만을 일방적으로 강요함으로써 학생들은 수학의 전개되는 전체적인 내용과 그 핵심적인 관련성을 쉽게 이해하지 못하였다.

㉢ 유클리드 원론에서 활용되는 연역적인 전개 과정에는 개념이 발생하고 정리를 발견하는 과정이 생략되어 있어 학생들의 탐구 정신이나 발견 정신을 개발하는 것이 불가능하였다.

13. 수학교육 근대화 운동이 일어나게 된 이유는?

: 소수의 특권층을 대상으로 한 유클리드 원론에 의한 두뇌의 도야를 위주로 한 수학교육에서 벗어나서 일상의 생활 의무를 위한 일반인을 위해 수학교육이 수행되어야 한다는 주장이 제기되었다.

[참고]

– 페리

· 발명 정신과 창조 능력을 양성할 수 있는 수학교육 강조
· 수학의 실용성과 유용성, 특히 자연과학과 연결되는 측면을 강조
· 유클리드 기하에서 탈피하여 실험 기하 강조
· 모눈종이를 활용하여 입체 기하의 내용을 더 많이 지도
· 실험상의 측량을 중요시
· 대수 공식을 이용하는 지식과 능력 기르기

– 클라인

· 수학교육에서 가장 강조해야 할 것은 함수 개념의 함양과 공간 관찰력의 함양임을 주장 그리고 학생들의 심리에 적절한 초보적인 기하학을 지도할 것을 강조
· 수학의 추상적인 측면과 실용적인 측면 사이에 균형을 유지
· 수학적 사고와 자연과학적 사고의 결합 강조

· 미적분과 해석기하를 조기에 도입하되, 그 기초적인 내용을 자연 현상과 관련지어 지도
· 실제적인 내용을 중요시하고 기능(skill) 위주의 내용은 경감함
· 연역적 사고와 귀납적 사고가 균형을 이루도록 지도
· 자연 현상과 사회 현상을 수학적으로 관찰하는 능력 발달
(cf) 1908년 메란 교육과정에 따른 교과서에서 함수 개념이 처음으로 도입됨

– 무어(당시의 초등학교 산술교육은 형식도야적인 과도한 훈련을 중시하고 있었음. 1895년 듀이와 맥레란은 산술교육에서 실측의 중요성을 강조하였으며 아동심리학자들은 구체적인 경험적 사실로부터 산술 학습을 시작해야 한다고 주장함)
· 수학을 구체적인 사실과 직접 관련지을 수 있도록 학생의 관찰, 실험, 추리의 힘 육성 주장
· 학교에서 지도되는 수학의 내용과 방법이 보다 풍부해져야 함
· 도형 그리기, 종이 접기, 모형 제작 등을 통해 직관 기하의 조작적 학습의 경험을 제공
· 기하 지도는 직관 기하, 비형식적 추론, 형식적 추론을 병행하여 지도
· 대수와 기하와 물리는 서로 긴밀한 관계가 있으므로 중등학교에서는 이 과목들을 하나의 과정으로 지도하는 것이 바람직함

14. 수학교육근대화운동에서 강조한 방향은?
: 영국의 페리, 미국의 무어, 독일의 클라인 등이 주축이 된 수학교육근대화운동은 수학의 실용성을 강조하면서 수학 학습에서 실험, 실측, 측량 등의 활동이 중심이 되어야 한다고 주장하였다.

15. 전 세계적으로 수학교육에서 문제해결력 신장을 강조한 시기는?
: 전 세계적으로는 1980년대부터 수학교육에서 문제해결력 신장을 강조하기 시작했다.

16. 2000 Standard가 구분한 과정규준이란?
: 문제해결, 추론과 증명, 의사소통, 연결성 그리고 표현이다.

17. 의사소통 규준 한 가지와 표현 규준 한 가지는?
㉠ 의사소통 규준
· 의사소통을 통하여 수학적 사고를 조직하고 강화한다.
· 수학적 사고를 동료나 교사나 타인과 조리 있고 분명하게 의사소통한다.
· 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하고 평가한다.

· 수학적 아이디어를 분명히 표현하기 위해 수학적 언어를 사용한다.

ⓛ 표현 규준

· 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 의사소통 할 표현을 창조하고 사용한다.

· 문제해결을 위하여 수학적 표현들 중에서 선택하고, 적용하고, 변환한다.

· 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델화하고 해석하기 위하여 적절한 수학적 표현을 사용한다.

02

수학과 교육과정

우리나라의 교육법에 따르면 초 · 중등학교 교육과정은 교육부가 제정하여 문서로 고시한 '교육과정'에 따라 편성 · 운영 하도록 되어 있다. 따라서 '교육과정'을 검토하는 일은 우리나라 수학과 교육과정을 파악하고 더 넓게는 수학교육의 전체적인 흐름을 파악하는 데 있어 기초가 되는 작업이 된다. 우리나라는 8 · 15 광복이후 열한 차례에 걸쳐 교육과정 문서가 고시되었다.

기별	공포(고시)	근거	특징
교수 요목	1947. 9. 1.	중학교 교수요목	◦ 광복 전 일본 체제의 교육과정 ◦ 실용에 치중되었으며, 지도 내용이 어렵고 과다함 ◦ 가르칠 주제를 열거하는 교수요목의 형태 ◦ 해방 전의 교육내용의 답습
제1차	1954. 4. 20.	문교부령 제35호	◦ 교과 중심 교육과정 ◦ 생활 중심 수학교육 ◦ 수학 용어의 한글화
	1955. 8. 1.	문교부령 제45호 중학교 교육과정	
제2차	1963. 2. 15.	문교부령 제120호 중학교 교육과정	◦ 경험 중심 교육과정 ◦ 수학의 계통성 중시 ◦ 수학교육 현대화 운동 일부 반영
제3차	1973. 8. 31.	문교부령 제325호 중학교 교육과정	◦ 학문 중심 교육과정 ◦ 수학교육 현대화 운동의 정신 반영 ◦ 수학 내용의 조기 도입 ◦ 수학의 구조와 엄밀성 강조
제4차	1981. 12. 31.	문교부 고시 제442호 중학교 교육과정	◦ 수학교육 현대화 운동의 반성 ◦ '기본으로 돌아가기' 정신의 반영 ◦ 학습 부담 경감을 위한 학습내용 축소 ◦ 문제해결 학습의 중요성 인식
제5차	1987. 3. 31.	문교부 고시 제87-7호 중학교 교육과정	◦ 학습 부담 경감을 위한 학습내용 축소 ◦ 문제해결력의 강조
제6차	1992. 9. 30.	교육부 고시 제1992-11호 중학교 교육과정	◦ 학습 부담 경감을 위한 학습내용 축소 ◦ 정보화 사회 대비 ◦ 문제해결력의 강조 ◦ 다양한 평가 방법 권장

第7차	1997. 12. 30.	교육부 고시 제1997-15호 [별책8] 수학과 교육과정	◦ 학습자 중심 교육과정 ◦ 수준별 교육과정(단계형과 과목 선택형) ◦ 학습 부담 경감을 위한 학습내용 축소 ◦ '수학적 힘' 의 신장 도모
2007 개정	2007. 2. 29.	교육인적자원부 고시 제2006-75호 [별책8] 수학과 교육과정	◦ 현실 적합한 수준별 수업 방안 제시 ◦ 교육 내용의 적정화 ◦ 수학적 사고력 및 의사소통 능력 신장 강조 ◦ 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조
2009 개정	2009. 12(총론) 2011. 8(교과)	교육과학기술부 고시 제2011-361호 [별책8] 수학과 교육과정	◦ 창의성을 강조하는 교육과정 ◦ 학습 부담 경감을 위한 학습내용 축소 ◦ 초등학교와 중학교에 학년군제 도입 ◦ 고등학교에 기본, 일반, 심화 과목 도입
2015 개정	2015. 9	교과부 고시 제2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정	◦ 창의적 역량을 갖춘 융합 인재를 강조하는 교육과정 ◦'문제해결', '추론', '창의 · 융합', '의사소통', '정보 처리', '태도 및 실천' 6가지 수학 교과 역량 ◦ 학습 부담 경감 실현

1. 교수요목의 시기부터 제6차 교육과정까지[13][14]

1.1. 교수요목의 시기

교수요목의 시기는 미군정청 편수국에서 1947년 9월 1일자로 '중학교 교수요목'을 시달한 때부터 1954년 4월 20일자로 문교부령 제35호인 '국민학교 · 중학교 · 고등학교 · 사범학교 교육과정 시간 배당 기준령'을 공포한 때까지의 시기를 말한다.

① 우리나라는 1945년 8월 15일에 35년간의 일본의 강점에서 벗어났지만, 이때부터 1948

13) 2007년 개정 중학교 수학과 교육과정 해설서를 참고하여 표 완성을 시작하였다.

14) 우리나라 교육과정은 7차 교육과정 이후 '국민공통' 과정과 '선택' 과정으로 나뉘는 체제로 큰 틀이 바뀌었다. 따라서 7차 교육과정 전 · 후로 구분하여 정리할 수 있다.

년 8월 15일까지는 미군이 설치한 군정청이 우리나라의 모든 국정을 통치하였다. 미군정청은 군정 법령을 통하여 일본의 군국주의적 사상, 식민지적 사상과 형태를 불식시키고 광복을 맞은 한국을 민주화 시키고자 하였다. 미군정청은 1945년 9월 17일 일반 명령 제4호를 통해, 9월 24일을 기하여 모든 공립 초등학교가 수업을 시작하도록 하였다. 한편, 사립 초등학교는 개교 전에 당국의 허가를 받도록 하고, 각 도에 통첩을 보내 중등학교 이상의 학교도 수업을 시작하도록 하였다.

② '일반 명령 제4호'에 따라 군정청 학무국에서는 '신 조선의 조선인을 위한 교육 방침'을 시달하였는데, 그 중에서 교과목 등 교육 내용에 관련된 것은 '교수 용어를 한국어로 할 것과 조선의 이익에 반하는 교과목은 일체 교수함을 금하는' 포괄적인 지시였다. 이어 평화와 질서를 당면한 교육목표로 하고, 일본 제국주의적 색채를 모두 제거하도록 하는 교육의 일반 방침을 시달하는 한편, 초 · 중등학교 교과목 및 주당 교수 시수표를 시달하였다. 교과서 문제는 각 학교로 하여금 적당히 처리하도록 하되, 산수나 이과와 같은 교과목 외에는 일본 교과서의 사용을 금하였다.

③ 그러나 이것은 교육에 대한 응급조치일 뿐이므로, 이후 미군정청 편수국[15)]에서는 교육과정의 성격을 지니는 '교수요목'을 제정하여 당해 9월 1일부터 시행하였다. 이 때 제정한 교수요목의 특징은 다음 세 가지로 요약될 수 있다.

· 교과의 지도 내용을 상세히 표시하고, 기초 능력을 배양하는데 주력한다.
· 교과는 분과주의를 채택하고, 체계적인 지도와 지력의 배양에 중점을 둔다.
· 우리나라의 교육목표인 홍익인간의 정신에 입각하여 애국애족의 교육을 강조하고, 일제의 잔재를 정신이나 생활에서 시급히 제거한다.

④ 그러나 이 '교수요목'은 당시 충분한 시간적 여유 없이 다소 성급하게 제정되었기 때문에 가르칠 주제를 열거하는 수준을 벗어나기 어려웠고, 특히 내용과 수준이 학생들의 지적 능력에 비추어 너무 높다는 평을 받았다.

⑤ 교수요목은 중간에 부분적으로 수정되기는 하였으나, 미군정 시대를 거쳐 1954년 '국민학교 · 중학교 · 고등학교 · 사범학교 교육과정 시간 배당 기준령'과 1955년 제1차 교육과정이 공포될 때까지 약 10년간 적용되었다. 그러나 이 시기에는 중등학교의 학제가 빈번하게 변경되었고, 학교 교육이 그 궤도를 찾지 못한 채 일제강점기 때의 교육을 답습하였다.

⑥ 또한 현재와 같은 교육과정의 체제를 갖추지 못하였으며 교수요목의 내용을 분석해 보면 내용 수준이 매우 높으며, 수학적인 체계성과 계통성이 제대로 확립되어 있지 않은 특징을 보이고 있다.

---

15) 미군정청 산하 기관 중 오늘날의 교육부에 해당하는 조직 명칭은 '학무국'이었다. 그러나 1946년 3월 29일 군정 법령 제64호에 따라서 '학무국'은 '문교부'로, '학무국' 산하에 있던 '편수과'는 '편수국'으로 개칭되었다(함수곤, 2000).

1.2. 제1차 수학과 교육과정

제1차 교육과정의 시기는 1954년 4월 20일에 문교부령 제35호인 ‘국민학교 · 중학교 · 고등학교 · 사범학교 교육과정 시간 배당 기준령’이 공포된 때부터 1963년 2월 15일 문교부령 제120호인 ‘중학교 교과과정’이 공포된 때까지의 교육과정 시기로서, 법령상의 명칭이 ‘교과과정’이었기 때문에 이 시기를 ‘교과과정의 시기’ 또는 ‘교과중심 교육과정의 시기’라고도 한다(문교부, 1980).

① 미군정 하에서 제정된 교수요목은 임시방편적인 성격을 지녔기 때문에, 1948년 8월 15일에 대한민국 정부가 수립되고, 1948년 12월 31일자로 교육법이 공포됨에 따라 교육과정을 새롭게 제정하고자 하는 요구가 높아졌다. 그 결과 “대학, 사범 대학, 각종 학교를 제외한 각 학교의 학과, 교과는 문교부령으로 정한다.”로 되어 있는 교육법에 따라 문교부는 곧바로 교육과정 제정에 착수하였다.

② 6 · 25 전쟁이 발발하여 그 계획이 잠시 중단되었지만, 정부가 부산에 옮겨져 있던 1953년에 다시 제정 작업을 계속하여, 1954년 4월 20일 문교부령 제35호로 각 급 학교 ‘교육과정 시간 배당 기준령’이 공포되었다. 이 시간 배당 기준령이 공포되자, 이에 대한 후속 작업으로 교육과정 제정을 서둘러 이듬해인 1955년 8월 1일자로 각 급 학교 교과과정을 공포하였다.

③ 이 ‘교육과정 시간 배당 기준표’와 ‘교과과정’은 우리 손으로 만든 최초의 체계적인 교육과정이며, 법령상 명칭이 ‘교과과정’이었다. 이 교과과정을 제1차 교육과정이라 한다.

④ 수학과 교육과정 개정의 기본 방향은 “교수요목의 시기의 문제점을 개선하며, 학생들이 필요로 하는 욕구와 사회의 요구를 참작하고, 심리적인 배열과 체계적인 면을 적절히 고려하여 수학의 기본적인 개념이나 원리를 알게 하고, 사고 능력의 양성, 기초적인 과정과 상호 관계, 문제해결과 응용 능력, 기능의 숙달 등에 대하여 그 내용을 결정하고 지도 방법을 개선함으로써, 결과적으로 교육 목적을 달성하는 데 좋은 효과를 올려야 한다.”(교육부, 1999)는 것이었다.

⑤ 또, 제1차 교육과정은 미국의 진보주의 교육, 특히 듀이(Dewey)의 실용주의 사상에 영향을 받아 실생활에서의 실용성이 매우 강조되었다. 따라서 사회적, 경제적, 문화적 생활과 관련된 상황과 문제를 수학적으로 해결하려는, 이른바 생활 경험을 강조하는 방향으로 교육과정을 구성하였으며, 이런 의미에서 이 시기의 교육과정을 ‘생활 단원 학습기’라고도 한다. 예를 들어, 고등학교의 ‘경제와 금융’이라는 단원에는 ‘저축과 보험’,

'세금' 등의 내용이 포함되어 있는데, 이를 통해 제1차 교육과정에서는 수학과 일상생활의 관련성이 중시되었음을 알 수 있다. 그러나 수학을 일상생활과 무리하게 관련시킴으로써 수학적 체계가 무시되고 수학 내용의 수준이 낮아진 경향이 있었다.

⑥ '나란히꼴(평행사변형)', '나란히금(평행)', '맞모금(대각선)', '맞선꼴(대칭형)', '돌림체(회전체', '펼친그림(전개도)', '모기둥(각기둥)' 등 수학 용어를 가능하면 한글화 하려는 시도를 했다. 이 중 '사다리꼴', '마름모' 등과 같은 용어는 이 시기에 학교 수학의 용어로 자리 잡았다.

1.3. 제2차 수학과 교육과정

제2차 교육과정의 시기는 1963년 2월 15일자 문교부령 제120호로 중학교 교육과정이 공포된 때부터 1973년 8월 31일자 문교부령 제325호로 중학교 교육과정이 공포될 때까지를 말한다.

① 제1차 교육과정은 6 · 25 전쟁과 휴전 성립 직후에 제정되어, 당시의 비정상적인 사회 상태와 그에 따른 여러 가지 제약으로 충분한 연구를 통해 내용을 설정하지 못했다. 이에 반해 제2차 교육과정은 시간적 여유를 가지고 만들어진 합리적이고 현대적인 교육과정이며 제1차 교육과정에 비해 체계성을 갖추었다.

② 제1차 교육과정과 관련된 가장 대표적인 지적은 학생의 생활 경험을 중심으로 수학 학습내용을 전개하였기 때문에 학생들이 쉽게 이해할 수 있는 장점이 있었다는 것이다. 그러나 학문으로서 계통성에 충실하기 어렵다는 단점이 있었다. 제2차 교육과정은 이러한 단점을 해소하기 위하여 수학 본연의 계통성을 중시하는 방향으로 선회하였으며, 기초 학력 배양에 힘쓰도록 하였고, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하여 수리적인 사고 방법과 처리기능을 얻도록 하는 데 주안점을 두었다.

③ 이 시기에 선진 외국은 고도 산업 사회로 발전하는 과정에서 높은 수준의 수학과 과학 교육을 필요로 하고 있었다. 예컨대, 미국에서는 수학교육 현대화 운동이 절정에 달하여 현대 수학의 여러 개념이 엄격한 논리와 기호 및 집합을 사용하여 지도되고 있었다. 뿐만 아니라, 컴퓨터를 교실 수업에 활용하는 CAI에 대한 연구도 활발하였다.

④ 이와 같은 국내외적 교육 상황을 반영하기 위한 교육과정 개정 작업이 1961년부터 시작되어 1963년 2월 15일 문교부령 제120호로 새 교육과정이 공포되었다. 이 교육과정의 개정의 기본 방향 중에서 중요한 내용은 다음과 같다(교육부, 1999).

· 수학의 체계를 근간으로 계통적인 내용을 학생의 심신 발달의 단계에 맞고 다음 교과와 병행할 수 있도록 학년별로 안배하여, 생활문제 해결에 실천적으로 활용할 수 있도록 한다.
· 과학, 기술의 급진적인 발달에 따라 지도 내용을 충실히 하고 정비하여 논증적인 사고능력과 수리적인 처리기능을 기르도록 한다.

⑤ 제2차 교육과정은 수학의 체계와 지도 내용 수준의 향상, 논증적 사고의 강화 등의 특성을 보이고 있으며, 한편으로는 수학교육 현대화 운동의 영향을 서서히 받기 시작하고 있었다. 전반적으로 수학의 체계를 강조하고 계통 학습을 중시하였으므로 이 시기를 수학과에서는 '계통 학습기'라고 명명하기도 한다(교육부, 1999; 박한식, 1991).

(예) 고등학교 수학으로 [공통수학], 인문계 학생을 위한 [수학Ⅰ], 자연계 학생을 위한 [수학Ⅱ]의 세 과목을 설정하였다.

⑥ 그러나 제2차 교육과정은 제1차 교육과정에서 강조하던 생활 경험 중심의 경향을 완전히 탈피하지는 못하였고, 수학교육 현대화 운동이라는 그 당시의 세계적인 수학교육의 조류를 반영하지 못하였다는 점에서 한계를 지니는 것으로 보기도 한다.

1.4. 제3차 수학과 교육과정

제3차 교육과정의 시기는 1973년 8월 31일자 문교부령 제325호로 중학교 교육과정이 공포된 때부터 1981년 12월 31일자 문교부 고시 제442호로 중학교 교육과정이 고시될 때까지를 말한다.

① 1950년대 초부터 미국을 비롯한 여러 나라에서 수학교육 현대화 운동이 시작되었고, 이에 따른 '새수학(New Math)'의 영향이 전 세계에 퍼져 나갔다. 이것이 우리나라에 파급된 것은 1960년대 초였지만, 당시에는 새수학의 구체적인 내용을 파악하지 못한 상태였기 때문에 제2차 수학과 교육과정에서는 이를 적극적으로 반영하지 못하였다.

② 1970년을 전후하여 SMSG 교재를 통해 수학교육 현대화 운동의 내용이 우리나라 수학자들에게도 널리 알려지게 되면서, 1973년에 개정된 제3차 교육과정에 '새수학'의 내용이 대폭적으로 반영 되었다.

③ 이 시기의 수학과 교육과정 개정의 기본 방향을 요약하면 다음과 같다.
· 집합 개념을 토대로 한다.
· 수학적 구조에 중점을 둔다.

· 엄밀성을 강조한다.
· 현대 수학의 발전에 비추어 교재를 재구성한다.
· 응용면이 넓은 교재를 조기에 도입한다.

④ 수학교육 현대화 운동은 현대 수학의 조기 도입과 엄밀한 논리, 구조화된 수학지도를 목적으로 하고 있으므로, 이 시기의 교육과정에서는 새로운 내용뿐만 아니라 엄밀한 용어 및 기호를 도입하고 강화하여 그 수준이 매우 높았다. 예를 들면, 해집합, 반직선, 사선, $m(\overline{AB})$, $m(\angle AOB)$, $\overleftrightarrow{AB}$ 등의 새로운 기호와 용어를 도입하였다.

⑤ 중학교 수학 내용은 '집합', '수와 연산', '방정식과 부등식', '함수 관계', '통계', '도형'의 6개 영역으로 구분하여 제시하였다. 그리고 고등학교 수학 과목으로 공통 필수인 [수학Ⅰ]과 자연계 선택 과목인 [수학Ⅱ]를 설정하고, [수학Ⅰ]을 '집합', '대수', '기하', '해석', '통계'의 5개 영역으로 [수학Ⅱ]를 '대수', '기하', '해석'의 3개 영역으로 구분하였다.

⑦ 각 영역에서 지도하여야 할 용어와 기호가 각 영역의 끝 부분에 제시되어 있는데, 제시된 용어와 기호는 매우 구체적이고 엄밀한 것으로서 수학교육 현대화 운동의 영향을 받았음을 보여주고 있다.

⑧ 이 시기의 교육과정은 학생 수준에 비하여 지나치게 수학적 구조와 논리적 엄밀성을 강조하였고, 정확한 용어와 기호의 사용을 강조한 점이 특징이다.

⑨ 지도상의 유의점은 개괄적이고 일반적인 내용으로 4개 항목으로 나누어 진술되어 있는데, 그 중 특징적인 것은 다음과 같다.

· 집합 개념을 모든 영역에 충분히 활용하도록 한다.
· 수량에 관한 내용과 도형에 관한 내용을 통합적으로 지도하여야 한다.

즉, 이 교육과정은 집합의 지도를 매우 강조하고 있음을 알 수 있다. 그리고 도형의 대수적 지도, 즉 좌표를 이용한 도형의 성질 지도도 강조되고 있음을 알 수 있다.

1.5. 제4차 수학과 교육과정

제4차 교육과정의 시기는 1981년 12월 31일자 문교부령 제442호로 중학교 교육과정이 고시된 때부터 1987년 3월 31일자 문교부 고시 제87-7호로 중학교 교육과정이 고시될 때까지를 말한다.

① 수학교육 현대화 운동에 따라 새수학 내용을 적극적으로 반영하였던 제3차 수학과 교육과정은 그 정신이나 철학에서는 많은 호응을 받았지만, 수학 내용을 조기에 도입하거나

지나치게 수학적 엄밀성을 강조하는 경향 그리고 내용 분량이 많고 수준의 정도가 지나치게 높다는 등 시행 초기부터 많은 문제점이 드러났다.

② 우리나라에서 제3차 교육과정을 심의하고 있을 때, 외국에서는 이미 수학교육 현대화에 대한 비판과 반성의 소리가 나타나면서, 1970년대에 '기본으로 돌아가기' 운동이 전개되고 있었다.

③ 따라서 제4차 교육과정은 기본적으로는 새수학의 정신을 유지하되, 수학적 구조와 논리적 엄밀성의 무리한 강조를 지양하고, 일상생활의 여러 가지 현상을 수리적으로 생각하는 경험을 통하여 문제해결력의 계발에 중점을 두었다. 또한 학생들의 지적발달수준에 적절하게 학습내용을 재조직하는 데 초점을 두었다. 이 교육과정의 개정의 기본 방향은 다음과 같다.

· 수학의 기초적인 개념과 기능을 강조한다.
· 수학적 구조나 논리의 엄밀성을 무리하게 강조함을 지양한다.
· 지도 내용의 양을 적정 수준으로 경감한다.
· 학습자의 발달 수준에 맞게 수준을 적정화한다.
· 문제해결력을 강조한다.

④ 제4차 수학과 교육과정에서는 집합 개념을 저학년에서 표면화시키기 않고 용어와 기호도 고학년에서 사용하도록 하였으며, 학년간, 학교급간에 내용이 지나치게 중복되는 나선식 교재 구성을 탈피하고, 단계적 교재를 구성하여 기본 개념을 보다 철저하게 이해시키도록 하였다.

(예) 중학교 '집합'을 '수와 연산' 영역으로 포함시켰고 명제에 관한 내용을 도형 영역으로 이동하였으며, 도형 영역에서는 $m(\overline{AB})$, $m(\angle AOB)$와 같은 기호를 간단히 $\overline{AB}$, $\angle AOB$로 나타내기로 하였다.

⑤ 제4차 수학과 교육과정은 수학의 기본 개념과 기본 기능에 중점을 두고 문제해결력을 신장시키는 수학교육을 지향하였으나, 실제적으로 무엇을 기본 개념과 기능으로 볼 것인가에 대한 분명한 기준이 제시되지 않았다.

⑥ 또 문제해결력을 강조하고 있지만, 문제해결에 대한 사전 연구와 문제해결을 교수 · 학습에 구현시키기 위한 구체적인 방안이 마련되지 못하였기 때문에, 교육과정이 의도하는 것만큼 문제해결의 신장을 위한 수업이 적극적으로 이루어지지 못했다.

⑦ 다만, 이전의 교육과정과 비교해 볼 때, 높은 수준의 내용을 삭제 또는 경감하며 지나치게 엄격한 용어나 기호의 사용을 완화하는 특성을 보이고 있다.

1.6. 제5차 수학과 교육과정

제5차 교육과정의 시기는 1987년 3월 31일자 문교부 고시 제87-7호로 중학교 교육과정이 고시된 때부터 1992년 6월 30일자 교육부 고시 제1992-11호로 중학교 교육과정이 고시될 때까지를 말한다.

① 제3차나 제4차 교육과정이 학문 중심 교육과정이나 '기본으로 돌아가기'와 같이 대내·외적으로 큰 변화의 조류를 반영한 개정이었다면, 제5차 교육과정은 제4차 교육과정의 운영상에 나타난 문제점을 수정·보완하는 데 역점을 두었기 때문에 이전의 교육과정과 비교할 때 변화의 폭은 크지 않았다.

② 미국의 전국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)는 1980년 총회에서 1980년대 학교 수학에 대한 권고사항 여덟 가지를 발표하였다. 그 중 첫째가 문제해결이 학교 수학의 초점이 되어야 한다는 것이었다. 이 영향을 받아 세계 각국에서는 문제해결에 대한 연구가 활성화되었으며, 이것을 수학과 교육과정에 반영하기도 하였다.

③ 제4차 교육과정 당시 초등학교 교과서에서 '여러 가지 문제'라는 단원을 신설하면서 문제해결 지도를 강화하였다. 그러나 중·고등학교 교육과정과 교과서에는 적극적으로 반영하지 못한 결과, 중학교에는 교육과정의 '목표'와 '평가상의 유의점'에 문제해결력의 신장에 대해 일부 언급되었을 뿐 '내용'이나 '지도상의 유의점' 등에는 반영되지 않았다. 그러나 제5차 교육과정에서는 문제해결력의 신장이라는 조류가 수학과 교육과정에 큰 영향을 미치기 시작하였다.

④ 또한 제5차 교육과정에서는 제3차 교육과정에서 과다하게 삽입된 지도 내용을 더욱 정선하여 학습량을 경감시킴으로써 수학적 사고력을 신장시킬 수 있게 하였고, 수학에 흥미를 가지도록 하면서 기초 학력 배양에 중점을 두었으며, 특히 문제해결력의 신장에 역점을 두었다.

⑤ 제5차 교육과정의 개정의 기본 방향의 핵심을 요약하면 다음과 같다.

· 최소의 필수 기본 지식 및 기능의 정선
· 수학적 활동의 강화
· 문제해결의 강화
· 정의적 측면의 강조

⑥ 문제해결력 신장 외에도 정의적 목표의 강화, 대다수 학생을 위한 수학교육, 학교 수학

의 유용성과 적용 가능성의 강조, 학습자 개개인의 경험, 욕구, 흥미 중시, 수학적 활동의 결과로서의 지식뿐만 아니라, 그에 이르는 과정으로서의 수학적 활동 경험의 중시 등이 교육과정에 반영되었다.

⑦ '지도 및 평가 상의 유의점'들을 분석해 보면, 문제해결 지도와 평가를 강조하고 있음을 알 수 있다. 또, 학생들이 수학을 흥미 있고 가치 있는 것으로 이해할 수 있도록 지도할 것을 요구하고 있다. 그러나 문제해결을 위한 구체적인 수업 모형이나 지도 내용 등을 제시하고 있는 것은 아니었다.

⑧ 초등학교에서는 보조 교재로 '산수 익힘책'을 만들어 기초 학습능력 향상과 사고력 향상을 위한 문제풀이용 심화교재로 활용하였다.

⑨ 제5차 교육과정 역시 제4차 교육과정과 마찬가지로 문제해결 지도를 강조하였지만, 입시 중심의 교육 풍토와 문제해결 수업에 대한 인식과 정보의 부족 등으로 이전 교육과정의 시기와 별다른 점이 없었다.

1.7. 제6차 수학과 교육과정

제6차 교육과정의 시기는 1992년 6월 30일자 교육부 고시 제1992-11호로 중학교 교육과정이 고시된 때부터 1997년 12월 30일자 교육부 고시 제1997-15호로 초 · 중등학교 교육과정이 고시될 때까지를 말한다.

① 제6차 교육과정 개정 역시 제5차 교육과정 개정과 마찬가지로 이전 교육과정의 기본 구조를 가능한 한 그대로 유지하면서 문제점을 보완한 것이므로, 전면적인 개정이라기보다 부분적인 개정에 가깝다고 할 수 있다.

② 제6차 교육과정은 제4차와 제5차 교육과정에서 강조하였던 문제해결력에 대하여 그 전략이나 방법 등을 명시함으로써 보다 구체화하였으며, 교수 · 학습 및 평가 방법을 개선하고 정보화 사회에 대비하여 기초 교육의 강화, 정보화 교육 강화, 학습 부담 경감, 실용성 강조, 교육과정의 효율성 제고 등을 고려하여 제정되었다.

(예) 문제해결력을 개발시키기 위하여 문제의 의식, 문제의 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성 등의 문제해결과정과 그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화 하기, 식 세우기, 논리적 추론, 반례 들기 등의 구체적인 해결 전략을 중요시한다.

③ 제6차 교육과정은 제5차 교육과정의 기본 구조를 가능한 한 그대로 유지하면서 문제점을 수정 · 보완하고 외국의 수학교육 동향을 반영하여, 개정의 기본 방향을 다음과 같이

설정하였다.

· 범국민적 기초 소양으로서의 수학교육
· 수학적 사고력을 신장하는 수학교육
· 문제해결력을 신장하는 수학교육
· 수학의 실용성을 강조하는 수학교육
· 계산기나 컴퓨터를 수학적 도구로 활용하는 수학교육
· 학생의 적성, 능력, 진로 등에 적합한 학습의 기회를 제공하는 수학교육
· 다양한 교수 · 학습 방법과 평가 방법이 이용되는 수학교육

④ 세계적인 추세에 따라 수학을 단순히 계산 위주의 교수·학습이 아님을 분명히 하기 위하여 초등학교 교과 명칭을 [산수]에서 [수학]으로 바꾸었다. 특히 수학과의 내용 '관계' 영역에서 문제해결을 하나의 하위 영역으로 설정함으로써 제4차 교육과정부터 논의되어 오던 문제해결력의 신장을 보다 본격적으로 추구하였다.

⑤ 수학의 실생활 적용을 강조한 [실용수학]을 신설하여 실업계 학생들의 필요성을 충족하도록 하였다.

2. 제7차 수학과 교육과정부터 2015 개정 수학과 교육과정까지

2.1. 제7차 수학과 교육과정

제7차 교육과정의 시기는 1997년 12월 30일자 교육부 고시 제1997-15호로 초 · 중등학교 교육과정이 고시된 때부터 2007년 2월 28일자 교육부 고시 제2007-79호로 초 · 중등학교 교육과정이 고시될 때까지를 말한다.

① 초등학교 1학년은 2000년부터, 3, 4학년과 중학교 1학년은 2001년부터, 5, 6학년과 중학교 2학년, 고등학교 1학년은 2002년부터, 중학교 3학년과 고등학교 2학년은 2003년, 고등학교 3학년은 2004년부터 시행되었다.

② 21세기 지식기반 정보화 사회에 적합한 교육은 단순 기능인의 양성보다는 자기 주도적으로 지적 가치를 창조할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성에 중점을 둔다. 이에 대비하기 위하여 수학과에서는 수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 토대로 탐구하고 예측하여 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하며, 창의적인 문제해결력을 배양시켜야 한다.

③ 이전 교육과정에서도 문제해결력의 신장은 교육과정의 중요한 목표로 추구되어 왔으나, 제7차에서는 문제해결력과 더불어 창의적 사고력, 논리적 사고력, 비판적 사고력, 문제해결능력, 추론 능력, 의사소통 능력 등 제반 고등사고능력의 신장을 도모하고 있으며, 수학에 대한 자신감과 긍정적인 태도, 수학과 인접학문과의 관련성 및 수학의 유용성 인식과 같은 정의적인 목표도 추구하고 있다(즉, 수학적 힘을 기르는데 목표를 두고 있다).

④ 수학에 대한 학생들의 능력과 개인 차이를 고려[16]하여 학생 개개인의 수준에 대응되는 차별적인 교육을 받을 수 있도록 교육과정을 수준별로 편성 운영하였다.[17] 국민공통 기본 교육과정 기간에는 '단계형 수준별 교육과정'이 운영되며 선택 중심 교육과정 기간에는 '선택형 수준별 교육과정'이 운영되었다.

---

16) 수학은 다른 교과에 비하여 개인차가 크게 나타나는 교과임에도 불구하고 대부분의 학생에게 동일한 양과 수준의 학습을 부여해 왔다는 문제의식을 서서히 갖게 되었다.

17) 수준별 교육과정은 학습 능력과 교육 내용 간에 상승적인 상호작용이 일어날 수 있도록 교육과정을 구성하자는 것으로, 학습자의 학습 능력과 요구에 대응하는 차별적, 선택적 교육을 제공한다는 데 근본적인 의의를 두고 있다. '학생들의 수준 차이를 고려'하는 수준별 교육과정의 기본 아이디어는 동일하지만 학교급과 학년이나 교과에 따라 단계형, 심화 · 보충형, 과목 선택형으로 유형을 달리한다.

기간	주안점	유형	적용 교과
국민공통 기본 교육과정 (초등학교 1학년~고등학교 1학년)	속도	단계형	수학(1~10학년), 영어(7~10학년)
	깊이	심화보충형	국어, 과학, 사회, 영어(3~6학년)
선택 중심 교육과정 (고등학교 2, 3학년)	적성	과목 선택형	모든 교과

⑤ 단계형 수준별 교육과정

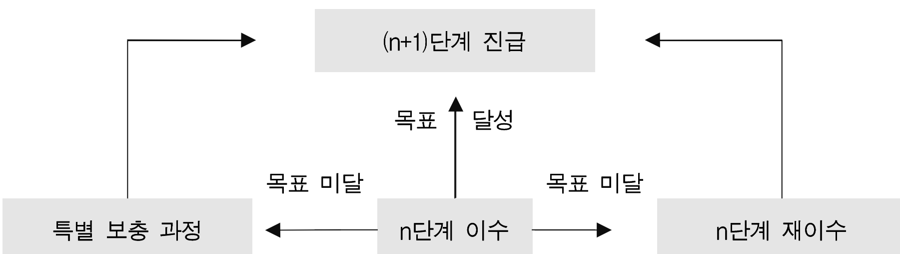
㉠ 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지, 국민공통 기본 교육과정 기간인 10년 동안을 단계형 수준별 교육과정으로 구성하여 개인의 능력과 수준, 적성 등을 고려한 수학교육을 도모하였다.

㉡ 1단계부터 10단계까지 일관성을 유지하기 위하여 '수와 연산', '문자와 식', '규칙성과 함수', '확률과 통계', '도형', '측정'으로 영역을 구분하고 내용을 체계화하였다.

㉢ 동일 학년의 학생이더라도 수학 교과에서는 반드시 동일 단계의 수학을 학습하는 것이 아니라 자신의 수준에 알맞은 단계의 수학을 학습할 수 있었다.

㉣ 수학과의 단계형 수준별 교육과정은 10년간의 기본 교육 기간을 10개의 단계로 나누고 각 단계를 2개의 하위 단계(〈1-가〉, 〈1-나〉, … 〈10-나〉)로 나누어 단계 간의 계열성에 있어서 중복이나 단절이 없게 하며, 나선형 조직을 피해서 연속적이고 점진적으로 구성하여 대부분의 학생들이 자기의 학습 능력과 속도에 맞는 단계에서 공부할 수 있게 하였다.

㉤ 각 단계의 말에 학생들은 성취 정도에 따라 정상적으로 다음 단계에 진급하거나 학생, 교사, 학부모가 협의하여 동일 단계를 재이수 할 수 있다.



재이수 대상 학생 중 재이수를 원하는 경우에는 해당 단계를 재차 학습하고, 보충 학습을 원하는 학생들은 특별 보충 과정을 이수하며, 특별 보충 과정을 이수한 학생들은 그 성공 여부에 관계없이 다음 단계로 진급한다.

㉥ 단계형 교육과정을 운영하는 방식에는 재이수를 권장하느냐 진급을 권장하느냐에 따른 '재이수형'과 '진급형' 그리고 이동 수업의 여부에 따라 단계별로 또는 수준에 따라 학급을 별도로 편성하여 이동 수업을 하게 하는 '학급간 수준별 이동 수업형'과 한 학급 내에서 여러 단계나 수준의 학생들을 함께 지도하는 '학급내 수준별 집단 편성형'이다.

	학급간 수준별 이동 수업형	**학급내 수준별 집단 편성형**
재이수형	A	B
진급형	C	D

A- 수준별 교육과정이 제안한 초기의 아이디어에 충실한 운영 유형
B- 재이수를 권장 또는 허용하면서 이동 수업을 하지 않는 운영 유형, 학생과 학급 수가 적은 농어촌 지역 학교에서 실시하고 있는 복식 수업
C- 진급을 중심으로 운영하면서 학급 간 수준별 이동 수업을 실시하는 운영 유형, 중등 학교에서 광범위하게 이루어져 온 수준별 이동 수업과 유사한 형태
D- 모든 학생이 동일 단계를 학습하면서 이동 수업도 하지 않지만, 수준에 따른 분단이나 소집단을 구성하여 학생들의 수준 차이에 대응하는 방식

ⓢ 각 단계 내에서는 주 과정인 기본 과정 이외에 학생들의 수준 차이를 고려하여 보충 과정과 심화 과정을 두는데, 이에 대한 학습은 기본 과정 지도와 병행하거나 기본 과정 시간 이후에 남는 시간, 또는 학교장이 허용하는 재량 활동 시간을 이용할 수 있다.

⑥ 선택형 수준별 교육과정

㉠ 고등학교 2, 3학년인 선택 중심 교육과정 기간에는 다양한 선택 과목을 제시하고 학생들은 자신의 능력, 진로, 적성에 부합되는 과목을 선택하여 학습할 수 있도록 하였다.

㉡ 선택 중심 교육과정에서 제공되는 과목은 일반선택 과목과 심화선택 과목으로 구분된다. 일반선택 과목은 교양 증진 및 실생활과 연관된 과목으로 '실용 수학'이며, 심화선택 과목은 학생의 진로, 적성과 소질을 계발하는 데 도움이 되는 과목으로 '수학 I', '수학 II', '미분과 적분', '확률과 통계', '이산 수학'이다.

㉢ 최근의 시대적 조류를 수학 과목과 내용의 선정에 반영하여, 고등학교 선택 과목으로 새로이 '확률과 통계', '이산 수학'을 포함하였다.

㉣ 선택 과목으로 '실용 수학'은 이미 제6차 교육과정부터 있었으나, 제7차 교육과정에서는 외국의 '소비자 수학(consumer mathematics)'에 비유될 만큼 실용적인 측면을 부각시켰다.

㉤ 미분적분학을 근간으로 하는 기존의 '수학 I', '수학 II'를 제7차 교육과정에서는 '수학 I', '수학II', '미분과 적분'의 세 과목으로 세분화하여, 학생들의 필요에 따라 적당한 수준만큼 선택하여 학습할 수 있는 기회를 주었다(=수요자 중심의 교육).

일반 선택	실용수학	수학의 학문적 엄밀성보다는 실용적인 측면을 강조하여 수학을 실생활의 다양한 상황과 관련지어 볼 수 있는 과목
심화 선택	수학I 수학II 미분과 적분	서로 연계성을 가지고 순차적으로 학습하게 되는 과목들로, 제6차 교육과정의 '수학 I'과 '수학 II'에 포함되어 있던 내용을 중심으로 구성
	확률과 통계	정보화 시대에 필요한 확률과 통계의 기본 개념과 원리를 학습하기 위하여, 다양한 통계 자료와 정보를 처리하고 우연 현상을 이해할 수 있도록 하기 위한 과목
	이산 수학	실생활과 관련된 여러 가지 이산적인 문제를 해결하기 위한 기본적인 수학 개념과 원리의 학습을 목적으로 하는 과목

⑦ 단계형 수준별 교육과정에서 기본 과정은 모든 학생들이 학습해야 하는 핵심적인 내용이며 학생들의 기본 과정 이수 유무에 따라 심화 과정과 보충 과정을 실시했다.

<table>
<tr><td colspan="2">기본 과정</td><td>모든 학생들이 학습하여야 할 핵심적인 내용</td></tr>
<tr><td rowspan="2">심화 과정
(교육과정에 명시)</td><td>내용</td><td>기본 과정에서 습득한 지식을 실생활에 활용하는 다양한 방법을 찾아보거나, 문제해결력을 배양하는 데 필요한 학습내용</td></tr>
<tr><td>구성</td><td>심화 과정의 내용이 상위 단계에서 학습할 수학적 개념, 원리, 법칙을 미리 도입하거나 탐구하게 해서는 안 됨. 즉 심화 과정이 속진의 의미나 난이도상의 심화로 해석되어서는 안 됨</td></tr>
<tr><td rowspan="2">보충 과정
(교육과정에 명시 안 됨)</td><td>내용</td><td>최소 필수(minimal essential)가 되는 내용 선정</td></tr>
<tr><td>구성</td><td>하향초등화 하여 구성</td></tr>
</table>

㉠ 심화 과정의 예는 다음과 같다.

· 실생활에서 도형의 이동에 관한 문제를 해결할 수 있다.

· 신문, 잡지 등에서 볼 수 있는 자료를 통해서 표준편차를 구하고, 이를 해석할 수 있다.

· 삼각형의 변과 각 사이의 관계를 알 수 있다.

㉡ 보충 과정을 학습하게 되는 경우 학생들마다 선수 학습 요소에서 결손이 생긴 경우도 있고, 교과서의 형식화된 제시 방법과 학생의 인지구조 사이의 괴리에서 연유할 수도 있으며, 교과서가 학생이 소화하기 어려울 만큼의 과다한 내용을 제시한 데서 비롯된 경우도 있다.

㉢ 보충 과정을 위한 하향 초등화의 예는 다음과 같다.

· 도형에 대한 정리와 이에 대한 증명이 기본 과정에 포함되어 있을 때, 형식적인 증명은 학생들의 수준에서는 어려우므로 생략하고, 그 대신 몇 개의 수치를 대입해 봄으로써 정리가 성립함을 확인해 본다.

⑧ 제7차 교육과정에서는 제4차 교육과정 개정 이래 일관되게 이어져온 '양의 축소'와 '질의 고양'을 위해 '교육 내용의 적정화' 그 중에서도 특히 교육 내용의 축소를 개정의 중요한 방침의 하나로 설정하였다. 따라서 제7차 수학과 교육과정은 가능한 한 교육 내용을 엄선하여 학습 부담을 줄여줌으로써 학생들로 하여금 수학 학습에 흥미와 자신감을 가질 수 있도록 하였다.

㉠ 초등학교 5학년의 집합 관련 내용이나 6학년의 정수와 그 연산 등의 내용을 7단계로 이동하였고, 수판셈을 삭제하였다.

ⓛ 중학교에서 지도되던 오진법, 도형의 관찰, 기댓값, 수심, 방심 등의 내용이 삭제되었고, 산포도와 표준편차, 두 원 사이의 관계 등의 내용이 10단계로 이동하였다.

ⓒ 고등학교에서 지도되던 삼차함수가 삭제되었고, 지수함수와 로그함수가 고등학교 1학년에서 [수학 I]로 이동하였다.

ⓓ 함수 개념의 도입은 비례 관계를 이용하여 도입하도록 하였다. 그동안 중학교 1학년에서 함수 개념의 도입을 두 집합의 원소 사이의 대응으로 도입하여 왔으나, 그 개념이 어렵고 활용성이 미약하다는 의견을 반영하고, 학습 부담 경감 차원에서 약화하여 다루기로 하였다. 따라서 함수의 도입은 변화 관계를 이용하도록 하였다.

ⓔ '도형의 관찰' 내용을 삭제하였다. 도형의 관찰에서 다루어 오던 내용은 단순하고 기초적인 도형에 관한 기하학적 직관을 수학화한 것으로 위상적 관점이나 그래프 이론의 초보적인 입장에서 흥미 있고 유용한 학습 자료로 활용되어 왔으나 고등학교 수학 학습과의 연결성이 다소 미약하여 학습 부담을 경감하는 차원에서 삭제되었다.

ⓕ '근삿값의 사칙계산'을 약화 및 삭제하였다. 2학년에서 다루던 근삿값의 사칙계산 중 곱셈, 나눗셈은 학습 부담 경감 차원에서 삭제하고, 덧셈과 뺄셈만 다루도록 하였다. 더욱이 덧셈, 뺄셈 방법도 가능한 한 단순화하고 계산기 사용을 권장하였다.

ⓖ '확률'의 내용을 약화하였다. 확률에서는 간단한 경우의 수와 상대도수를 이용하여 개념을 이해하도록 하고, 확률계산은 간단한 소재로 다루도록 약화하였다. 또 기댓값은 학습 부담을 고려하여 삭제하였다.

ⓞ 중학교 3학년에서 다루던 '산포도', '표준편차'의 내용을 〈10-가〉 단계로 이동하였다.

⑨ 제7차 수학과 교육과정의 목표는 다음과 같다.

수학의 기본적인 지식과 기능을 습득하고, 수학적으로 사고하는 능력을 길러, 실생활의 여러 가지 문제를 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기른다.

ⓐ 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여, 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.

ⓛ 수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다.

ⓒ 수학에 대한 흥미와 관심을 지속적으로 가지고, 수학적 지식과 기능을 활용하여 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 태도를 기른다.

제7차 교육과정의 목표는 제5,6차와 같은 구조로 되어 있으며, 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통해 수학적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하게 하고, 수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 생활 주변의 여러 가지 문제를 관찰, 분석, 조직, 사고하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 강조하고 있다.

⑩ 단계별 지도 목표와 내용 진술 방식은 교사 중심인 '할 수 있게 한다'에서 학생 중심인 '할 수 있다'와 같이 행동 중심의 표현을 사용하였다.

〈9-나 단계〉 (1) **목표** ㈎ 상관도와 상관표를 알고, 두 변량 사이의 상관관계를 알 수 있다. ㈏ 피타고라스 정리를 알고, 이를 활용할 수 있다. ㈐ 원에 관한 여러 가지 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있다. ㈑ 삼각비의 기본 개념을 이해하고 이를 활용할 수 있다.	〈목표〉 :각 단계의 학습을 통하여 성취해야 할 필수 수준의 성취 능력이나 학생이 학습 후 드러내 보여야 할 성취 능력을 학습자 중심으로 제시하였다.
(2) **내용** ㈏ **도형** 1 **피타고라스의 정리** ① 피타고라스의 정리를 알고 이를 증명할 수 있다. 2 **피타고라스의 정리의 활용** ① 피타고라스의 정리를 간단한 도형에 활용할 수 있다. 3 **원과 직선** ① 원에서 현에 관한 성질을 이해한다. ② 원의 접선에 대한 성질을 이해하고, 이를 증명할 수 있다. 4 **원주각** ① 원주각의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. ② 원에 내접하는 사각형의 성질을 할 수 있다. ③ 원과 비례에 관한 성질을 이해한다.	〈내용〉 :영역별로 각 주제에 대한 내용을 상세화하여 '내용+행동' 형식의 성취 기준 중심으로 제시하였다.
〈용어와 기호〉 접선의 길이, 원주각, 내대각	〈용어와 기호〉 :각 영역 또는 주제의 교수학습에서 사용될 필수 용어와 기호를 제시하였다.
〈학습 지도상의 유의점〉 ① 피타고라스의 정리, 원에 내접하는 사각형의 성질, 원과 비례에 관한 성질의 증명은 간단히 다루고 활용에 중점을 둔다. ② 피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제상황을 통해 간단히 다룬다.	〈학습 지도상의 유의점〉 :각 영역 또는 주제의 학습 지도상의 유의점을 교사 중심으로 제시하였다.
〈심화 과정〉 ① 삼각형의 변과 각 사이의 관계를 알 수 있다.	〈심화 과정〉 :기본 과정을 성공적으로 학습한 학생들이 발전적으로 학습할 수 있는 내용을 제시하였다.

⑪ 수학의 개념, 원리, 법칙의 지도 시 해당 내용과 관련하여 학생들에게 친숙한 생활 장면 또는 상황을 설정하여 학습이 효과적으로 이루어질 수 있게 준비하거나 타 교과의 내용

을 결합시키는 통합교과적 접근 방법을 고려한다. 그 결과 학생들은 수학을 생활 전반에 걸친 유용한 지식이며 여타 교과 전반에 걸친 도구적 역할임을 인식하고 자연스럽게 수학에 대한 시각에 긍정적인 변화를 갖게 되며 수학 학습에 대한 흥미의 유발과 함께 수학을 대하는 태도도 바람직하게 될 것이다.

⑫ 수학 지도 시 교사의 설명에 주로 의존하는 방식은 지양되어야 한다. 그렇다고 교사의 설명식 교수 방법을 전면 배제하고자 하는 것은 아니다. 교사의 치밀한 준비에 의해 진행되는 설명식 교수 방법을 기본으로 하여 부분적으로는 해당 내용의 성격이나 학습자의 심리적 상태 등을 고려하여 수업의 주체자가 학습자로 옮겨가도록 한다. 이때, 발견식의 방법이나 학습자의 능동적인 조작 활동을 통한 탐구 방식의 학습, 또는 교사와 학생이 함께 학습 활동을 전개하는 방식 등으로 학습자의 능동적이고 적극적인 학습 활동에의 참여를 중시하는, 소위 활동주의 학습 원리의 적용이 전체적인 학습 효과를 극대화시킬 수 있는 좋은 방법이 될 수 있다.

⑬ 수업 상황에서 교사의 적절한 발문 활동이 중요하다.

㉠ 발문의 상황은 교사와 학생이 직접적으로 연결되는 공동의 학습 심리적인 상태에 놓이게 되는 경우이므로 학습자의 학습 심리적인 면을 개별 학생에 따라 충분히 파악한 상태에서 진행되어야 할 것이다.

㉡ 발문은 학생으로 하여금 자신의 독창적인 생각을 부담 없이 펼쳐 보일 수 있는 기회가 될 수 있도록 비평가적인 열린 방식이 되어야 하며, 교사가 준비된 답 중에서 선정하는 방식의 대답이나 단답식의 대답을 요구하는 것은 지양할 필요가 있다.

㉢ 개별 학생의 학습 상태의 점검이나 문제점 해결의 목적뿐만 아니라 한 학생에 대한 발문을 통하여 나머지 유사한 입장에 있는 학생들이 자신의 학습 상태를 스스로 점검하며 각자의 생각을 정리할 수 있는 기회가 될 수 있도록 발문을 미리 철저하게 준비할 필요가 있다.

⑭ 1980년대부터 지속적으로 강조되고 있는 문제해결은 전체적인 수학 교수 · 학습의 경향이나 맥락에서 다루어져야 한다. 문제해결에서의 문제란 지엽적인 질문의 수준을 뛰어넘는 복합적인 문제로, 대부분 해결에 이르는 알고리즘이 명백하게 드러나 있지 않은 과제를 말한다. 이러한 문제를 해결하는 과정은 지엽적인 전략의 숙달이나 같은 유형 문제의 반복적 연습을 넘어 스스로 전략을 세워 어느 정도의 시간 동안 해결하려 고민하는 과정이어야 한다. 더불어 문제해결과정을 통해 기초적인 수학의 지식이나 기능에 대한 이해를 공고히 할 수 있을 뿐만 아니라, 의사결정, 비판적 사고, 창의적 사고 등과 같은 고급 정신 기능을 신장할 수 있다. 사실 수학을 배우고 가르치는 활동은 물론 그 활동의 목적이나 이유 또한 넓은 의미에서의 수학적 문제상황의 해결로 귀결될 수 있다.

㉠ 문제해결의 지도에 적합한 다양한 문제나 문제상황을 개발하고 문제해결 방식의 학습에서 학습자가 취해야 할 학습 태도, 이를테면 자발적 탐구, 협동 토론식, 조작적 활동에 의한 발견 등 학습자의 능동적 학습 활동 중심 등에 대한 고찰이 필요하다.

㉡ 문제해결식의 학습 지도는 결국 학생 스스로의 다양한 사고 활동이나 사고 실험을 요구하는 것으로, 단편적인 전략의 사용만이 아닌 이미 학습된 내용을 종합적으로 활용하여 주어진 문제상황을 해결하기 위하여 자신만의 독창적 사고를 구성하고 훈련할 수 있는 기회를 제공하는 방식으로 생각해야 된다.

⑮ 제7차 수학과 교육과정에서는 계산 능력이 중요시되지 않는 문제해결 상황에서는 계산기나 컴퓨터를 활용할 수 있도록 권장하고 있다. 즉 연산 수행 능력과 같은 기초 기능의 습득을 방해하지 않는 범위 내에서 적절하게 계산기와 컴퓨터를 활용하여, 보다 중요한 수학적 사고 능력의 개발이 이루어질 수 있도록 유도하고 있다.

(예) 기하판, 그래픽 계산기 또는 그래픽 기능을 가진 컴퓨터 프로그램 등 공학적 도구

㉠ 계산기는 중학교에서 필요한 계산 기능과 그 원리를 완전히 습득한 이후에, 이를 문제해결과정에 적절하게 활용함으로써 문제해결 학습의 효과를 배가시킬 수 있게 된다.

㉡ 그림이나 도형을 그리고 이를 이동, 변화시킬 수 있게 설계된 컴퓨터 프로그램의 활용은 학생들로 하여금 도형 영역의 학습을 도와 줄 수 있을 것이다.

⑯ 다양한 평가 방법의 활용을 권장하며 평가 기준의 수준을 구분하는 준거를 제시하였다. 즉 제7차 수학과 교육과정의 마지막 구성요소인 '평가'란에는 수업의 전개 국면에 따라 진단, 형성, 총괄 평가를 실시하여 그 결과를 교수 · 학습 방법의 개선에 활용할 것과, 학생들의 수학적 성향과 문제해결과정의 평가를 강조하고 있으며, 특히 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법의 활용을 권장하고 있다. 또한, 평가 기준의 수준을 상 · 중 · 하로 구분하는 일반적인 준거를 제시하여, 평가 상황에서 유용한 지침이 될 수 있도록 하였다.

⑰ 수학과 교수 · 학습 방법

제7차 수학과 교육과정은 자율과 창의에 바탕을 둔 학습자 중심의 교수 · 학습의 의지를 강하게 나타내고 있다. 즉, 학습 분량의 최적화, 수준과 범위의 적정화, 학습자의 학습 수준별 적용, 학습자의 능동적 학습 활동 강조, 학습자의 수학 학습에 대한 흥미와 관심의 유발, 학습자의 실제 경험과 관련된 문제해결 강조 등으로 나타나고 있다.

내용	항목	내용 요약
단계형 수준별 교육과정	가	○ 국민공통 기본교육 기간의 수학을 10단계로 구성 ○ 각 단계별로 두 개의 하위 단계를 두고, 각 하위 단계별로 기본 과정, 심화 과정 구성
	나	○ 단계별 내용 및 순서를 재구성할 수 있음
	다	○ 단계별 내용은 최저 기준을 제시한 것이므로, 학생의 능력과 수준, 단계간의 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 보충·심화 학습의 기회를 제공함
	라	○ 교육과정의 효율적인 운영을 위한 유의 사항 (1) 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하고, 이를 적절히 운영함 (2) 교수-학습을 개별화하여 학습의 효율을 높임 (3) 소집단 협력 학습 체제를 적절히 운영하여 서로 협력하며 학습할 수 있도록 함
보충 · 심화 내용	마	○ 보충·심화 과정의 학습을 효율화하기 위한 유의 사항 (1) 보충 과정의 내용(최소 필수 내용 요소) (2) 보충 과정의 내용 구성(하향 초등화 하여 구성) (3) 심화 과정의 내용(실생활 활용, 문제해결력) (4) 심화 과정의 내용 구성(상위 단계 내용 도입 금지)
다양한 교수 · 학습 방법	바	○ 다양한 교수·학습을 위한 유의 사항 (1) 실생활 소재 도입 (2) 구체적 조작 활동과 사고 과정 중시 (3) 학생들의 경험과 욕구를 바탕으로 구체적인 것에서 추상적인 것의 순서로 교수·학습함 (4) 생활 주변이나 다른 교과에서 접할 수 있는 소재를 다루어, 수학의 필요성을 인식하도록 함 (5) 발문은 학생들의 인지발달과 경험을 고려하여 효율적인 학습을 유도 (6) 수학의 활용성, 가치성 등에 대한 올바른 인식을 가지도록 하여 수학에 대한 바람직한 태도 함양
문제 해결력 신장	사	○ 문제해결력을 신장시키기 위한 교수·학습 방법 (1) 문제해결과정(문제의 이해→해결 계획 수립→계획 실행→반성), 해결 전략(그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화하기, 식 세우기, 거꾸로 풀기, 논리적 추론, 반례 들기 등) 사용 (2) 문제를 발견하고, 문제해결을 위한 전략을 자주적으로 세워 이를 해결해 나갈 수 있도록 함 (3) 문제해결은 전 영역에서 정형 문제 및 비정형 문제를 통하여 지속적으로 지도
영역별 지도 유의 사항	아	○ 각 영역의 내용에서는 다음 사항에 유의하여 지도 (1) '수와 연산'에서는 수 개념에 대한 올바른 이해를 바탕으로 기본적인 계산 능력을 함양 (2) '도형'에서는 직관에 의한 관찰이나 여러 가지 구체적 조작물 사용, 추론은 간단한 소재로부터 복합적인 소재로 발전시켜 연역적 추론이 통합적으로 완성되도록 함 (3) '측정'에서는 실생활에 대한 활용성을 중시 (4) '확률과 통계'에서는 실생활에서 접할 수 있는 자료를 효율적으로 조사, 정리, 분석해 봄으로써 유용한 정보를 얻는 데 효과적인 도구가 통계적 방법임을 인식 (5) '문자와 식'에서는 수학적 표현, 유용성을 강조 (6) '규칙성과 함수'에서는 관계나 규칙 찾기 중시
교육 기자재의 활용	자	○ 교육 기자재의 활용 (1) 교수-학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 적극 활용하여 학습의 효과를 높이도록 함 (2) 계산 능력 배양이 목표인 영역을 제외하고는 복잡한 계산, 수학적 개념·원리·법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 가능하면 계산기나 컴퓨터를 적극 활용하도록 함

⑱ 수학과의 평가

제7차 수학과 교육과정에서의 수학 학습의 평가는 획일적인 방식을 지양하고, 수학 수업의 전개 국면에 따라 다양한 평가 방식을 택하여 실시하도록 하고 있다.

내용	항목	내용 요약
평가의 목적	가	○ 수학 학습의 평가는 학생 개개인의 전인적인 성장과 수학 학습을 돕고, 교사 자신의 수업 방법을 개선하기 위한 것이어야 함
	나	○ 지도를 담당하는 교사의 지도 활동 측면에 대해서도 자발적인 평가를 함으로써 발전적인 수학 학습 지도 개선의 참고 자료로 사용하여야 함
평가의 내용	다	○ 학생의 인지발달 수준을 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하여 평가함
	라	○ 사고력 신장을 위하여 결과보다는 과정을 중시해야 하며, 기본적인 지식, 개념의 이해, 기본적인 계산 기능 등을 평가
	마	○ 문제해결력에 대한 평가에서 결과뿐만 아니라 문제의 이해 능력과 문제해결과정을 파악할 수 있도록 함
	바	○ 학생들이 수학에 대한 바람직한 가치관이나 수학 학습에 대한 관심과 흥미의 정도를 파악할 수 있도록 함
	사	○ 문제해결과정에서 유연하고 다양한 사고력과 창의성을 발휘하고 있는지를 평가
	아	○ 평가 중점 사항 (1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙의 이해 (2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 기능 (3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력 (4) 생활 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하는 태도
평가의 기준	자	○ 평가의 기준 (1) 상 (가) 최종적으로 도달하여야 할 학습목표에 해당되는 내용 (나) 습득된 지식을 통합적으로 이용하여 해결하거나 일반화시킬 수 있는 내용 (다) 다른 영역의 내용과 복합된 내용 (라) 수학적으로 큰 가치와 유용성을 지니는 내용 (2) 중 (가) 기본적으로 도달하여야 할 학습목표에 해당되는 내용 (나) 기본적인 개념, 원리, 법칙, 성질을 이해하는 정도의 내용 (다) 기본적인 개념, 원리, 법칙, 성질을 이용하여 해결할 수 있는 내용 (3) 하 (가) 최소한으로 도달하여야 할 학습목표에 해당되는 내용 (나) 단순한 수학적 지식(용어, 기호, 알고리즘 등)을 알 수 있는 정도의 내용 (다) 단순한 수학적 지식을 이용할 수 있는 정도의 내용
평가의 방법	차	○ 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습평가가 이루어질 수 있게 함

2.2. 2007 개정에 따른 수학과 교육과정

2007년 2월에 공표된 2007 개정에 따른 교육과정은 2009년에 초등학교 1, 2학년, 중학교 1학년, 고등학교 1학년을 시작으로 2010년에는 초등학교 3, 4학년, 중학교 2학년, 고등학교 2학년, 2011년에는 초등학교 5, 6학년, 중학교 3학년, 고등학교 3학년의 순서로 점진적으로 적용되었다.

1) 교육과정 개정의 필요성 및 개정 중점 사항

(1) 단계형 수준별 교육과정의 개선 필요

① 제7차 교육과정에서는 초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지의 국민공통 기본 교육기간에 학생의 능력과 수준에 맞는 수학 수업을 위하여 수학 교과는 단계형 수준별 교육과정을 편성, 운영하도록 하였다.

② 단계형 수준별 교육과정에 따르면 학생들은 학년에 관계없이 자신의 능력과 수준에 맞는 단계의 수학 수업을 들어야 하고, 매 단계를 마칠 때마다 해당 단계 도달 여부를 확인하는 평가를 실시하여 그 단계의 수준에 도달하지 못했으면 그 단계를 재이수하거나 특별 보충 과정을 이수해야 했다. 그러나 학생과 학부모들 사이에 재이수나 특별보충과정에 대한 정서적 거부감이 매우 커서 재이수를 실시하지 못하였고, 특별보충과정도 매우 형식적으로 운영되었다.

③ 우리나라 초 · 중등학교의 각 학급에서는 수학적 능력과 수준의 격차가 큰 학생들이 혼재되어 있고, 중 · 고등학교의 교과 수업은 교과 담당 교사가 학급을 찾아다니면서 교과 수업을 하게 되어 있다. 따라서 수학 수업을 단계형 수준별로 운영하기 위해서는 한 명의 교사가 한 시간에 여러 단계의 수학 수업을 하거나 특정 시간대에 한 학년 전체 또는 한 학교 전체가 수학 수업을 해야 한다. 그러나 이러한 수업 방식은 수업 운영의 비효율성, 수학 교사 수급 및 배치의 문제점 등 현실적으로 시행이 불가능하다.

⇒ 결론적으로, 현실 적합한 수준별 수업 운영 권장

㉠ 제7차 단계형 수준별 교육과정은 우리나라 학교 상황에서 현실적으로 운영에 어려운 점이 많아 명목상으로만 존재하고 있었다. 따라서 특별보충과정을 형식적으로 운영하는 것을 제외하고는 편성 · 운영이 이루어지지 않고 있는 단계형 수준별 교육과정을 개정하여 수준별 수업 운영을 권장하였다.

㉡ 수준별 교육과정을 도입한 본래의 취지인 '학생의 능력과 수준, 적성에 적합한 교육

실시'라는 본질적인 정신은 살리면서도 우리나라 학교 상황에서 운영 가능한 수준별 수업을 운영할 수 있도록 하기 위한 것이며 이를 위하여 각 학교에서는 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞는 수준별 집단을 편성 · 운영할 수 있도록 하였다.

㉢ 제7차 교육과정에서 수학과에 적용되던 '단계형' 교육과정을 더 이상 유지하지 않게 됨에 따라 교육과정 문서에서도 '단계' 대신 '학년'과 '학기'라는 용어를 부활시켰다.

㉣ 국민공통 기본 교육기간(초등학교 1학년부터 고등학교 1학년까지)에는 모든 학생들이 필수적으로 알아야 할 학습내용만 제시하고 각 단계의 영역마다 제시했던 심화 과정을 대부분 삭제하였다. 삭제된 심화 과정의 예로는 '다면체에서 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수 사이의 관계를 알아본다(7-나 단계)', '임의의 두 실수 사이에 존재하는 실수를 찾는 방법에 대하여 알아본다(9-나 단계)' 등이다. 그리고 교육과정에서는 심화 또는 보충 과정 내용을 제시하지 않는 대신에 각 학교 교사들이 학생의 성취수준과 진로, 학교의 여건 등을 고려하여 교육 내용을 재구성하고 수준별 집단에 맞는 수학교육을 실시할 수 있도록 자율권을 부여하였다.

㉤ 수준별 수업 내용은 집단별로 전혀 다른 학습주제를 가르치는 것이 아니라 동일한 학습주제 하에서 학습주제에 접근하는 방법을 다르게 하거나 내용의 깊이를 달리하여 가르치도록 하였다.

(예) 수학적 기초가 부족한 학생들은 교사의 안내를 받거나 구체적 조작 활동을 통해 개념이나 원리, 방법을 이해할 수 있도록 하고, 수학적 능력이 우수한 학생들은 학생 스스로 문제 상황을 탐구하여 개념을 발견하거나 조직해 보게 할 수도 있으며, 학습한 개념, 원리, 법칙 등을 활용하여 고차적인 사고력을 필요로 하는 문제를 풀어 보게 할 수 있다.

(2) 교육 내용의 적정화 필요

① 제7차 교육과정에서는 이전에 비하여 수학 교과의 내용을 30% 감축하도록 하였다. 그러나 제7차 교육과정에서 수학과 수업 시간이 축소됨에 따라 학습량 감축이 실질적인 효과를 거두지 못하였다.

② 수준별 교육을 강조하기 위하여 제7차 교육과정에서는 국어, 사회, 수학, 과학, 영어 교과의 경우, 교육과정에 기본 과정과 함께 심화 과정도 함께 제시하도록 하였다. 이러한 심화 과정의 내용이 수학 교과서에 기본 내용과 함께 제시되자, 교과서에 나오는 내용은 모두 지도해 달라는 학생과 학부모의 요구에 따라 각 학교에서는 학생의 수준

에 관계없이 모든 학생들에게 기본 과정의 수학 내용뿐만 아니라 심화 과정의 수학 내용도 모두 지도하게 되면서 학습량이 과다하고, 학습수준이 지나치게 높다는 비판을 받게 되었다.

③ 무리하게 수학 교과의 내용을 감축하는 과정에서 일부 학습주제가 학년 간, 교과 간, 연계성이 떨어졌으며, 내용 영역구분 방식에 따라 연관된 수학 내용을 분리하여 지도하도록 함으로써 학습 효과가 떨어지는 문제도 발생하였다.

⇒ 결론적으로, 교육 내용의 적정화

㉠ 학생들의 미래 생활이나 학습에서의 필요성과 관련하여 수학과 교육내용을 적정화하였다. 실생활에 널리 활용되고 여러 나라에서 공통적으로 지도되고 있는 수학적 개념에 대한 내용을 보강하도록 하였다.

ⓐ '최빈값, 중앙값'을 중학교 3학년에서 지도한다.

ⓑ 중학교 2학년의 '기하'영역에 기호 '$p \to q$'를 추가한다. 이것은 명제와 명제의 역을 이해시킬 때 편리하게 사용할 수 있도록 하기 위한 것이다. 그러나 중학교에서는 기호만 사용할 뿐 명제 $p \to q$의 참, 거짓에 대한 내용은 고등학교 1학년에서 학습하도록 하였다.

㉡ 수학의 학습량과 난이 수준을 적정화하였다.

ⓐ 중학교 3학년의 경우, 수업 시수에 비해 학습량이 과다하다는 지적을 반영하여 중학교 3학년에 있는 학습주제 중 '다항식의 곱셈'을 중학교 2학년으로 이동하였다.

ⓑ 고등학교 1학년의 경우, 현재 고2, 3학년의 수학 학습 부담이 과다하다는 지적을 반영하여 '경우의 수, 간단한 순열과 조합'을 고등학교 1학년으로 이동시켜 학년 간, 학교급 간 학습량을 조정하였다.

ⓒ 중학교 1학년의 학습내용인 '이진법의 덧셈과 뺄셈'과 2학년의 '근삿값의 덧셈과 뺄셈'을 삭제함으로써 학습량을 감축하였다.

ⓓ 중학교 3학년에서 학습해왔던 '상관도와 상관표'는 현재의 정의로 지도하면 학생들이 이 개념에 대해 오개념을 갖기 쉽고, 수학적으로 의미 있게 지도하기에는 중학교 학생들에게 난해하며, 학생들의 발달 단계를 고려할 때 상대적으로 덜 긴요한 개념이므로 중학교 교육과정에서 삭제하였다.

ⓔ 현재는 그다지 사용되지 않는 기호인 ∠R을 삭제하여 학습량을 감축하였다.

ⓕ 중학교 2학년에서 처음 학습하는 증명의 경우, 증명의 의미와 증명의 방법에 대한 기본적인 이해는 모든 학생들이 공통으로 학습하도록 하는 반면, '닮음의 활용' 단원에서는 수준별로 학습할 수 있게 하였다.

(예) 수학적 기초가 약한 학생들은 평면 도형의 여러 가지 성질을 구체적 조작 활동이나 탐구활동을 통해 이해하도록 하고, 성질의 엄밀한 증명보다는 이 성질을 활용하여 문제를 해결하는 데 중점을 두도록 하는 반면, 수학적으로 우수한 학생들은 이 성질을 연역적으로 증명해 볼 수 있게 한다.

ⓖ 개정 교육과정에서는 사실상 기본 내용화 되어 학습량 증가의 주요 원인이었던 '심화' 내용을 삭제함으로써 교육과정 상으로도 학습내용이 감축되도록 하였다.

㉢ 학년 간, 학교급 간, 교과 간의 연계성을 강화하고 연관된 내용은 밀접하게 관련지어 학습할 수 있도록 함으로써 학습 효과를 높일 수 있게 하였다.

ⓐ 고등학교 1학년에서 가르치던 '분산과 표준편차'를 중학교 3학년으로 이동시켰다. 이는 3학년에서 학습하는 대푯값인 평균, 최빈값, 중앙값 개념과 분산 및 표준편차 개념을 서로 관련시켜 학습할 때 통계적으로 유의미하다는 학계의 의견을 반영한 것이다.

ⓑ 중학교에서 사용해왔던 부등호 기호 '≦'를 국제적 표준 기호이며 학계에서 사용하는 기호인 '≤'로 수정하여 학생들이 이후의 학습에서 기호로 인한 혼란을 겪지 않도록 하였다.

ⓒ 중학교 1학년에서 처음 학습한 미지수나 변수를 문자로 나타내는 것에 대하여 미지수를 x로 나타내기와 간단한 방정식 풀기 내용을 6학년에서 지도하도록 하였다.[18)]

ⓓ 실생활과 과학 교과에서 필요로 하는 정비례와 반비례 개념을 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 이동시켜 지도하도록 함으로써 실생활이나 타교과 학습과 수학 간의 연계성을 강화하였다.

[참고] 학년별 내용의 변화 정리

학년별 내용의 변화는 학습 부담을 경감시키기 위해 학습내용을 적정화하고, 내용 분량을 조정하는 가운데 이루어졌다.

① 초등학교

· 다른 교과의 학습을 고려하여 수학의 일부 주제를 제6차 교육과정과 비슷한 시기에 도입하도록 조정하였다. 예를 들어 무게 개념과 초 단위의 시간을 초등학교 4학년에

18) 이것은 문자의 의미를 이해하기가 쉬운 맥락이 미지수를 문자로 나타내는 것이라는 점을 고려한 것이다. 제7차 교육과정에서는 학생들이 문자사용을 처음으로 하게 되는 곳은 중학교 1학년 첫째 단원인 집합 단원에서 주어진 집합을 조건제시법으로 나타낼 때이다. 이 때 사용되는 문자의 의미는 임의의 수를 대표하여 나타내는 것으로 문자의 여러 가지 의미 중에서 학생들이 가장 어려워하는 의미이다. 초등학교 6학년 학생들은 이전 학년에서 '□를 사용하여 식 세우기' 경험을 충분히 하였고, 3학년 때부터 영어를 학습하고 있어서 문자 x가 낯설지 않을 것으로 예상된다. 문자의 역할을 가장 쉽게 이해할 수 있는 맥락이 방정식이고, 외국의 경우도 대체로 초등학교 5 또는 6학년에서 문자사용을 시작하는 점을 고려하여 위의 내용을 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 이동시켰다.

서 3학년으로, 비와 비율을 초등학교 6학년에서 5학년으로, 정비례와 반비례를 중학교 1학년에서 초등학교 6학년으로 도입 시기를 조정함으로써, 수학이 과학과 사회 과목의 학습에 도움을 주는 도구 교과로서의 기능을 충분히 할 수 있도록 하였다.

· 여러 가지 측면을 가진 개념을 점진적으로 도입함으로써 보다 의미 있는 학습이 이루어지도록 하였다. 제7차 교육과정에서는 초등학교 3학년에 연속량과 이산량의 등분할을 통해 분수 개념을 도입하고 있지만, 2007 개정 교육과정에서는 2학년에서 연속량의 등분할, 3학년에서 이산량의 등분할, 5학년에서 비로서의 분수와 몫으로서의 분수를 다루도록 함으로써, 분수의 다양한 측면이 충분히 드러날 수 있도록 하였다.

② 중학교 1학년

· 학습량 감축을 위하여 이진법의 덧셈과 뺄셈을 삭제하였다.
· 대학교 및 국제 표준 기호에 맞추어 부등호 ≦, ≧를 각각 ≤, ≥로 수정하고, 필수적인 기호만 엄선한다는 의미에서 직각 기호 ∠R을 삭제하였다.
· 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동하고, '두 원의 위치 관계'를 고등학교 1학년에서 중학교 1학년으로 이동하여 해석기하학적인 방법이 아닌 직관적인 수준으로 간단하게 다룬다.
· 제7차 교육과정에서와 같이 함수 개념을 비례 관계의 맥락에서만 도입하게 되면 추후 일차함수와 이차함수를 이해하는데 어려움이 따를 수 있기 때문에 보다 보편적인 맥락에서 함수 개념을 도입할 필요가 있다는 의견이 제기되어 왔다. 이에 2007 개정 교육과정에서는 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응관계'로 수정하였다.

③ 중학교 2학년

· 필수적인 학습내용을 정선하여 학습량을 경감하기 위하여 근삿값의 덧셈과 뺄셈을 삭제하였다.
· 닮음의 활용과 관련된 명제의 '증명'을 '이해'로 약화시킴으로써 증명과 관련된 내용을 축소하되, 학습자의 수준에 따라 차별적으로 증명을 지도하도록 하였다.
· 중학교 3학년 내용의 양을 조정하는 차원에서 다항식의 곱셈 공식이 중학교 3학년에서 2학년으로 이동하였다.
· 기호 $p \rightarrow q$를 추가함으로써 명제와 명제의 역을 이해하는데 도움이 되도록 하였다.

④ 중학교 3학년

· 상관도와 상관표는 중학교 3학년에서 그 의미가 충실하게 드러나도록 지도하기 어려운 개념이므로 삭제하였다.
· 원의 접선에 대한 성질의 '증명'을 '이해'로 약화시킴으로써 학습량을 경감시키되, 학

습자의 수준에 따라 차별적으로 증명을 지도하도록 하였다.

· 제7차 교육과정에서는 무리수를 도입할 때 무한소수를 소재로 하도록 명시하였으나, 2007 개정 교육과정에서는 이 조항을 삭제함으로써 다양한 방식으로 융통성 있게 도입할 수 있도록 하였다.

· 분산과 표준편차를 고등학교 1학년에서 중학교 3학년으로 이동하였다. 산포도 개념은 중학교 3학년의 평균과 연계하여 지도하는 것이 더 효율적이라는 측면에서 이루어진 이동이다.

· 일상생활에서 긴요하게 사용되는 대푯값으로 중앙값과 최빈값을 추가하였다.

⑤ 고등학교 1학년

· 시컨트, 코시컨트, 코탄젠트 함수는 모든 학생들이 갖추어야 할 수학적 소양이라는 성격에 부합되기 어렵다는 판단 하에 삭제하였다.

· 수학적 명제에 대한 이해를 용이하게 하고 논리적 사고력을 신장시키기 위하여 용어 '조건', '진리집합', '모든', '어떤'을 추가하였다.

· 경우의 수와 순열, 조합에 해당하는 내용은 수학적 소양과 관련되며 수학적 사고력 향상에도 적합하므로, 고등학교 2학년의 [수학 I]에서 고등학교 1학년으로 이동하였다.

(3) 수학적 사고력 및 의사소통 능력 신장 강조 필요

1990년대 이후로 학교 수학교육에서 강조하는 세계적인 흐름의 하나가 수학적 추론 능력, 의사소통 능력, 문제해결력과 같은 수학적 능력의 신장을 강조하는 것이다. 제7차 수학과 교육과정도 이러한 세계적 흐름을 반영하고는 있지만 다소 미흡하였다.

① 수학적 추론 교육

㉠ 수학적 추론 교육은 그동안 논리적 추론 또는 증명 교육 중심으로 이루어지는 경향이 있다. 그러나 수학을 깊이 있게 이해하고 활용할 수 있는 능력을 갖추기 위해서는 먼저, 귀납적 추론을 통해 학생 스스로 규칙성이나 공통성을 발견하거나 유추를 통해 추측해 보는 경험을 쌓는 것이 필요하다.

㉡ 귀납적 추론이나 유추적 사고 활동을 통해 학생 스스로 지식을 생산해내고, 스스로 생산해낸 수학적 지식을 논리적 추론이나 연역적 증명을 통해 정당화하는 경험을 쌓을 수 있을 때, 학생은 이 지식을 진정으로 자신의 것으로 내면화할 수 있게 되고, 다양한 상황에 자유롭게 활용할 수 있는 능력을 가질 수 있게 된다.

② 수학적 의사소통 능력

㉠ 현대 사회에서 강조하는 수학적 능력의 하나가 수학적 의사소통 능력이지만 제7차 교육과정에서는 그다지 강조하지 않았다.

㉡ 과학 기술을 기반으로 하고 있는 현대 사회에서는 학문이나 직업의 세계에서뿐만 아니라 일상생활에서도 다양한 과학 기술 정보를 자유롭게 의사소통하는 능력이 필요하며, 수학은 이러한 과학 기술 정보를 소통하는 데 기초적이고 필수적인 수단이다.

㉢ 학생들은 수학 수업을 통해 다양한 상황을 수학적 언어를 써서 표현하고, 타인의 수학적 언어를 이해하는 능력을 기르며, 수학적 언어를 사용하여 토론하는 능력을 기르는 것이 필요하다.

㉣ 학생들은 수학 수업에서도 동료들과 함께 사고하고, 협동하여 문제를 풀며, 자신의 생각을 설득력 있게 설명하고, 다른 사람의 생각을 경험하고 이해하며, 활발한 토론을 해 봄으로써 학습주제에 대해 더 깊이 이해하고 자신의 사고를 명확히 하고 세련되게 하며 발전시켜 갈 수 있다.

③ 문제해결력 신장

㉠ 문제해결력 신장은 제4차 수학과 교육과정 이래로 초 · 중등학교 수학교육에서 지속적으로 강조되어 왔다.

㉡ 수학적 문제해결능력은 수학 자체뿐만 아니라 일상생활 또는 학문이나 직업의 세계에서도 필수적이다.

㉢ 성공적인 문제해결 경험을 쌓아감으로써 학생들은 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 더욱 깊이 이해하고 활용할 수 있으며 수학에 대한 자신감을 기를 수 있게 된다.

⇒ 결론적으로, 수학적 사고력 및 의사소통 능력 신장 강조

ⓐ 수학적 사고력의 신장은 초 · 중등학교 수학교육의 핵심 목표이므로 개정 교육과정에서도 지속적으로 강조하고 있다.

ⓑ 수학적 능력 신장을 강조하기 위하여 수학과 교육목표, 내용, 교수 · 학습 방법, 평가 등 교육과정 전반에서 일관되게 수학적 능력 신장과 관련된 언급을 하고 있다.

■ 교수 · 학습 방법

사. 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.

(2) 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

아. 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.

(2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으

로 의사소통할 수 있게 한다.

(3) 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

자. 문제해결력을 신장시키기 위하여 교수·학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.

(2) 학생 스스로 문제상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.

(3) 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.

(4) 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

■ 평가

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생들의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수·학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

(2) 수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력

(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(4) 수학에 대한 정의적 태도 개선 필요

① 그동안 수학과 교수·학습에서는 문제해결력 신장과 같은 인지적 측면을 주로 강조해왔다. 그러나 학생들의 수학에 대한 정의적 태도가 개선되지 않으면 학생들의 수학적 능력의 향상을 기대하기 어렵고, 점차 수학 학습을 기피하거나 수학에 대한 두려움이나 혐오감을 가지는 학생들이 증가하게 되어, 학생 개인의 경쟁력뿐만 아니라 우리나라의 국가 경쟁력도 저하될 우려가 있다.

② 국제 학업 성취도 비교 연구 결과를 살펴보면, 우리나라 학생들의 수학 성취도는 최상위권이지만, 수학에 대한 자신감과 수학의 가치에 대한 인식이 상대적으로 매우 낮고,

초등학교에서 중학교로 올라갈수록 수학 학습에 대한 흥미도가 점점 더 낮아지는 등 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나고 있어, 이를 개선하려는 노력을 적극적으로 기울일 필요가 있다.

⇒ 결론적으로, 수학의 가치 제고와 정의적 측면 강조

㉠ 국제 학업 성취도 비교 평가에서 우리나라 학생들의 수학 성취도가 전 세계에서 최상위권이면서도 수학에 대한 관심과 흥미가 적고 수학에 대한 자신감이 부족하며 수학에 대한 부정적인 태도가 다른 나라에 비해 매우 높게 나타나는 사실은 학생의 입장에서뿐만 아니라 국가적으로도 심각한 문제가 아닐 수 없다. 이러한 현실을 개선하기 위하여 수학과 교육과정에서는 수학과 교육목표에서부터 수학에 관심과 흥미를 갖도록 하고, 수학의 가치를 이해하며 수학에 대한 긍정적 태도를 기르도록 할 것을 강조하였다.

㉡ 교과서를 편찬할 때에도 학생들에게 관심과 흥미를 유발할 수 있는 소재나 상황을 적극적으로 활용하도록 하고, 수학이 활용되는 다양한 사례를 경험하거나 수학이 인류 문명의 발전에 기여하고 있음을 알게 하며, 타교과 학습과의 연계성 및 실생활 연관성을 강조하였다. 이를 통해 수학의 유용성과 수학 학습의 필요성을 인식할 수 있게 하며, 학생들이 수학 학습에 흥미를 느끼고 지속적으로 수학을 탐구하고 활용할 수 있도록 안내하도록 하였다.

(5) 진로 및 효율적 운영을 고려한 선택 과목 개설 필요

개정 교육과정에서는 고등학교 수학과 선택 과목을 학생들의 진로나 사회적 요구뿐만 아니라 미래 생활이나 학습에서의 필요성, 교육과정의 효율적 운영 등을 고려하여 개설하고 각 과목의 교육 내용을 선정하였다.

① 진로와의 연계 강화를 고려한 선택 과목을 개설하였다.

㉠ 대학에서 필요로 하는 수학의 내용과 수준은 전공별로 다를 수 있지만, 현재 계열별 대학 진학의 절차와 형태 및 이에 따른 수학의 필요 수준을 고려하여 학생들의 필요에 따라 과목을 선택할 수 있다.

㉡ 인문·사회 계열로 진학하려는 학생들의 인지 수준에 적합하고, 수학적 소양을 길러줄 수 있으며, 학생들의 논리적 사고력과 합리적인 판단 능력 및 문제해결능력 신장에 적합한 교육 내용으로 구성된 수학을 제공하는 것이 필요할 뿐 아니라 고등학교 교육과 대학 교육이 원활히 연계될 수 있도록 적정 수준의 수학 내용이 이들에게 제공될 필요가 있다. 이를 위하여 인문·사회 계열로 진학하려는 학생들에게도 미분과 적분의 기초적인 내용을 학습할 수 있는 기회를 제공하였다.

㉢ 대학에서 자연과학이나 공학을 전공하는 데 초월함수의 미적분에 대한 이해는 필수적이므로, 자연 계열로 진학하는 학생들이 그와 같은 내용을 기본적으로 이수할 수 있도록 선택 과목 내용을 구성하였다.

② 교육과정의 효율적 운영을 고려한 선택 과목을 개설하였다.

㉠ 자연과학이나 공학과 관련하여 학습을 계속하려는 학생들은 [수학 Ⅰ], [수학 Ⅱ], [적분과 통계], [기하와 벡터]의 4개 과목의 내용을 학기 별로 적절히 나누어 이수할 수 있도록 과목 및 과목별 내용을 구성하였다.

㉡ 선택 비율이 상대적으로 저조하고 [수학 Ⅰ]이나 국민공통 기본 교육과정의 수학과 중복되는 내용이 많은 과목인 [확률과 통계]와 [이산수학]의 경우, 중복되는 내용을 이동, 삭제 및 재구성하여 선택 과목별 내용을 재편성 혹은 통폐합하거나 이들 과목의 각 내용 요소를 포괄하는 새로운 [수학의 활용] 과목을 개설하였다.

③ 과목의 성격을 고려하여 내용을 선정, 조직하였다.

㉠ 제7차 교육과정에서 심화 선택 과목으로 개설되어 있는 [확률과 통계]는 10단계 수학에의 도달 여부에 관계없이 실생활에 필요한 확률과 통계 관련 내용을 학습하기 위하여 모든 학생들이 선택할 수 있는 과목이고, [이산수학] 역시 10단계 수학에의 도달 여부와 관계없이 모든 학생들이 선택할 수 있는 과목으로 이들 두 과목은 심화 선택 과목의 성격에 부합되지 않는다. 따라서 선택 과목의 성격을 보다 명료화하기 위해 각 과목별 성격을 명료화 하고, 그에 따른 과목별 내용 선정과 조직을 새로이 하였다.

2) 2007 개정 수학과 교육과정(전체 내용)과 변경 사항

(1) 성격

① 수학과는 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.

② 수학적 개념의 깊이 있는 이해와 활용, 합리적인 문제해결능력과 태도는 모든 교과를 성공적으로 학습하는 데 필수적일 뿐만 아니라 개인의 전문적인 능력을 향상시키고 민주 시민으로서 합리적 의사결정 방법을 습득하는 데에도 필요하다. 또한 수학적 지식과 사고 방법은 오랜 역사를 통해 인간 문명 발전의 지적인 동력의 역할을 해왔으며, 미래의 지식기반 정보화 사회를 살아가는 데 필수적이다.

③ 중학교와 고등학교 수학과 교육 내용[19]은 ‘수와 연산’, ‘문자와 식’, ‘함수’, ‘확률과 통

계', '기하'의 5개 영역으로 구성된다.

㉠ 중학교의 경우, '수와 연산' 영역에서는 집합, 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산, 근삿값을, '문자와 식' 영역에서는 다항식의 개념과 사칙계산, 일차방정식과 일차부등식, 연립일차방정식과 연립일차부등식, 이차방정식의 풀이와 활용을, '함수' 영역에서는 함수 개념, 일차함수의 개념과 활용, 이차함수의 개념을, '확률과 통계' 영역에서는 도수분포에 대한 이해와 활용, 확률의 기본 성질, 대푯값과 산포도를, '기하' 영역에서는 기본 도형의 성질에 대한 이해와 증명, 피타고라스의 정리, 삼각비에 대한 이해와 활용을 다룬다.

㉡ 고등학교의 경우, '수와 연산' 영역에서는 집합의 연산법칙, 명제의 이해와 활용, 실수의 성질, 복소수의 개념과 사칙계산을, '문자와 식' 영역에서는 다항식의 연산과 활용, 유리식과 무리식의 계산, 이차방정식의 활용, 고차방정식, 연립방정식, 이차부등식, 연립부등식, 절대부등식의 풀이를, '기하' 영역에서는 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동, 부등식의 영역의 이해와 활용을, '함수' 영역에서는 이차함수의 활용, 유리함수, 무리함수, 삼각함수의 개념과 활용을, '확률과 통계' 영역에서는 순열과 조합의 이해를 다룬다.

④ 수학의 교수·학습에서는 학생이 구체적인 경험에 근거하여 여러 가지 현상을 수학적으로 해석하고 조직하는 활동, 구체적인 사실에서 추상화 단계로 점진적으로 나아가는 과정, 직관이나 구체적인 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다.

⑤ 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제를 명확히 이해하고 합리적인 해결 계획을 세워 실행하며, 반성을 통하여 풀이과정을 점검하고 다양하게 활용하는 태도를 기르도록 한다.

⑥ 수학적 지식과 기능을 활용하여 실생활의 여러 가지 문제를 해결해 봄으로써 수학의 필요성과 유용성을 인식하고, 수학 학습의 즐거움을 경험함으로써 수학에 대한 긍정적인 태도를 갖도록 한다.

(2) 목표

수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

19) 초등학교 수학과 교육 내용은 '수와 연산', '도형', '측정', '확률과 통계', '규칙성과 문제해결'의 5개 영역으로 구성된다. '수와 연산' 영역에서는 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산을, '도형' 영역에서는 평면도형과 입체도형의 개념과 성질을, '측정' 영역에서는 길이, 시간, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피의 개념과 활용을, '확률과 통계' 영역에서는 자료의 정리와 해석, 경우의 수, 확률의 의미를, '규칙성과 문제해결' 영역에서는 규칙 찾기, 비와 비례, 문자의 사용, 간단한 방정식, 정비례와 반비례, 여러 가지 문제해결 방법을 다룬다.

1) 초등학교

기초적인 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변에서 일어나는 현상과 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

가. 생활 주변에서 일어나는 현상을 수학적으로 관찰하고 조직하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변에서 일어나는 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

2) 중학교

기본적인 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 사회나 자연의 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

가. 사회 현상이나 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 사회 현상이나 자연 현상의 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

3) 고등학교

발전된 수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

가. 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통하여 수학의 발전된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대한 관심과 흥미를 지속적으로 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다.

(3) 내용체계[20)]

1) 국민공통 기본 교육과정 기간: 중학교 1학년~고등학교 1학년

학교급 / 학년 / 영역	중학교 1학년	중학교 2학년	중학교 3학년	고등학교 1학년
수와 연산	· 집합 · 소인수분해 · 최대공약수, 최소공배수 · 십진법과 이진법 · 정수의 개념과 대소 관계, 사칙계산 · 유리수의 개념과 대소 관계, 사칙계산	· 순환소수의 의미 · 유리수와 순환소수의 관계 · 근삿값과 오차, 참값의 범위 · 근삿값의 표현 방법	· 제곱근의 뜻과 성질 · 무리수의 개념 · 수직선에서 실수의 대소 관계 · 근호를 포함한 식의 사칙계산	· 집합의 연산법칙 · 명제와 조건 · 명제의 역, 이, 대우 · 필요조건과 충분조건 · 실수의 연산 성질, 대소 관계 · 복소수의 뜻과 기본 성질 · 복소수의 사칙계산
문자와 식	· 문자의 사용 · 식의 값 · 일차식의 덧셈과 뺄셈 · 일차방정식 · 등식의 성질	· 이차식의 덧셈과 뺄셈 · 지수법칙 · 다항식의 곱셈, 곱셈 공식 · 다항식의 나눗셈 · 등식의 변형 · 미지수가 2개인 일차 방정식 · 연립일차방정식 · 부등식의 해, 기본 성질 · 일차부등식 · 연립일차부등식	· 간단한 다항식의 인수 분해 · 이차방정식과 그 해 · 이차방정식의 활용	· 다항식의 연산 · 항등식 · 나머지정리 · 다항식의 인수분해, 약수와 배수 · 유리식, 무리식의 계산 · 이차방정식의 판별식, 근과 계수의 관계 · 간단한 삼차방정식과 사차방정식 · 연립방정식 · 부등식의 성질과 활용 · 절댓값을 포함한 일차 부등식 · 이차부등식과 연립 이차부등식 · 절대부등식
함수	· 함수의 개념 · 순서쌍과 좌표 · 함수를 표, 식, 그래프로 나타내기 · 함수의 활용	· 일차함수의 뜻과 그래프 · 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계 · 일차함수의 활용	· 이차함수의 뜻 · 이차함수의 그래프의 성질	· 함수의 뜻과 그래프 · 합성함수, 역함수 · 이차함수의 활용 · 유리함수, 무리함수 · 일반각과 호도법 · 삼각함수의 그래프의 성질 · 삼각함수의 성질 · 삼각방정식과 삼각부등식 · 사인법칙과 코사인법칙 · 삼각함수를 활용한 삼각형의 넓이

20) 교육과정의 내용은 '교육인적자원부 고시 제2007-79호'를 참고

학교급 학년 영역	중학교			고등학교
	1학년	2학년	3학년	1학년
확률과 통계	· 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 · 도수분포표에서의 평균 · 상대도수의 분포와 누적도수의 분포	· 경우의 수 · 확률의 뜻과 기본 성질 · 간단한 확률의 계산	· 중앙값, 최빈값, 평균 · 분산, 표준편차	· 합의 법칙, 곱의 법칙 · 순열 · 조합
기하	· 점, 선, 면, 각 · 점, 직선, 평면의 위치관계 · 평행선의 성질 · 간단한 작도 · 삼각형의 결정조건과 합동조건 · 다각형의 성질, 내각과 외각의 크기 · 부채꼴의 중심각과 호의 관계 · 부채꼴의 넓이와 호의 길이 · 원과 직선, 두 원의 위치관계 · 다면체, 회전체의 성질 · 입체도형의 겉넓이와 부피	· 명제의 뜻과 증명의 의미 · 삼각형과 사각형의 성질 증명 · 도형의 닮음 · 닮은 도형의 성질 · 삼각형의 닮음조건 · 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 · 삼각형의 중점연결정리 · 닮은 도형의 넓이와 부피	· 피타고라스의 정리 · 삼각비 · 원에서 현, 접선에 대한 성질 · 원주각의 성질 · 원에 내접하는 사각형의 성질 · 원과 비례에 관한 성질	· 두 점 사이의 거리 · 선분의 내분, 외분 · 직선의 방정식 · 두 직선의 평행, 수직 조건 · 점과 직선 사이의 거리 · 원의 방정식 · 좌표평면에서의 원과 직선의 위치관계 · 평행이동과 대칭이동 · 부등식의 영역

2) 선택 중심 교육과정 기간: 고등학교 2, 3학년

① [수학의 활용]: 국민공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 학습한 학생이면 선택할 수 있는 과목으로, 실생활에 필요한 수학적 지식과 기능을 습득하도록 하는데 적합하다. 실생활의 여러 가지 문제를 수학의 관점에서 이해하고 합리적으로 해결하는 능력을 신장시키며, 수학에 대한 관심과 흥미를 길러 수학에 대한 긍정적 태도를 기를 수 있다.

영역	내용
명제와 논리	· 명제의 합성
	· 합성명제와 논리
지수와 로그	· 지수와 로그
	· 지수함수와 그 그래프
	· 로그함수와 그 그래프
수열	· 등차수열과 등비수열
	· 수열의 합
확률과 통계	· 확률과 그 활용
	· 통계와 그 활용
도형과 그래프	· 연결 상태가 같은 도형
	· 평면그래프와 정다면체
	· 그래프를 이용한 의사결정의 최적화

② [수학 I]: 국민공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 다음 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다. ‘수학 I’의 학습을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학적 사고 능력을 키워, 합리적이고 창의적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기를 수 있다.

영역	내용
행렬과 그래프	·행렬과 그 연산
	·연립일차방정식과 행렬
지수함수와 로그함수	·그래프와 행렬
	·지수
	·지수함수와 그 그래프
	·지수방정식과 지수부등식
	·로그
	·로그함수와 그 그래프
수열	·로그방정식과 로그부등식
	·등차수열과 등비수열
	·여러 가지 수열
	·수학적 귀납법
수열의 극한	·알고리즘과 순서도
	·무한수열의 극한
	·무한급수

③ [미적분과 통계 기본]: 국민공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문과학, 사회과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

영 역	내 용
함수의 극한과 연속	· 함수의 극한
	· 함수의 연속
다항함수의 미분법	· 미분 계수
	· 도함수
	· 도함수의 활용
다항함수의 적분법	· 부정적분
	· 정적분
	· 정적분의 활용
확률	· 조합
	· 확률의 뜻과 활용
	· 조건부 확률
통계	· 확률 분포
	· 통계적 추정

④ [수학Ⅱ]: 국민공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다. 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다.

영역	내용
방정식	· 분수방정식
	· 무리방정식
부등식	· 삼차부등식과 사차부등식
	· 분수부등식
삼각함수	· 삼각함수의 덧셈정리
	· 삼각방정식
함수의 극한과 연속	· 함수의 극한
	· 함수의 연속
미분법	· 미분계수
	· 도함수
	· 여러 가지 함수의 미분법
	· 도함수의 활용

⑤ [적분과 통계]: 국민공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 과목이다. 심화된 수학적 지식과 사고방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다.

영역	내용
적분법	·부정적분
	·정적분
	·정적분의 활용
순열과 조합	·순열과 조합
	·이항정리
확률	·확률의 뜻과 활용
	·조건부확률
통계	·확률분포
	·통계적 추정

⑥ [기하와 벡터]: 국민공통 기본 교육기간인 고등학교 1학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 과목이다. 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연 과학 및 공학 분야의 학습에 기초를 제공한다.

영역	내용
일차변환과 행렬	·일차변환과 행렬
	·일차변환의 합성과 역변환
이차곡선	·포물선
	·타원
	·쌍곡선
공간도형과 공간좌표	·공간도형
	·공간좌표
벡터	·벡터와 그 연산
	·벡터의 내적
	·직선과 평면의 방정식

(4) 교수 · 학습 방법

가. 교육과정에 제시된 내용은 모든 학생이 도달해야 할 성취 기준이므로, 학생의 특성, 학년 간 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 적절히 지도되어야 한다.
나. 학년별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.
다. 교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.
라. 수학과 수업에서는 교육 내용과 학생의 특성을 고려하여 발견학습, 탐구 학습, 협동 학습, 개별 학습, 설명식 교수 등 다양한 교수 · 학습 방법을 활용할 수 있다.
마. 수학 수업에서 의미 있는 발문을 하기 위하여 다음 사항에 유의한다.
  (1) 발문은 학생의 인지발달과 경험을 고려하여 선택하고, 그에 대한 반응을 의미 있게 처리한다.
  (2) 가능하면 열린 형태의 발문을 하여 창의적인 답이 나올 수 있게 한다.
바. 수학적 개념, 원리, 법칙의 교수 · 학습에서는 다음 사항에 유의한다.
  (1) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학적 개념, 원리, 법칙을 도입한다.
  (2) 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하게 한다.
사. 수학적 사고와 추론 능력을 발전시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
  (1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보게 할 수 있다.
  (2) 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.
아. 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
  (1) 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
  (2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 한다.
  (3) 수학을 표현하고 토론하면서 자신의 사고를 명확히 하고 반성함으로써 의사소통이 수학을 학습하고 활용하는 데 중요함을 인식하게 한다.

자. 문제해결력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.
(4) 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.
차. 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 여러 가지 현상에서 접할 수 있는 수학을 다룸으로써, 수학에 대한 가치를 인식하고 수학의 필요성을 느낄 수 있게 한다.
(2) 수학에 대한 흥미, 관심, 자신감을 갖도록 학습 동기와 의욕을 유발한다.
카. 수학 교수 · 학습 과정에서 교육기자재의 활용은 다음 사항에 유의한다.
(1) 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.
(2) 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보하여 활용할 수 있다.
타. 각 학교에서는 학생 개인의 학습 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 수준별 수업을 운영할 수 있다. 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.
(1) 수준별 수업은 학교 상황에 맞게 수준별 집단을 편성하여 운영할 수 있다.
(2) 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 운영한다.

1) 교육과정 내용의 지도 방법

① 교육과정에 제시된 내용은 어느 특정 학생들을 위하여 제시된 기준이 아니라 모든 학생들이 학습해야 할 내용이다. 이에 수업에서는 모든 학생이 교육과정의 내용을 습득할 수 있도록 수학교과가 가지고 있는 위계적이고 누적적이며 단계적인 특성을 감안하

고, 학생의 특성, 학년 간 내용의 연속적인 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 학생 개개인에 알맞은 지도가 이루어질 필요가 있다.

② 교과서와 같은 교수 · 학습 자료의 개발이나 실제 수학 학습의 지도를 위한 교수 · 학습의 계획 시에는 각 내용간의 위계나 관계 또는 난이도, 학교 여건 등을 고려하여 그 순서나 내용을 적절하게 변화시켜 재구성할 필요가 있다.

(예) 학생들이 잘 이해하지 못하는 내용일 경우에는 같은 영역 내에서도 쉽게 이해하는 부분부터 지도한 후 어려운 내용을 지도하거나, 내용 제시 순서를 학생들의 생각의 흐름에 맞게 바꾸거나, 교육과정에 제시된 내용보다 상세하게 설명이 필요한 경우에는 이해하기 쉽게 개발한 교수 · 학습 자료를 사용할 수 있다.

2) 보충 · 심화 학습의 기회 부여

(가) 보충 학습의 기회 부여

① 교육과정에는 기본 내용만 제시하고 있으며, 교육과정상 명시된 기본 내용을 지도한 후 여전히 학습목표에 제대로 도달하지 못한 학생들에게는 보충 학습의 기회를 제공할 수 있다.

② 강제적 규정은 아니지만 교육과정에 제시된 기본 내용에 대한 일반적인 이해나 학습이 제대로 이루어지지 못했다고 판단되는 학생들을 위하여 제반 여건이 허락하는 범위 내에서 보충 학습의 기회를 부여할 수 있다.

③ 보충 학습을 받아야 할 학생들의 학업 수준이나 상태가 다양하므로 교육과정 문서에 그 내용이나 범위, 수준을 일률적으로 정하기가 어렵다. 따라서 교사들이 해당 학생의 학업 수준이나 상태에 따라 그 내용과 방법을 결정해야 한다.

④ 보충학습 내용: 기본 내용의 학습에서 발생하는 체계적 오류나 전반적인 이해가 어려운 내용들 중에 필수적으로 알아야 될 부분으로 한다.

⑤ 보충학습 지도 방식: 해당 내용의 수준을 하향 초등화 하거나 구체적 상황이나 조작물 사용에 의한 직관적 방법이나 유추와 같은 방법의 사용이 가능하다.

(나) 심화 학습의 기회 부여

① 교육과정에 제시된 기본 내용을 지도한 후 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 제공할 수 있으며 보충 학습과 마찬가지고 교육과정상 명시되어 있지 않다.

② 심화 학습내용: 기본 학습내용인 이미 학습한 내용에 대한 이해와 적용의 폭을 넓히거나 그 내용과 관련하여 수업 자료를 좀더 풍요롭게 제공하는 방식으로 내용을 상세화 할 수 있다.

③ 심화 학습 지도 방식: 심화 학습이 자칫 해당 학년의 내용의 범위나 수준을 벗어나거나 난이도 면에서 지나치게 어려운 경우는 피해야 할 것이다. 즉, 상위 학년에서 학습할 내용을 미리 도입하거나 그 내용과 관련되어 있는 내용을 다루어서는 안 된다.

3) 다양한 교수 · 학습 방법의 제공

① 수학 학습 지도의 방법은 수학 학습내용의 성격이나 학습 상황에 따라 받아들이는 학생들뿐만 아니라 교육 내용의 특성이 일정하지 않으므로 다양화할 필요가 있다. 이 때 특정한 한 가지 방법만을 활용하는 수업도 가능하지만 모든 수업 방법이 함께 어우러진 형태의 수업 방법도 활용할 수 있다.

② 수학 교수 · 학습에 있어서 교사의 설명에 주로 의존하는 방식을 지양해야 한다. 그렇다고 해서 교사의 설명식 교수 방법을 전면 배제해야 한다는 것은 아니다. 즉, 교사의 치밀한 준비에 의해 진행되는 설명식 교수 방법을 기본으로 하여 부분적으로 해당 내용의 성격이나 학습자의 심리적 상태 등을 고려하여 수업의 주체를 학습자로 옮겨야 한다.

③ 발견식의 방법이나 학습자의 능동적인 조작 활동을 통한 탐구 방식의 학습, 또는 교사와 학생이 함께 학습 활동을 전개하는 방식 등으로 학습자의 능동적이고 적극적인 학습 활동에의 개입을 중시하는 소위 활동주의 학습 원리를 적용하여 학습 효과를 극대화시킬 수 있다.

④ 발문이 일어나는 상황은 교사와 학생이 직접 연결되어 공동의 학습이 일어나는 심리적 상황에 놓이게 되므로 학습자의 학습 심리적인 면을 충분히 파악한 후에 학생의 인지 발달과 경험을 고려하여 이루어져야 한다.

⑤ 발문은 전반적으로 학생으로 하여금 자신의 독창적인 생각을 부담 없이 펼칠 수 있는 기회를 가질 수 있도록 비평가적인 열린 방식이 되어야 한다. 이와 반대로 교사가 준비된 답 중에서 선정하는 방식의 대답이나, 단답식의 대답을 요구하는 것은 지양해야 한다.

⑥ 교사는 발문을 통하여 개별 학생의 학습 상태의 점검이나 문제점을 해결할 수 있으며, 한 학생에 대한 발문을 통하여 유사한 입장에 있는 나머지 학생들의 학습에 대한 스스로의 점검과 확인은 물론 각자의 생각을 정리할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

⑦ 수학의 개념, 원리, 법칙의 지도 시 해당 내용이 포함되어 있거나, 그와 같은 내용에 대한 생각을 일으킬 수 있는 친숙한 생활환경이나 장면 또는 상황을 설정하여 이와 같은 내용에 대한 학습이 효과적으로 이루어질 수 있게 준비하여야 한다.[21]

---

21) 수학이 학생들에게 재미없고 어렵게 인식되는 것은 근본적으로 수학의 내용을 최종적인 형태로, 즉 수학화된 또는 추상화된 상태로 해당 개념, 원리, 법칙 등을 전달하고 받아들이기를 요구하기 때문이다.

⑧ 교사가 세련되고 완전하게 구성된 내용을 최종적으로 교수 · 학습 과정에서 제시하고 이를 학생들이 이해하고 수용하기를 바라기보다는 그와 같은 최종의 내용 상태에 이르기까지의 과정을 학습자가 스스로 경험을 할 수 있는 기회를 제공해야 한다.[22] 즉 학습자로 하여금 자신의 학습 전 과정을 자력으로 이끌어 갈 수 있는 기회와 경험을 허락함으로써 학습하는 방법을 학습할 수 있는 능력을 키워 줄 수 있는 것이다.

4) 수학적 능력의 신장을 위한 교수 · 학습 방법

① 수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것으로, 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다. 그러므로 학습자 중심의 교수 · 학습 활동을 위하여 학생 스스로 귀납, 유추 등을 통해 수학적 사실을 추측할 필요가 있으며, 또한 이 결과를 판단하고, 정당화하거나 증명해 보게 함으로써 수학적 사고와 추론 능력을 발전시킬 수 있다.

② 수학 교수 · 학습에서 교사는 학생들의 분석력과 종합력을 배양함으로써 학생들이 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성할 수 있도록 하여야 한다.

③ 수학적 의사소통을 강조하여 미래를 살아가는 학생들에게 합리적으로 사고하고 이를 합리적으로 표현함으로써 삶에 필요한 수학적 소양을 기르도록 해야 한다.

④ 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용할 수 있어야 한다. 또한 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하고 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있을 뿐만 아니라, 개인별로 문제를 푸는 활동을 포함하여, 말하기, 듣기, 읽기, 쓰기와 같은 다양한 방법을 활용하여야 한다.

⑤ 문제해결 교육의 목적은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 것이 아니라 수학을 학습하게 하는 것이다. 이러한 문제해결은 어느 한 단원에서 강조하여 다루는 것이 아니라 전 학년의 수학 학습의 지도과정에서 계속적으로 지도하여야 한다.

⑥ 문제해결식의 학습 지도는 학생 스스로의 다양한 사고 활동이나 사고 실험을 요구하는 것으로, 단편적인 전략의 사용만이 아닌 이미 학습된 내용을 종합적으로 활용하여 자신만의 독창적 사고를 구성하고 학생의 경험과 욕구를 바탕으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있도록 훈련할 수 있는 기회를 제공한다.

22) 비록 그 과정에서 여러 가지 시행착오에 따르는 비효율적, 비경제적인 면도 예상되지만, 결국 학습은 개별 학습자에 의하여 이루어짐을 감안한다면 학습자가 스스로 경험을 할 수 있는 기회를 갖는 것을 소중히 생각할 필요가 있다.

⑦ 해결한 문제는 그 결과의 옳고 그름만이 중요한 것이 아니라, 문제를 풀어가는 과정, 방법, 다양한 전략의 활용까지도 중요하다. 또한 문제를 해결하는 활동뿐만 아니라 주어진 조건이나 학습한 내용으로 문제를 만들어 보는 활동과 해결하는 과정을 거듭함으로써 문제해결력이 신장될 수 있다.

⑧ 문제해결 활동을 위한 문제들은 수학적 문제뿐만 아니라 생활주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제들을 포함하는 것이 바람직하다. 이런 활동을 경험한 학생들은 다양한 상황에서 문제들을 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 실생활에 활용하여 일반화할 수 있을 것이다.

5) 수학에 대한 긍정적 태도 신장을 위한 교수 · 학습 방법

① 학생들에게 친숙한 생활주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등을 학습 소재로 적극적으로 활용하여 학생들의 관심과 흥미를 유발하는 것이 필요하다.

② 수학이 실생활의 여러 가지 문제를 해결하거나 타 교과 학습에 중요한 역할을 함을 알려주는 다양한 사례를 접하게 하고, 수학이 인류 문명의 발전에 기여하고 있는 사례를 이해하기 쉽고도 흥미롭게 알려주는 것이 필요하다.[23)]

③ 학생들은 관심 있는 분야의 문제를 수학적 지식과 사고 방법으로 분석하고 조직하여 문제를 해결해보고 수학 학습에서 성공하는 경험을 쌓을 때, 수학 학습에 관심과 흥미, 학습에 대한 자신감을 가질 수 있으므로, 학생들에게 이러한 기회를 풍부하게 제공하는 것이 필요하다.

④ 학생들이 수학 학습과정에서 어려움을 겪을 때에는 학습과정의 문제점을 점검해보고 문제점을 해결할 수 있도록 조언해 주며, 수학 학습에 자신감을 잃지 않도록 격려하고 도와줌으로써 학생들이 용기와 인내심을 갖고 꾸준히 수학 학습에 노력을 기울일 수 있도록 해 주는 것이 필요하다.

6) 교육 기자재의 활용

① 중학교 이상의 학생의 인지발달은 초등학생과는 달리 구체적 조작물을 활용한 활동보다는 반구체물이나 상징적 도구를 활용한 활동을 통하여 이루어진다는 점을 감안하여 새로운 개념이나 내용의 학습-지도 과정에서 활용 가능하거나 학습자 스스로 실험해 볼 수 있는 도구를 활용하는 것이 바람직하다.

23) 이러한 경험을 통해 학생들은 수학의 가치와 유용성을 깨달을 수 있으며, 수학 학습의 중요성과 필요성을 인식할 수 있을 것이다.

② 교사는 해당 기자재의 사용 방식이 그 기자재를 가지고 학습하고자 하는 내용이 포함하고 있는 본연의 목적 달성을 오히려 저해하는 방식이 되지 않게 면밀히 검토할 필요가 있으며 같은 기자재일지라도 그 사용 방식에 따라 얻을 수 있는 효과가 다양할 수 있으므로 사용 효과를 다양화, 극대화시키기 위한 준비 작업에 정성을 기울일 필요가 있다.

③ 수학의 학습과 지도에 활용할 수 있는 교육 기자재로는 다양한 도형(입체도형, 평면도형 등), 직접 조립할 수 있는 구체물과 계산기[24)], 컴퓨터[25)] 등과 이를 활용할 수 있는 다양한 소프트웨어의 활용이 있다.

④ 교육기자재의 활용을 강조한다 하더라도 실제 수업할 때 필요한 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 확보해야 한다.

7) 수준별 수업의 운영

① 수학이 학생 개개인에 따라 학습 성취도차가 큰 교과임을 생각할 때, 효율적인 수학 교수 · 학습을 위해서는 개개의 학생 수준에 적합한 수준별 수업을 운영하는 것이 바람직하다.

② 각 학교에서는 학생 개인의 학습 능력과 수준, 적성, 장래희망 등은 물론, 학교별 학습 환경의 차이도 반영하여 (학습내용의 소재나 배경의 설정 시 해당 학교의 지역적, 사회적 측면을 고려하여 학습과 생활환경과의 괴리감을 극소화하는 방법으로) 실질적인 수학 학습 지도가 이루어질 수 있도록 할 필요가 있다.

③ 학습자 중심의 수준별 수업의 효율적 운영을 위하여 학습자의 학습 능력과 수준, 진로, 적성 등의 개인차를 고려한 교수 · 학습의 개별화를 추구해야 한다. 그리고 수준별 수업은 학교 상황에 맞게 수준별 집단을 편성하여 운영할 수 있다.

④ 무엇보다도 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 운영할 수 있다.

(5) 평가 방법

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하여 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 교수 활동과 수업 방법을 개선하는 데 활용한다.

24) 필요한 최소한의 계산 기능과 그 원리를 습득한 후 계산기를 문제해결과정에 적절하게 활용함으로써 실생활에서 흔히 접하게 되는 복잡한 숫자 다루기 등의 학습 효과를 배가시킬 수 있게 된다.

25) 그림이나 도형을 그리고 이동, 변환을 시킬 수 있게 설계된 컴퓨터 소프트웨어의 활용은 학생들로 하여금 실생활에서 이해하기 어려운 부분에 대한 직관적이고 용이한 이해를 가능하게 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지발달 수준을 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.
다. 수학 학습의 평가는 수업의 전개 과정에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등의 적절한 평가 방식을 택하여 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.
라. 수학 학습의 평가에서는 획일적인 방법을 지양하고 지필평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 통해 수학 교수·학습을 향상시킬 수 있게 한다.
마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수·학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.
(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
(2) 수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력
(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력
(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력
(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력
(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 학생의 수학에 대한 바람직한 가치관이나 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감 등의 정도를 파악한다.
사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습내용에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

1) 평가의 목적

(가) 학생

① 학생의 성취 정도는 학생이 이미 학습한 수학 내용을 어느 정도 이해하고 있는가를 확인하는 데에 도움을 준다.

② 평가를 통해 학생이 이미 학습한 수학 내용 중에서 강점을 갖는 부분이 어디이며 취약한 부분이 어디인가를 확인할 수 있다.

③ 학생은 평가 결과를 토대로 자신에게 취약한 부분으로 나타난 수학 내용의 학습에 더욱 집중할 필요성을 느끼게 된다.

④ 학생 자신이 강점을 갖는 수학 내용을 기초로 하여 더욱 고차원적인 수학 내용의 학습으로 진행해 갈 수도 있다.

(나) 교사

① 교사는 평가 결과를 토대로 자신의 교수 방식을 개선할 수 있어야 한다.

② 교사 자신의 교수 방식을 개선하기 위해 학생들의 학습 결과를 점검하는 것이다.

(예) 평가 결과에서 나타난 학생들의 오개념은 교사가 자신의 교수 방식을 성찰하는 단서로 활용될 수 있다. 교사는 학생들의 오개념 분석을 통해, 교사의 어떤 교수 방식이 학생들의 오개념을 초래하는지 그렇지 않는지를 확인할 수 있다. 학생들이 왜 그와 같은 오개념을 나타내는지를 교사 자신의 교수 방식과 관련지어 분석함으로써 교수 방식을 개선할 수 있다.

③ 교사는 평가를 통해, 학생들이 학습의 결과로 실제로 가지고 있는 지식과 교사가 교수의 결과로 학생들이 가지고 있을 것으로 예상하는 지식 사이에 어느 정도의 거리가 존재하는지를 확인할 수 있다.

2) 평가의 방법

① 진단평가는 학생의 선행 학습내용을 확인하는 데에, 형성평가는 교수 · 학습을 안내하는 데에, 그리고 총괄평가는 학생의 발전 상태를 확인하는 데에 그 목적이 있다. 진단평가는 수업의 시작 단계에서, 형성평가는 수업을 진행하고 있는 과정에서, 그리고 총괄평가는 수업을 마무리한 상황에서 실시하는 것이 보통이다.

㉠ 진단평가: '해당 차시 수업을 위해 학생들이 선행적으로 필요한 기능과 지식을 가지고 있는가?', '학생들은 지도되어야 할 내용에 대해 어느 정도 알고 있는가?' 등을 평가한다. 진단평가는 학생이 이미 알고 있는 것을 확인하여, 교사가 학습을 위한 가장 효율적인 시작점에 학생을 배치할 수 있도록 도움을 준다.

㉡ 형성평가: '학생은 해당 수업에서 성취해야 할 목표를 향해 적절하게 진행하고 있는가?'를 주로 평가한다. 형성평가는 교사가 학생들의 진행 정도나 향상 상태를 확인하고 수업을 올바른 방향으로 진행하는 데에 도움을 준다.

㉢ 총괄평가: 한 시간의 수업이나 한 단원의 교수 활동에서 목표로 한 바를 학생들이 도달했는가를 결정하기 위해 수행된다. 교사는 총괄평가를 통해 '학생들은 해당 수업을 통해 성취했어야 할 목표에 도달했는가?', '학생들이 수업에서 지도한 수학 내용을 알고 이해했는가?', '학생들이 수업에서 학습한 내용을 적용할 수 있는가?', '학생들이 다음에 다룰 수학 내용을 학습하기에 충분히 높은 수준에 도달했는가?' 등을 확인할 수 있다.

② 학생들의 수학적 사고 과정과 결과를 확인할 수 있는 질 높은 문항들이 지필평가[26]에 담겨 있다면, 지필평가를 통해서도 충분히 의미 있는 평가를 수행할 수 있다. 또한 지필평가와 함께 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 조화롭게 활용함으로써 교수 · 학습과 관련된 다양한 정보를 얻는 것이 중요하다.

③ 관찰법[27]은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐만 아니라 수학에 대한 태도와 신념과 같은 정의적 영역을 평가할 수 있다는 장점이 있다(황혜정 외, 2001).

④ 면담법[28]은 학생 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 확인할 수 있고, 또한 소집단별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

(cf) 관찰 및 면담의 기록 방법에는 일화기록법, 체크리스트법 등이 있다. 일화기록법은 한 개인을 대상으로 구체적인 행동 사례를 간략하게 기술하는 방법이고, 체크리스트는 관찰이나 면담하려는 행동 단위를 미리 분류하고 이것을 기초로 그러한 행동이 나타났을 때 표시하는 방법을 말한다.

⑤ 자기평가[29]의 구체적 방법으로는 '학생 자신과의 대화'와 '학생 자신에게 질문하기' 등이 있다. '학생 자신과의 대화'는 자신을 쉽게 표현하는 쓰기 활동의 일종이며, 매시간 학생 스스로 자신의 수학 지식의 이해도 및 수학에 대한 태도를 짧은 형태로 기록하여 교사에게 제출하는 것으로 일종의 개인 일지라고 할 수 있다(Burton, 1985; 최승현, 1999에서 재인용). '학생 자신에게 질문하기'는 수학 문제를 해결하는 동안 학생들이 자기 자신에게 질문을 함으로써 자기를 감독하는 방법이다.

3) 인지적 영역의 평가

① 인지적 영역에서는 학생들의 문제해결과정과 문제해결 결과를 동시에 고려해야 한다. 문제해결의 결과만을 평가하는 것으로는 학생들이 해당 수학적 개념을 정확히 알고 있는지 확인할 수 없다. 그러나 학생들의 문제해결과정에 대한 평가는 학생들의 오개념이 무엇이며 오개념이 어디에서 비롯되는가에 대한 구체적인 정보를 제공함으로써 교수 · 학습의 실질적 개선에 기여할 수 있다.

② 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력의 평가에서는, 학생들이

26) 교사가 종이에 평가 문항을 제시하고 학생들이 제시된 문항을 해결하는 방법이다.

27) 평가자가 수학적으로 사고하고 있는 개별 학생, 소집단의 학생, 또는 학급전체 학생에 대하여 관찰하면서 기록하는 방법이다.

28) 학생들을 직접 면담함으로써 학생들의 수학적 사고 과정에 대한 정보를 얻는 방법이다.

29) 학생이 수학을 학습하는 과정에서 자신의 발전 상황을 스스로 감독하고, 자신의 수학적 지식과 태도를 평가하는 과정이라고 할 수 있다(Kenney & Silver, 1993).

수학적 사실이나 수학적 절차 등을 의미 충실하게 이해하고 있는지에 중점을 두어야 한다. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙 등을 의미 충실하게 이해하지 않고 단지 암기하고 있는 학생들은 자신들이 알고 있는 것을 언제 그리고 어떻게 사용해야 하는지를 확신하지 못한다. 따라서 학생들이 단지 암기한 것을 기억하여 답을 제시할 수 있는 문항보다는 학생들의 의미 충실한 이해를 평가할 수 있는 문항을 제시해야 한다.

③ 수학적 표현의 의미를 이해하고 정확하게 사용하는 능력의 평가에서는, 수학적 아이디어를 조직하고 기록하며 의사소통하기 위해서 표현을 만들고 활용할 수 있는지, 문제를 해결하기 위해서 수학적 표현을 선택하고 적용하며 변환할 수 있는지 등에 중점을 두어야 한다(NCTM, 1998).

④ 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력의 평가에서는, 귀납과 유추에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는지, 수학적 추측을 만들고 조사할 수 있는지, 수학적 논쟁 능력을 개발하고 평가할 수 있는지, 다양한 유형의 추론 방법을 선택하고 사용할 수 있는지 등에 중점을 두어야 한다.

⑤ 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력의 평가에서는, 수학과 다른 교과 상황에서 나타나는 문제를 해결할 수 있는지, 문제를 해결하기 위하여 다양하고 적절한 전략을 적용하고 채택할 수 있는지, 수학 문제해결과정을 관찰하고 반성할 수 있는지, 문제해결을 통해 새로운 수학적 지식을 만들어낼 수 있는지 등에 중점을 두어야 한다.

⑥ 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력의 평가에서는, 생활 주변의 현상을 포함한 다양한 현상을 모델링하고 해석하기 위해서 수학을 활용할 수 있는지에 중점을 두어야 한다. 학생들은 다양한 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 경험을 통해 수학과 다른 학문과의 연결성을 인식할 수 있다.

⑦ 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력의 평가에서는, 의사소통을 통하여 학생 자신의 수학적 사고나 문제해결 과정을 조직하고 확고히 할 수 있는지, 학생 자신의 수학적 사고나 문제해결 과정을 학급 친구, 교사, 다른 사람들에게 일관적이고 명확하게 의사소통할 수 있는지, 다른 사람의 수학적 사고와 전략을 분석하고 평가할 수 있는지, 수학적 아이디어를 정확하게 표현하기 위하여 수학의 언어들을 사용할 수 있는지 등에 중점을 두어야 한다.

[예시 문항] 다음은 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력, 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력 등과 관련된 문항이다. 이 문항은 지수함수와 로그함수 영역의 로그함수와 관련되어 있다.

예시문항 1

어느 지역에서 1년 동안 발생하는 규모 M 이상인 지진의 평균 발생 횟수 N은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log N = a - 0.9M \text{ (단, } a\text{는 양의 상수)}$$

이 지역에서 규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생할 때, 규모 x 이상인 지진은 1년에 평균 한번 발생한다. $9x$의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3$ 으로 계산한다.)

[출처: 2008학년도 대학수학능력 시험]

[정답]

$\log N = a - 0.9M$에서 $M = 4$, $N = 64$를 대입하면

$\log 64 = a - 0.9 \times 4$, $6\log 2 = a - 3.6$

$1.8 = a - 3.6 \quad \therefore a = 5.4 \cdots$ ㉠

$\log N = a - 0.9M$에서 $M = x$, $N = 1$를 대입하면

$\log N = a - 0.9x$, $0 = a - 0.9x$

여기에 ㉠을 대입하면

$0 = 5.4 - 0.9x$

$0.9x = 5.4$

$\therefore 9x = 54$

4) 정의적 영역의 평가

① 인지적 영역이 수학적 지식 및 수학적 사고방식과 관련된 지적인 특성을 대상으로 한다면, 정의적 영역은 수학에 대한 전형적인 태도 및 감정 표현의 방식과 관련된 특성을 대상으로 한다.

② 수학에 대한 긍정적 태도나 바람직한 가치관은 수학 학습을 성공적으로 수행하여 수학에 높은 성취를 이루는 데에 중요한 역할을 하며, 수학 교수 · 학습 활동에 활력을 줄 수 있다.

③ 정의적 영역은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 다양한 하위 영역으로 구분할 수 있다.

정의적 영역	세부 항목
수학에 대한 흥미와 호기심	· 수학을 하는 것을 즐거워한다. · 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다. · 수학 수업 시간을 기다린다. · 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.
수학에 대한 자신감	· 수학 공부에 자신감을 가지고 있다. · 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다. · 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다. · 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.
수학에 대한 불안	· 수학 수업이 어려울까봐 걱정한다. · 수학 성적이 나빠질까봐 걱정한다. · 수학 문제를 풀 때 긴장한다.
수학의 유용성 인식	· 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다. · 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다. · 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다. · 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.
과제집착력과 의지	· 수학 공부를 열심히 한다. · 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다. · 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다. · 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.
창의적 사고	· 다른 사람의 방법을 그대로 따라하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다. · 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다. · 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다. · 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.
수학 수업에의 참여	· 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다. · 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다. · 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다. · 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.

5) 평가에서 공학적 도구의 활용

① 지금까지 학교수학에서 해결과정이 간단하거나 그 답이 비교적 간단한 수치로 나오는 문제들을 다루었던 상황은 문제해결에서 문제의 본래 목적과 모순되지 않는 경우에 한해서 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구를 이용할 수 있도록 함으로써 어느 정도 극복할 수 있다.

② 문제해결에서 가장 중요한 아이디어는 학생의 사고로 탐색하게 하되, 그 이외의 문제해결의 수단이 되는 복잡한 과정은 공학적 도구의 다양한 기능을 이용하게 하는 것이다. 이런 방식으로 수학 문제해결에 공학적 도구를 도입한다면, 학생들이 생활에서 접하는 다양한 현상과 관련성이 깊은 풍부한 맥락의 문제들을 학교수학에서 다룰 수 있게 된다.

2.3. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일에, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되었다.

1) 교육과정 개정의 필요성 및 배경과 그에 따른 활용 방안 및 기대 효과

(1) 개정의 필요성 및 배경

① 핵심역량의 주요 요소이자 2009 개정 교육과정 총론에서 추구하는 인간상으로, '창의성' 및 이의 발휘가 드러나 강조되어 있다. 따라서 여러 기초 핵심 역량의 바탕 위에 새로운 발상과 도전이 수반되는 창의적 능력이 도달될 수 있는 학습자 양성을 위한 수학과 교육과정 목표 및 내용, 교수 · 학습 방법 등을 마련한다.

② 우리나라 학생들이 보다 의미 충실한 수학적 사고 과정과 수학적 사고 활동을 경험할 수 있도록 학교 수학의 모습을 개선할 필요가 있다고 보고, 이를 뒷받침하는 하나의 방안으로서 수학과 교육과정에 '수학적 과정(mathematical process)'을 신설하고, 이에 관한 구체적인 성취기준을 제안하고자 하였다. 즉, 수와 연산, 대수, 기하, 확률과 통계 등의 내용 영역을 다루는 단원에서 수학적 주제를 도입, 전개, 발전, 정리하는 과정에서 수학적 과정의 성취기준이 배경으로 작용하면서 암묵적으로 구현되도록 하는 방식이다.

③ 교과서 인정제 도입을 앞두고 양질의 교과서 개발 및 교과서 재구성이 가능토록 자율성을 보장하고 융통성을 부여함과 더불어 다양한 교구 및 매체 기능 활용이 활성화 될 수 있도록, 이에 요구되는 수학과 교육과정 내용, 기능 및 교수 · 학습 방법 등 다각적인 측면에서의 개선을 도모하도록 한다. 이러한 교육과정에로의 변화와 실현은 궁극적으로 학생들의 수학 학습에 대한 흥미와 자신감을 제고시키고 학습자 개인의 수학 학습 특성을 고려한 '맞춤형' 수업이 가능토록 한다.

④ 교육과정 적용 과정에서 드러난 학교급 간, 학년 간, 교과 간 불균형과 중복 문제 해소를 위한 연계성이 강화된 수학과 교육과정 개발을 개발하되, 교과서 개발과 교사들의 재구성을 통한 현장 적용에 있어 최대한의 자율성이 보장될 수 있도록 한다.

Point! 미래 사회에서 요구되는 핵심역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두고 있다.

(2) 활용 방안 및 기대 효과

가. 활용 방안

① 창의 중심의 미래형 수학 교과서 개발의 청사진이 제공될 수 있다.

: 교육과정은 교육의 내용과 질을 결정짓는 최상위의 문서라 할 수 있지만 교육 현장에서 교사들이 직접적으로 참조하고 영향 받는 자료는 교과서 또는 지도서인 경우가 많다. 교과서와 지도서가 교육과정에 기초하여 교육과정의 의도대로 추구되면서 교사의 교수 실제에 직접 관련되기 때문이다. 따라서 창의 중심의 미래형 수학교육과정의 개발은 이어지는 창의 중심의 미래형 수학 교과서 개발의 단초로서의 역할이 가장 크다고 할 것이다. 더욱이 교과서 체제가 국정→검정→인정제로 갈수록 규제력은 약화되는 한편 기준을 제시하는 교육과정의 역할은 더욱 커지기 때문에 초등학교에서의 검정제, 중등학교에서의 인정제를 검토하는 시점에서 개발된 창의 중심 교육과정은 매우 시기적절하게 활용될 것이다.

② 학생 역량 강화를 위한 수업 제안이 가능하다.

: 선행 연구를 통해 확인되듯이 외국의 많은 교육정책은 학생들이 최소한 갖추어야 할 능력의 함양이라는 부분에 초점을 맞추고 있다. 소위 학생 역량의 강화라는 목표이며 우리나라에서도 수학을 통해 기를 수 있는 학생의 역량이라는 부분에 관심을 쏟지 않을 수 없다. 현재와 미래에서 경험하는 사회의 복잡함은 단순한 수학적 지식의 습득이 아니라 학생 스스로 당면한 문제상황으로부터 해결책을 얻기 위한 다각적인 능력으로서 문제해결력, 의사소통능력, 수학적 추론 등의 수학적 과정을 필요로 한다. 따라서 수학수업 역시 학생들의 역량을 강화시키는 방향으로 진행되어야 할 것이며 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서 개발하는 미래형 창의 개발 교육과정은 수업 설계를 위한 기본틀을 제안할 수 있을 것이다.

③ 교육과정 내용의 학년군별 구성을 통한 교육과정 운영이 융통성 있게 마련될 수 있다.

: 국가 차원의 교육과정이 존재하지 않는 국가는 그것이 마련된 국가에 비해 학교 또는 교사의 융통성 및 자율성이 크고 아울러 그 만큼 책임감도 큰 것이 당연하다. 그러나 국가 차원의 교육과정이 마련된 국가라 할지라도 교육과정 운영의 융통성을 부여할 수 있는 방법으로 교육과정 내용을 학년별 제시가 아닌 학년군별 제시의 방법을 취하고 있다. 이는 지도 내용을 학년별로 제시하는 것이 아니라 2~3개 학년씩 묶어서 제시하는 것으로 교사의 창의적 교수 기회를 제공한다는 점에서뿐만 아니라 제7차 교육과정 이후 강조되고 있는 학습자 중심의 수준별 수업을 구현하기 위해서도 의미 있는 방안이다. 중국이나 미국 NCTM에서 마련한 Standards가 학년을 묶어서 내용을 제시한 사례가 이것에 해당하며 영국의 key stage 개념이나 프랑스의 cycle 개념이 모두 이에 해당한다.

나. 기대되는 성과

① 수학적 창의적 사고력 증진을 위한 창의적 수업의 실시가 가능하다.

· 학생들의 학습 역량 강화를 위해 미래 사회가 요구하는 학습내용의 정선
· 기존 교과 내용의 창의적 수업 실시를 위한 수업 방안 모색(실험, 관찰, 추측, 발견 등 다양한 접근을 시도함으로써 기존 방법과 아울러 대안 제시)
· 기존 교과 내용의 창의적 전개 방식을 이용한 교과서 구성(검인정제 또는 전자교과서 고려)
· 제7차 교육과정 이후 수학교육의 목표로 제시되는 '수학적 힘의 신장'에 대한 이해 및 추구를 위한 구체적 모델 제공
· 타학문과의 연계를 통한 통합교과적 접근(수학 내적인 주제별 연결과 더불어 상황 맥락 속에서 학문간 공통 주제를 중심으로 연결함으로써 학생들에게 의미 충실하고 자발적으로 참여할 수 있는 학습 환경 제공)

② 미래의 과학 기술 기반 사회에 적합한 인재 양성이 가능하다.

· 미래 사회의 민주 시민의 자질로서 창의력, 의사소통능력, 문제해결력 신장
· 대학 진학 시 각자 선택한 전공 분야에 적합한 최소 수준의 수학 학습 능력 보장
· 기초과학 기반 조성을 위해 특히 이공계 학생의 수학 학력 및 사고 능력 향상
· 고교 선택 과목의 적정화를 통한 수학 기피 현상 방지

③ 수학적 소양 및 긍정적인 수학적 태도 함양이 가능하다.

· 학생들의 능력을 고려한 수요자 중심의 맞춤형 교육 제공(학년군별 수업 활용 제안, 수학 학습 부진아 및 수학 학습 우수아를 위한 개별 교육 기회 제공)
· 인지적 영역의 수학 학업 성취도의 달성뿐만 아니라 정의적 영역에서의 수학에 대한 관심, 흥미, 태도를 비롯한 긍정적인 수학적 태도 및 소양의 함양

2) 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정(전체 내용)과 변경 사항

공통 교육과정 (초1-중3)	선택 교육과정(고1-3)		
	기본과목	일반과목	심화과목
수학	1. 기초 수학	1. 수학 I 2. 수학 II 3. 확률과 통계 4. 미적분 I 5. 미적분 II 6. 기하와 벡터	1. 고급수학 I 2. 고급수학 II

(1) 공통 교육과정(초1~중3)

가. 교육과정 강조 방향

2009 개정 교육과정의 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는데 주력하였다. 특히, 미래사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육목표와 내용을 개발하는 데 초점을 두었다.

· 수학 교과 내용 양의 20% 경감 · 수학적 과정을 통한 수학적 창의성 강조 · 교육과정 운영의 유연성 확보를 위한 학년군제 반영

ㄱ. 수학 교과 내용 양의 20% 경감

① 2007 개정 수학과 교육과정 대비 수학 교과 내용 양의 20% 경감은 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20% 범위 내에서 시수를 증감하여 운영하기 위해서다.

② 최적한 학습내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하기 위해서다.

ㄴ. 수학적 창의성 강조

① 수학적 창의성이란 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다.

② 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로써, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

③ 수학적 창의성을 계발하기 위해 우선적으로 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성하며, 이에 따라 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전이 가능하다.

④ 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련

의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장한다.

⑤ 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 '문제해결, 의사소통, 추론'을 '수학적 과정(mathematical process)'으로 정하여 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 강조한다.

[참고] 수학적 과정이란?

'수학적 과정'이란 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서, '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성요소로 갖는 개념으로 정의하였다. 여기서 '수학적 문제해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 기지의 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

'수학적 과정'의 하위 구성요소로 설정한 '수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어온 사항이다. 2007 개정 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다. 학교의 수학 교수학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 목표와 교수 · 학습 방법에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점을 갖는다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 갖고 있다. 따라서 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 이와 동시에 '내용'의 진술에 보다 구체적인 성취기준을 갖고 포함시킴으로써 학교수학에서, 그리고 수학 교과서에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명하게 다루고자 하는 의도를 갖고 있다.

〈수학적 과정의 요소 및 특징〉

요소	특징
문제 해결	가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다. 나. 수학적인 방법으로 문제해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다. 다. 문제해결과정이나 완결 후 문제제기를 통하여 문제해결을 발전적으로 이끌 수 있다. 라. 문제해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제상황에 적용할 수 있다.
추론	가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 정당화할 수 있다. 나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적으로 검증할 수 있다. 다. 다양하고 독창적인 아이디어를 통하여 수학적으로 추론할 수 있다.
의사 소통	가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다. 나. 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다. 다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

ㄷ. 교육과정 운영의 유연성 확보를 위한 학년군제 반영

① 2009 개정 교육과정 총론 초 · 중등학교 교육과정 구성의 방침에 “교육과정편성 · 운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다.”고 규정하고 있다.

② 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아닌 몇 개 학년을 묶어서 제시하는 학년군제를 도입한다.

③ 학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 즉, 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다.

(예) 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용 혹은 더 깊은 내용을 학습하고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습한다.

④ 학생들이 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택하는 진로 선택과 관련될 수 있으며, 학년군제에서는 다양한 교과서 사용이 가능해지며 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치 가능하다.

(예) 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 ‘수와 연산’ 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성하거나, 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다.

즉, 수학교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하다.

⑤ 그러나 학년군제를 실행하기 위해 다음 사항들의 해결 방안 모색이 필수적이다.

· 첫째, 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안 마련
· 둘째, 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수, 이에 대한 타당한 평가가 이루어지기 위해 적절한 평가기준 마련
· 셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준 필요, 전학생들을 위한 수월한 교수 · 학습 방안 내지 정책 마련

나. 수학과 목표, 교수 · 학습 방법, 평가(초1~고3까지 공통적으로 포함된 내용)

ㄱ. 수학과 목표

수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르며, 수학적 문제상황을 수리 · 논리적 사고를 통하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다. 복잡하고 전문화되어가는 미래 사회에서 사회 구성원에게 필요한 핵심 역량은 창의적 사고 능력, 문제해결능력, 정보 처리 능력, 의사소통 능력 등으로, 이는 주로 수학적 추론, 수학적 문제해결, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수 · 학습을 통하여 증진된다. 수학적 과정을 통해 길러진 핵심 역량은 타 교과의 성공적인 학습에 기반이 될 뿐 아니라, 나아가 개인의 전문적 능력의 증진과 창의 · 인성 중심의 21세기 지식기반사회의 민주 시민에게 필요한 소양과 경쟁력을 갖추는 데에도 토대가 된다. 한편, 학교 수학에서는 인지적 능력의 증진은 물론 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학 학습에 대한 자신감과 긍정적인 태도 등 정의적 영역의 개선과 더불어 상대방을 이해하고 배려하는 바람직한 인성을 길러야 한다. 수학은 개인차가 크게 나타나는 교과이므로 학생의 인지발달단계, 학습수준, 학습특성 등을 고려하여 적절한 교수 · 학습 방법을 적용해야 한다.

① 초등학교 수학: ‘수와 연산’, ‘도형’, ‘측정’, ‘규칙성’, ‘확률과 통계’로 구성

· ‘수와 연산’ 영역: 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산
· ‘도형’ 영역: 평면도형과 입체도형의 구성요소, 개념, 간단한 성질 및 공간 감각
· ‘측정’ 영역: 시간, 길이, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피의 측정 및 이의 활용
· ‘규칙성’ 영역: 규칙 찾기, 비와 비례식, 정비례와 반비례
· ‘확률과 통계’ 영역: 자료의 정리와 해석, 사건이 일어날 가능성

② 중학교 수학: '수와 연산', '문자와 식', '함수', '확률과 통계', '기하'로 구성

· '수와 연산' 영역: 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산

· '문자와 식' 영역: 다항식의 개념과 사칙계산, 일차방정식과 일차부등식, 연립일차방정식과 연립일차부등식, 이차방정식

· '함수' 영역: 함수의 개념, 일차함수와 그 그래프, 이차함수와 그 그래프

· '확률과 통계' 영역: 도수분포의 개념과 활용, 확률의 기본 성질, 대푯값과 산포도

· '기하' 영역: 기본 도형의 성질, 피타고라스 정리, 삼각비, 원의 성질과 활용

③ 수학 과목의 목표

수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰함으로써 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다.

가. 생활 주변이나 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 기능과 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변이나 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다.

ㄴ. 교수 · 학습 방법

가. 교육과정의 성취 기준은 학생의 특성, 내용의 연계성, 지역성 및 현실성을 고려하여 지도한다.

나. 학년군별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

다. 교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수한 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

라. 수학과 수업에서는 교육 내용과 학생의 특성을 고려하여 발견학습, 탐구 학습, 협동 학습, 개별 학습, 설명식 교수 등 다양한 교수 · 학습 방법을 활용할 수 있다.

마. 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능의 교수 · 학습에서는 다음 사항에 유의한다.

(1) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 학습 소재로 하여 수학의 개념, 원리, 법칙을 도입한다.

(2) 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 학생 스스로 개념, 원리, 법칙을 발견하고 이를 정당화하게 한다.
(3) 문제를 해결할 때 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙, 기능을 이용할 수 있게 한다.

바. 의미 있는 발문을 하기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 발문을 할 때는 학생의 인지발달과 경험을 고려하며, 발문에 대한 학생들의 반응을 의미 있게 처리한다.
(2) 학생의 사고를 촉진시키기 위해 가능하면 열린 형태의 발문을 통해 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하게 하고 다양한 방법을 비교하여 설명해 보게 한다.

사. 수학적 창의력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 수학적 창의력의 신장이 이루어지도록 수학적 문제해결력, 추론 능력, 의사소통 능력을 강조한다.
(2) 다양한 아이디어를 산출할 수 있는 수학적 과제를 통해 학생들의 확산적 사고를 촉진시킨다.
(3) 하나의 수학 문제를 여러 가지 방법으로 해결한 후 그 해결 방법을 비교해 보고, 더 높은 차원으로 확장해서 사고할 수 있게 한다.
(4) 수학 개념이나 용어의 정의를 직접적으로 제시하기보다 학생 스스로 개념과 용어의 필요성을 인식하고 정의해 보게 한다.

아. 수학적 문제해결력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

자. 수학적 추론 능력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화할 수 있게 한다.
(2) 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.
(3) 수학적 추론을 통해 합리적으로 사고하는 능력을 키우고, 일상생활에서 자신의 의견을 정당화할 때 적절한 근거에 기초하여 논지를 전개할 수 있게 한다.

차. 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확히 사용하게 한다.
(2) 수학적 아이디어를 말과 글로 설명하거나 시각적으로 표현하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 한다.
(3) 수학적 아이디어를 표현하고 토론하며 다른 사람의 수학적 아이디어와 사고를 이해하는 과정을 통해 의사소통의 중요성을 인식하게 한다.

카. 학생들의 인성을 함양시키기 위하여 교수ㆍ학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 다른 학습자의 풀이 방법과 의견을 존중하며, 이를 통해 타인을 배려하는 성품을 기르게 한다.
(2) 자신의 수학적 아이디어를 설득력 있게 논리적으로 표현하여 그 타당성을 입증하고 이에 기초하여 합리적으로 결론을 내리는 과정을 통해 민주 시민의 소양을 기르게 한다.
(3) 수학 문제를 해결함에 있어 결과에 이르는 과정이 중요함을 인식하게 한다.

타. 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 교수ㆍ학습에서 다음 사항에 유의한다.
(1) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상과 관련지어 수학을 배움으로써, 수학에 대한 가치를 인식하고 수학의 필요성을 알게 한다.
(2) 수학에 대한 흥미, 관심, 자신감을 갖도록 학습 동기와 의욕을 유발한다.

파. 수학 교수ㆍ학습 과정에서 교육기자재 및 수학 교과 교실의 활용은 다음 사항에 유의한다.
(1) 교수ㆍ학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.
(2) 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다.
(3) 구체적인 조작과 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하고 수학 주제에 대해 모둠으로 토론함으로써 수학 학습의 효율을 높일 수 있도록 수학 교과 교실을 구축하여 활용한다.

하. 수학 학습 시 학생 스스로 학습목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습결과를 스스로 평가하는 자기 주도적 학습 능력을 신장시킨다.

갸. 학교에서 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.
(1) 수준별 수업을 위해 집단을 편성할 때에는 학생 개인의 학습 능력과 수준, 적성과 희망 등을 감안하고, 교사 수급과 유휴 교실 등 학교 상황을 고려한다.
(2) 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 진행한다.

ㄷ. 평가

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지발달단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 · 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력

(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

다. 공통 교육과정의 변경 사항

① 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 수학적 창의성과 인성을 갖춘 미래 사회의 인재 양성을 위한 수학교육을 목표로 한다. 이러한 목표를 위하여 중학교 수학과

교육과정은 초등학교에 연계하여 실생활과 관련된 교육 소재를 활용한 수학교육 내용을 구성하고, 학생 활동을 유도하여 수학을 구체적으로 체험할 수 있도록 하였다. 학생 활동이 강조된 수학과 교육과정을 통하여 학생의 흥미를 유발하고 스스로 생각할 수 있는 힘, 즉 창의력을 배양하면서 체험에서 비롯된 판단력을 신장하여 규칙과 질서를 지키며 더불어 사는 인성을 갖춘 인재를 양성한다.

② 문제해결, 추론, 의사소통 등을 의미하는 '수학적 과정'을 강조하고 학생 스스로 조작하고 탐구하여 개념과 원리를 발견하는 '자기주도적학습'의 교수 · 학습 방법에 따라, 교사가 정형화된 지식을 일방적으로 학생에게 전달하는 것이 아니라 학생이 학습 활동의 주체가 되는 수업 형태를 지향한다.

③ 2009 개정 교육과정의 가장 큰 특징 중 하나는 학년군제를 실시하는 것이다. 따라서 중학교 1~3학년을 하나의 군으로 묶어서 제시함으로써 교육과정 편성 및 운영의 유연성을 부여하고자 하였다. 중학교 내의 어떤 내용이든 중학교 과정 중 언제든지 학습할 수 있도록 함으로써 수준별 수업이 용이하고, 또한 교육과정 운영의 융통성이 발휘될 수 있도록 한 것이다. 이는 학생의 학업 효율성을 높일 수 있으며, 교과서 개발의 자율성과 교사들의 실제 수업 활동에서도 자율성을 확대할 수 있도록 함이다.

④ 39개 중영역의 현행 중학교 수학과 교육과정을 29개 중영역으로 재구성함으로써 학습량을 경감하는 한편, 학생들의 직관적 이해와 자신의 지식과 사고방법에 의한 정당화를 존중한다.

⑤ 수와 연산, 문자와 식, 함수, 확률과 통계, 기하로 구성된 5개 대영역 중에서 수와 연산 영역과 기하 영역이 상대적으로 많이 변화되었다. 수와 연산 영역에서는 현행 교육과정의 집합 내용을 삭제함으로써 엄밀성을 지양하고 학습 부담을 줄이도록 하였다. 기하 영역에서도 기하학적 성질의 이해를 위해 형식적 체계를 강조하는 증명보다는 학생의 경험적 지식에 바탕을 둔 정당화를 강조하도록 하였다.

ㄱ. 수와 연산

- 8개 중영역인 이전 교육과정에서 집합과 근삿값을 삭제하는 등의 조정을 통해 5개의 중영역으로 재구성
- 학습량 경감과 국제 동향을 반영하여 중학교에서 집합 개념을 삭제하고 고등학교로 이동
- 실생활에서의 활용도 측면과 연계되어야 한다는 목표와는 다르게 학생들에게 학습 부담만을 주는 근삿값을 삭제, 학습량 경감
- 학생들의 학습 부담이 큰 '십진법과 이진법의 원리를 이해하고, 자연수를 십진법과 이

진법의 전개식으로 나타내는 것'과 '십진법과 이진법 사이의 관계'를 삭제, 학습량 감축

ㄴ. 문자와 식

· 11개의 중영역인 이전 교육과정에서 7개의 중영역으로 재구성

· 방정식과 부등식의 풀이와 활용 영역 통합, 학습량 감소와 실생활 맥락에서의 필요성 강조

· 학습자의 부담 경감을 위해 일부 용어 삭제(식의 값, 좌변, 우변, 양변, 이차식, 전개식, 소거, 가감법, 대입법), 교수 · 학습 자료를 만들거나 수업에 필요할 경우 관련된 용어를 자연스럽게 사용하도록 함

ㄷ. 함수[30)]

· 5개의 중영역인 이전 교육과정에서 함수의 그래프와 함수의 활용을 통합하여 4개의 중영역으로 재구성

· 함수 개념 도입에서 정비례와 반비례 이외의 현상을 다룰 수 있도록 하고, 다양한 상황을 표, 식으로 나타내보는 활동을 중시함

· 집합 영역이 삭제되었으므로 함수 영역에서 정의역 · 치역 · 공역 용어를 삭제. 필요한 경우 정의역은 'x의 범위', 치역은 'y의 범위'로 지칭 가능, 정의역 · 공역 · 치역의 형식적인 정의는 고등학교 수학에서 다룸

ㄹ. 확률과 통계[31)]

· 상대도수의 분포를 도수분포와 그래프에 포함시켜 4개의 중영역인 이전 교육과정에서 3개의 중영역으로 재구성

· 〈교수 · 학습 상의 유의점〉에 통계 교수 · 학습 방법의 다양한 방법을 제시

(예) ① 다양한 상황에서 자료를 수집하게 하고, 수집한 자료가 적절한지 판단하는 활동을 하게 한다.

② 다양한 상황의 자료를 표나 그래프로 나타내고, 그 분포의 특성을 설명할 수 있게 한다.

③ 눈금 등을 잘못 사용하여 자료를 부정확하게 나타낸 표나 그래프에서 오류를

---

30) 함수는 현실 세계의 상황을 이해할 수 있는 도구일 뿐 아니라 수학의 분야를 통합할 수 있다는 점에서 중요하다(김남희 외, 2006). 현행 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 실용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육인적자원부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직할 것이다.

31) 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수학습 방법의 변화를 도모하였다.

찾는 활동을 하게 한다.

④ 상대도수는 도수의 총합이 다른 두 집단의 분포를 비교하는 상황에서 다룬다.

⑨ 자료의 특성에 따라 적절한 대푯값을 선택하여 구할 수 있게 한다.

⑩ 공학적 도구를 활용하여, 표와 그래프를 그리고 대푯값과 산포도를 구할 수 있게 한다.

· 누적도수의 분포를 삭제, 학습량 감축

· 5학년에서 다루던 '줄기와 잎 그래프'는 초등학교에서 해석이 어렵고 중학교에서 분포를 다룰 때 함께 다루는 것이 적합하여 중학교 확률과 통계 영역에 추가

ㅁ. 기하

· 11개의 중영역인 이전 교육과정을 10개로 재구성

· 정당화에 의한 기하 교육을 위하여, '증명할 수 있다'를 대신하여 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시[32)]

· '원과 직선의 위치 관계' 삭제, 삼각형의 성질 중 삼각형의 외접원과 내접원의 도입 부분에서 접선의 개념만을 간단히 다룸

· '두 원의 위치 관계' 삭제

· '원과 직선', '원주각'의 내용 중 단발성 주제는 삭제, 하나의 중영역 '원의 성질'로 통합

· '원에 내접하는 사각형의 성질을 이해한다.'와 '원과 비례에 관한 성질을 이해한다.'는 별도의 성취기준으로 두지 않고, 원주각의 활용 문제로만 간단히 다룸

(2) 선택 교육과정(고1~고3)

가. 선택 과목 재구조화 및 운영

1) 선택 과목 재구조화의 필요성

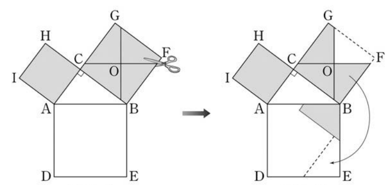
① 2009 개정 교육과정 총론에 규정된 수학과 과목의 이수 단위(5단위)에 따르기 위해

② 2009 개정 교육과정 총론의 '창의 · 인성 교육 강화'를 위하여 교육 내용 20% 감축 사항

---

32) [문제] 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그려서 다음과 같은 [단계 1], [단계 2]를 통해 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.

> [단계 1] 정사각형 CBFG의 두 대각선의 교점 O를 지나고 두 변 AB와 BE에 평행한 선분을 각각 긋고, 그어진 선을 따라 4개의 사각형을 오린다.
> [단계 2] [단계 1]에서 오려낸 4개의 사각형과 정사각형 ACHI를 정사각형 ADEB에 채워본다.



[단계 1] [단계 2]

에 따라 수학과에서도 학생들의 수학 학습량을 감축하고 학습수준을 낮출 필요 발생

③ 고등학교 과목을 정상적으로 이수할 만큼의 기초 지식이 없는 학생들을 위한 기본 과목 개설 필요

④ 일반계고 학생을 위한 심화 과목과 과학고 학생들에게 적합한 심화 과목으로 심화용 수학 과목 2개 이상 개설 필요

⑤ 선택 과목 간 내용 중복성 문제해결 및 수학 과목간의 위계성, 연계성을 명확히 하기 위해

2) 선택 과목 재구조화

고등학교 학생들이 자신의 수준에 적합한 수학 과목을 선택하여 이수할 수 있도록 수학과 선택 과목을 기본 과목, 일반 과목, 심화 과목으로 조직하였다.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">2007년 개정 수학과 교육과정</td><td colspan="3">2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정</td></tr>
<tr><td colspan="2">재구조화</td><td>비고</td></tr>
<tr><td rowspan="2">보통</td><td rowspan="2">수학(고1, 8),
수학의 활용(6),
수학 I (6), 미적분과 통계 기본(6),
수학 II (6),
적분과 통계(6),
기하와 벡터(6)</td><td>기본</td><td>기초 수학</td><td>[기초 수학]은 고등학교 수학을 이해하는데 필요한 수학적 지식이 부족한 학생들을 위한 과목임, 2011년부터 적용되는 [수학의 기초] 과목과 연계됨</td></tr>
<tr><td>일반</td><td>수학 I (5)
수학 II (5)
미적분 I (5)
미적분 II (5)
확률과 통계(5)
기하와 벡터(5)</td><td>2007 개정 수학과 교육과정에서 고등학교 1학년 ‘수학’은 [수학 I]과 [수학 II]로 분리됨</td></tr>
<tr><td>전문</td><td>고급수학</td><td>심화</td><td>고급수학 I
고급수학 II</td><td>[고급수학]은 [고급수학 I]과 [고급수학 II]로 세분화되고 미적분학, 선형대수학, 기하학, 통계학 등 심화된 수학 내용을 다룸</td></tr>
<tr><td>과목 수</td><td>8</td><td colspan="2">9</td><td>1개 과목 증대</td></tr>
</table>

① 기본 과목

· 고등학교 일반 수준을 곧바로 이수하기에 수학적 기초가 부족한 학생들이 이를 보완할 기회를 가지는데 초점을 둠

· 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목

· 내용은 ‘수와 식의 계산’, ‘방정식과 함수’, ‘피타고라스 정리와 삼각비’로 구성

· ‘수와 식의 계산’ 영역: 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산
· ‘방정식과 함수’ 영역: 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수
· ‘피타고라스 정리와 삼각비’ 영역: 피타고라스 정리, 삼각비

② 일반 과목의 선택 과목

· 고등학교 학생들의 인지발달수준을 고려하면서도 고등학교 학생들이 자신의 관심, 적성, 진로에 적합한 수학 과목을 선택할 수 있도록 다양한 과목 개설
· 인문사회계, 과학기술계, 예 · 체능계, 실업계로 진학하는 학생들이 자신의 진로에 적합한 과목을 선택하여 이수할 수 있도록 과목별 내용을 구성

> [수학I], [수학Ⅱ]에서는 고등학교 수학의 기본적인 내용을 모아 놓았고, [미적분I]과 [미적분Ⅱ]에서는 다항함수의 미적분을 기본으로 하는 기초미적분과 초월함수까지 다루는 미적분으로 나누어 구성하였다. 또, 현대 사회에서 많이 요구되는 [확률과 통계]는 현행 교육과정에서 여러 교과목에 나누어 서술되었던 것을 하나의 교과목으로 모아 구성하면서 이산수학의 일부를 포함하였으며, 수학의 한 분야인 ‘기하’를 다루는 [기하와 벡터]를 또 하나의 교과목으로 설정하였다.

[수학I]

· 공통 교육과정 기간인 중학교 3학년까지의 수학을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목
· 학생들에게 친숙한 소재인 다항식을 이해하는 것으로 시작
· 방정식과 부등식을 익히는데 초점을 둠
· 중학교에서 학습한 이차방정식의 해의 범위를 확장하기 위하여 복소수를 도입한 후 여러 가지 방정식과 이차부등식을 다룸
· 방정식을 이용하여 좌표평면에서의 직선과 원을 표현하고, 그와 관련된 성질을 살펴봄
· ‘다항식’, ‘방정식과 부등식’, ‘도형의 방정식’으로 구성
  – ‘다항식’ 영역: 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해
  – ‘방정식과 부등식’ 영역: 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식과 부등식
  – ‘도형의 방정식’ 영역: 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동, 부등식의 영역

[수학Ⅱ]

· 공통 교육과정 기간인 중학교 3학년까지의 수학과 [수학Ⅰ]의 내용을 이해한 학생이 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목

· 간단한 함수에 초점을 맞춤
· 함수를 정의하기 위하여 집합의 개념을 도입하고(중학교에서 집합을 다루지 않는다) 그 후에 명제와 증명을 다룸
· 증명 부분에서는 그동안 소홀히 다루었던 '귀류법' 등을 보완
· '함수'는 그 정의 및 역함수를 도입하고, 그 예로서 유리 · 무리함수를 간단히 다룸
· '수열'을 함수와 연계하여 다루는데, 계차수열이나 점화식 등의 복잡한 수열은 삭제, 등차 · 등비수열 등의 간단한 수열의 합을 계산할 수 있도록 함
· '지수'와 '로그'는 그 용어를 이해할 수 있는 정도로 간단히 다룸
· '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'로 구성
 – '집합과 명제' 영역: 집합의 개념과 연산법칙, 명제의 개념과 증명
 – '함수' 영역: 함수와 역함수, 유리함수, 무리함수
 – '수열' 영역: 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법
 – '지수와 로그' 영역: 지수의 확장과 지수법칙, 로그의 개념과 상용로그

[미적분I]

· [수학Ⅰ]과 [수학Ⅱ]의 내용을 이해한 학생이 선택할 수 있는 과목
· 2007 개정 교육과정 [수학 I]에서 다루는 수열의 극한과 급수 부분 그리고 [미적분과 통계 기본]에서 다루는 미적분과 관련된 내용으로 구성
· 2007 개정 교육과정 [수학Ⅱ]에서 '평균값 정리'를 이동하여 보완
· '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'으로 구성
 – '수열의 극한' 영역: 수열의 극한, 급수
 – '함수의 극한과 연속' 영역: 함수의 극한, 함수의 연속
 – '다항함수의 미분법' 영역: 미분계수, 도함수, 도함수의 활용
 – '다항함수의 적분법' 영역: 부정적분, 정적분, 정적분의 활용

[미적분Ⅱ]

· [미적분Ⅰ]의 내용을 이해한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 등 미적분의 내용을 필요로 하는 분야로 진학하려는 학생이 이수하기에 알맞은 과목
· 2007 개정 교육과정 [수학Ⅱ]의 미분법, [적분과 통계]의 적분법의 내용 중에서 [미적분I]과 중복되는 내용을 삭제하여 구성
· '음함수와 매개변수의 미분', '속도와 가속도 및 거리와 관련된 도함수 및 적분의 활용' 관련 부분은 벡터를 다룬 후에 활용부분에서 함께 다루도록 [기하와 벡터]로 이동

· ‘지수함수와 로그함수’, ‘삼각함수’, ‘미분법’, ‘적분법’으로 구성
 – ‘지수함수와 로그함수’ 영역: 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분
 – ‘삼각함수’ 영역: 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분
 – ‘미분법’ 영역: 여러 가지 미분법, 도함수의 활용
 – ‘적분법’ 영역: 여러 가지 적분법, 정적분의 활용

[기하와 벡터]

· [미적분Ⅰ]과 [미적분Ⅱ]의 내용을 이해한 학생이 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목
· 2007 개정 교육과정의 [기하와 벡터]에서 ‘일차변환과 행렬’ 영역 삭제
· ‘이차곡선’ 영역에서는 이차곡선 자체는 간단하게 다루고 미분을 이용하여 그 접선을 다루도록 함
· ‘벡터’는 평면벡터와 공간벡터로 구분하여 학생들에게 보다 친숙한 평면벡터를 먼저 다룬 후 순차적으로 공간벡터를 다룸으로써 학생들의 이해를 도움
· ‘평면 곡선’, ‘평면벡터’, ‘공간도형과 공간벡터’로 구성
 – ‘평면 곡선’ 영역: 이차곡선, 평면 곡선의 접선
 – ‘평면벡터’ 영역: 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동
 – ‘공간도형과 공간벡터’ 영역: 공간도형, 공간좌표, 공간벡터

[확률과 통계]

· [미적분I]이나 [미적분II]의 내용을 이해한 학생이 선택하는 것이 바람직하지만, [미적분I]이나 [미적분II]를 이수하지 않은 학생도 선택할 수 있는 과목
· 2007 개정 교육과정의 여러 교과목에 나뉘어 포함되어 있던 내용을 하나의 교과목으로 통합
· 이산수학의 일부(수와 집합의 분할)를 포함
· 실제 자료에 대한 통계적 처리 능력을 함양하도록 하기 위하여 컴퓨터 프로그램(스프레드시트)과 공학적 도구를 활용하도록 〈교수 · 학습 상의 유의점〉에서 강조
· ‘순열과 조합’, ‘확률’, ‘통계’로 구성
 – ‘순열과 조합’ 영역: 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리
 – ‘확률’ 영역: 확률의 뜻과 활용, 조건부확률
 – ‘통계’ 영역: 확률분포, 통계적 추정

③ 심화 과목의 선택 과목

· 일반계 고등학교에서 수학 과목에 탁월한 학생들이나 과학 고등학교에 진학한 학생들에게 적합한 심화된 수학 내용을 중심으로 조직

· 수학과 일반 수준의 선택 과목과 적절한 위계와 연계를 가지면서도 학생들의 관심과 적성, 향후 진로에 따라 선택이 가능하도록 과목과 내용을 조직

· 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목

· 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공

[고급수학Ⅰ]

· '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성

– '벡터와 행렬' 영역: 벡터, 행렬과 연립일차방정식

– '일차변환' 영역: 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱

– '그래프' 영역: 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용

[고급수학Ⅱ]

· '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성

– '복소수와 극좌표' 영역: 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식

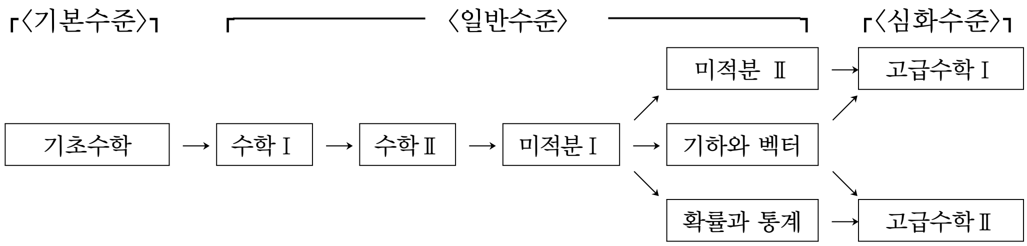
– '미적분의 활용' 영역: 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용

– '편미분' 영역: 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용

④ 선택 과목의 각 내용은 서로 중복되지 않도록 조직하고, 각 과목 사이에 적절한 위계성이나 독립성을 갖도록 교육 내용을 조직. 그리하여 학생들이 자신의 관심과 적성, 진로에 적합한 과목을 선택하여 이수할 수 있게 함

⑤ 학생들의 수학적 창의성을 신장시키기 위한 노력을 집중할 수 있도록 수학과 선택 과목의 전체적인 학습내용을 적절히 감축하고, 각 과목별 학습량과 수준도 적정화 함

3) 선택 과목 운영(이수형태)[33]



① 일반계 고등학교 인문사회 계열 학생 선택 과목 이수 경로([기초수학] 이수 생략 가능)

기본수준		일반수준 1단계		일반수준 2단계		일반수준 3단계		일반수준 4단계
기초수학	⇒	수학 I	⇒	수학 II	⇒	미적분 I	⇒	확률과 통계

② 일반계 고등학교 과학기술 계열 학생 선택 과목 이수 경로

일반수준 1단계		일반수준 2단계		일반수준 3단계		일반수준 4단계
수학 I	⇒	수학 II	⇒	미적분 I	⇒	미적분 II 확률과 통계 기하와 벡터 (3개 과목 이수)

③ 일반계 고등학교 예체능 계열 학생 및 특성화 고등학교 학생 선택 과목 이수 경로

기본수준		일반수준 1단계		일반수준 2단계
기초수학	⇒	수학 I	⇒	수학 II

④ 일반계 고등학교 수학 우수 학생 및 과학고등학교 학생 선택 과목 이수 경로

일반수준 1단계		일반수준 2단계		일반수준 3단계		일반수준 4단계		심화수준
수학 I	⇒	수학 II	⇒	미적분 I	⇒	미적분 II 확률과 통계 기하와 벡터 (3개 과목 이수)	⇒	고급수학 I 고급수학 II (희망에 따라 선택)

33) 진학하고자 하는 계열별 또는 재학하고 있는 고등학교의 유형에 따라서 이수형태 결정

[참고] 음영으로 처리한 부분은 일부 또는 전체를 동시 개설할 수 있음을 표시

수학 Ⅰ → 수학 Ⅱ → 확률과통계

수학 Ⅰ → 수학 Ⅱ → 미적분 Ⅰ

수학 Ⅰ → 수학 Ⅱ → 미적분 Ⅰ → 확률과통계

수학 Ⅰ → 수학 Ⅱ → 미적분 Ⅰ → 미적분 Ⅱ → 기하와벡터 → 확률과통계

수학 Ⅰ → 수학 Ⅱ → (미적분 Ⅰ, 확률과통계) → (미적분 Ⅱ, 확률과통계) → (기하와벡터, 확률과통계)

나. 선택 교육과정의(일반 과목) 변경 사항

① 2007년 개정 수학과 교육과정에서 수학을 ‘대수’, ‘기하’, ‘해석’이라는 고전적인 틀 안에서 분류하고 이에 맞추어 내용을 구성하여 하나의 주제가 여러 단원에 걸쳐 다루어지고 그 결과 학생들의 학습량이 불필요하게 증가하는 측면이 있었다.

(예) 이차식, 이차방정식, 이차부등식, 이차함수, 이차곡선을 대수, 해석, 기하 영역에서 각각 따로 다룸으로써 그 연관성이 명료하게 드러나지 못하고 학습량은 불필요하게 증가 따라서 주제가 잘 드러날 수 있도록 [미적분Ⅰ], [미적분Ⅱ], [기하와 벡터] 등으로 명칭을 수정하였다.

② 2007 개정 교육과정의 내용 중에서 대영역 전체가 일반 과목의 교육과정에서 삭제된 부분은 다음과 같다.

· [수학I]의 ‘행렬과 그래프’, [기하와 벡터]의 ‘일차변환과 행렬’ 영역을 일반 과목에서 삭제하고 [고급수학I]로 이동

· [수학Ⅱ]의 ‘방정식과 부등식’ 영역인 분수방정식과 무리방정식 그리고 고차부등식과 분수부등식의 내용을 삭제

③ [수학I]

· 고등학교 학생들에게는 지나치게 어렵고 분량이 과다할 뿐 아니라 학생들에게 현행 교육과정보다 높은 수준을 학습하도록 요구한다고 보고 2007 개정 교육과정 [수학]의 중영역 ‘실수’와 그 하위 내용을 삭제

· 이차방정식과 연계하여 복소수를 다루는 것이 학생들이 복소수의 개념을 이해하는데 도움이 되고 불필요한 계산을 줄일 수 있다고 판단하여 수와 연산 영역에서 다루어지던 복

소수를 이차방정식과 연계하여 다루도록 [수학I]의 (2)방정식과 부등식 영역으로 이동

· 복소수는 심화 과목인 [고급수학Ⅱ]에서 보다 깊이 있게 다룸

· 2007 개정 교육과정 [수학]의 '유리식과 무리식' 영역을 삭제하고, 두 용어 '유리식', '무리식'만 [수학Ⅱ]의 (2)함수로 이동하여 유리함수와 무리함수를 이해하는데 필요한 최소한의 내용만을 다룰 수 있도록 함, 유리식과 무리식 관련 계산을 최소화하는 동시에 학생들의 학습량을 감축

· 자연수 집합과 동일한 용어를 사용하고 있어 개념의 혼동을 유발한다는 지적과 외국의 경우에도 교육과정에서 식의 인수분해에 중점을 둘 뿐 다항식의 약수와 배수를 특별히 부각시켜 다루지 않음을 확인하여 '다항식의 약수와 배수'에 대한 내용을 삭제

· 이차방정식, 이차부등식, 이차함수 내용 간의 연계성을 강화하고 서로 다른 영역에서 다루는 과정에서 불필요하게 발생하는 학습량을 감축하기 위하여 이차방정식의 이론과 이차함수의 성질이 자연스럽게 연계되도록 내용을 통합

④ [수학Ⅱ]

· '집합' 단원이 중학교와 중복된 개념이 많다는 의견을 반영하여 2007년 개정 교육과정 중학교 1학년 집합 내용을 고등학교 1학년에서 통합하여 지도

· '모든', '어떤'과 같은 한정사가 포함된 명제 및 이들 명제의 부정에 대한 학생들의 이해를 강화하기 위해 '모든, 어떤을 포함한 명제를 이해한다.'는 항목 추가. 용어와 기호에서는 '모든'과 '어떤'을 삭제

· '대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.'라는 항목을 추가. 대우를 이용한 증명방법, 귀류법에 대한 간단한 명제에 대한 증명을 보완

· 2007 개정 교육과정 [수학]의 '이차부등식과 절대부등식' 영역에서 다루던 절대부등식의 이해와 증명에 대한 내용을 '명제' 영역으로 이동 · 통합. 여러 가지 증명법과 함께 다룸

· 명제의 '이'는 용어에서 삭제하고 다루지 않음

· '유리식과 무리식의 계산량을 줄이는 것이 학습 부담을 줄일 수 있다.'는 의견을 반영해 2007 개정 교육과정 [수학]의 (라)함수 영역 중 '유리함수와 무리함수'에서 이 영역의 내용을 통합, 약화, 학습량 감소

· 2007년 개정 교육과정 [수학]의 (라)함수 영역 중 '이차함수의 활용'에서 '① 이차함수의 최대, 최소를 이해한다.'와 '② 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.'는 [수학I]의 '이차방정식과 이차함수', '여러 가지 부등식'으로 이동

· 복잡한 계차수열 부분과 계차수열 용어 삭제. '계차수열은 등차수열이나 등비수열이 되는 경우만 다룬다.'라는 〈교수 · 학습상의 유의점〉을 삭제

· 2007 개정 교육과정 [수학I]의 (다)수열 영역 중 '여러 가지 수열'에 제시되어 있는 내용 항목 중 'Σ의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.', '여러 가지 수열의 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.', '여러 가지 수열에 관한 문제를 해결할 수 있다.'를 통합하여 'Σ의 뜻과 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.', '여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.'로 약화

· 〈교수 · 학습상의 유의점〉에 '수열과 관련된 실생활 문제를 귀납적으로 표현할 수 있게 하고, 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않는다.'를 추가

· 알고리즘과 순서도 부분을 삭제하여 [수학Ⅱ]의 수열 영역의 내용 경감

· 지수와 로그의 정의 및 간단한 성질을 [수학Ⅱ]에서 다루고, 지수함수와 로그함수는 미적분과 함께 깊이 있게 다룰 수 있도록 [미적분Ⅱ]로 이동

· 상용로그의 지표와 가수 부분의 내용을 약화하여 학습량 감축

⑤ [확률과 통계]

· 용어 '합의 법칙', '곱의 법칙'을 추가, 〈교수 · 학습상의 유의점〉에 '합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해보거나 수형도를 그려보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하게 한다.'를 새롭게 제시하여 이후에 학습할 순열과 조합 등 다양한 경우의 수 계산의 기본 원리에 해당하는 합의 법칙과 곱의 법칙에 대한 이해가 충실하게 이루어지도록 함

· 이산수학 내용인 '세기의 방법' 중 '수와 집합의 분할' 추가

· [확률과 통계]는 [미적분I]이나 [미적분Ⅱ]와는 독립적으로 학생들이 선택하여 학습할 수 있는 교과목이므로 '연속확률변수의 뜻을 알고, 평균과 표준편차를 구할 수 있다.'를 삭제하여 연속확률변수의 평균과 표준편차를 구하는 내용을 다루지 않도록 함

· 기존에 사용한 기호이지만 〈용어와 기호〉에서 누락되었던 S^2, S를 〈용어와 기호〉에 추가

· 학생들이 통계에 대한 이론적 지식 뿐 아니라 실제 자료에 대한 통계적 처리 능력을 함양하도록 하기 위해 〈교수 · 학습상의 유의점〉에 '확률분포와 통계적 추정을 다룰 때에는 공학적 도구를 사용하여 실생활 자료를 처리해 보게 할 수 있다.'를 추가하여 강조

⑥ [미적분I]

· 2007 개정 교육과정 [수학I]의 마지막 영역으로 동떨어져 다루던 수열의 극한 부분을 [미적분I]로 이동하여 통합. 이때, 수열은 이미 무한수열을 의미하므로 '무한수열의 극한'을 '수열의 극한'으로 정정, '무한급수' 역시 '급수'로 그 용어를 수정

· 롤의 정리와 평균값 정리를 다루는 것이 학생들의 이해에 도움이 되고 학습량도 감축될 수 있으리라 여겨져 기초 미적분 과목인 [미적분 I]로 이동

(예) 평균값 정리는 미분의 활용에서 핵심적인 역할을 함: 도함수가 양일 때 증가함수가 된다는 것을 이해하는 과정이나 도함수가 영인 함수는 상수함수임을 논리적으로 설명하는 데 있어서 평균값 정리를 이용하는 것이 간단하고 명료함

· 〈교수 · 학습상의 유의점〉에 '롤의 정리, 평균값 정리는 함수의 그래프 등을 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.'를 추가
· [미적분I]에서 다루는 속도와 가속도의 문제를 직선 운동에 한정하기 위해 〈교수 · 학습상의 유의점〉에 '속도와 가속도에 대한 문제는 직선 운동에 한하여 다룬다.'를 추가
· '미분가능성과 연속성의 관계는 그래프를 통하여 확인하게 한다.'를 〈교수 · 학습상의 유의점〉에서 삭제
· '중간값'이라는 용어가 '중앙값'과 유사한 측면이 있어 혼란 유도, '중간값의 정리'를 '사이값 정리'로 용어 수정

⑦ [미적분Ⅱ]

· 지수함수와 로그함수를 같이 도입
· 지수방정식, 지수부등식, 로그방정식, 로그부등식 등의 용어를 삭제하고 '지수함수와 로그함수의 활용'으로만 언급. 무리한 지수 · 로그 방정식 및 부등식의 도입을 피하고 간단한 활용으로 안내
· 지수 · 로그함수의 성질과 극한, 미분을 통합. 이 개념들을 학생들이 종합적으로 이해할 수 있도록 하고 학습량도 감축
· [수학I], [수학Ⅱ]에서 삼각함수 자체를 과감하게 삭제. 호도법과 주기 관련 공식 및 삼각함수의 덧셈 정리를 [미적분Ⅱ]에서 삼각함수의 미분과 함께 다룸
· '사인법칙'과 '코사인법칙' 및 '삼각함수를 이용한 삼각형의 넓이 계산'에 대한 내용을 다루던 [수학]의 '삼각형에의 응용' 영역과 용어 '사인법칙', '코사인법칙'을 삭제. 삼각함수의 배각공식과 반각공식을 별도의 내용으로 다루지 않으며, 이에 대한 내용 항목 및 용어 '배각공식', '반각공식'을 삭제. 학생들의 학습량 감축
· 삼각방정식과 삼각부등식이라는 용어를 교육과정에서 서술하지 않음으로써 무리한 삼각방정식 및 삼각부등식의 도입을 피함
· 삼각함수의 극한을 별도의 중영역으로 하지 않고 사인함수의 도함수를 구하는 과정에서 자연스럽게 등장하도록 함으로써, 삼각함수의 극한과 관련된 여러 복잡한 계산 문제들을 줄여 내용 감축의 효과를 유도
· 삼각함수의 미분의 경우에 사인함수와 코사인함수의 미분만을 다룸. 탄젠트함수의 미분은 '미분법' 영역의 합성함수 및 역함수 미분을 배운 후에 그에 대한 응용으로 다룸
· [미적분I]에서 다루는 다항함수의 미분법 및 함수의 증가 · 감소, 극대 · 극소와 관련

된 내용 삭제. 내용의 중복을 피함

- 삼각함수, 지수함수, 로그함수는 각 함수를 다룰 때 미분법을 함께 다룸
- 음함수와 매개변수의 미분은 단순한 미분법만 익히는 것이 아니라 그 의미 및 활용도 함께 이해하도록 하기 위하여 [기하와 벡터]에서 곡선을 매개변수로 표현하는 법을 다룬 후에 그에 대한 미분을 다루도록 이동
- 도함수의 활용 부분에서 평균값의 정리는 [미적분I]로 이동. 속도와 가속도 및 거리 등에 대한 문제는 벡터를 배운 후에 다루어야 자연스러우므로 [기하와 벡터]로 이동. 상당한 부분을 차지하였던 '미분법 및 도함수의 활용'을 정리
- 다항함수의 적분법 내용 삭제. 지수함수 · 로그함수 · 삼각함수의 적분을 일일이 나열하지 않고 '여러 가지 함수의 적분'으로 통합
- 정적분의 활용에서 속도와 거리에 대한 문제는 미분법에서와 같이 벡터를 배운 후에 다루어야 자연스러우므로 [기하와 벡터]로 이동
- '회전체의 부피 구하기'는 일반 과목에서 삭제하고 심화과목인 [고급수학Ⅱ]에서 다룸

⑧ [기하와 벡터]

- 이차곡선의 방정식을 음함수 표현법으로 이해하고 음함수 미분법을 적용하도록 명시함으로써, 음함수 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구한 후 그 의미를 이해하며 이를 통하여 미분법의 위력을 알도록 함
- 매개변수 미분법은 매개변수로 표현된 곡선의 접선을 구하는 과정임을 알도록 함
- 공식으로 암기하던 이차곡선의 접선의 방정식 부분과 이차곡선의 직선과의 위치관계 부분을 삭제, 학습량을 경감
- 제7차 교육과정의 평면 운동의 속도와 가속도를 구하는 부분이 2007 개정 교육과정에서 미분법과 벡터의 위계 관계가 명시되지 않음으로 인하여 모호하게 처리. 2011 개정 교육과정에서는 미분법 다음에 나오는 벡터 부분에서 평면 운동의 속도와 가속도 구하는 부분을 다루도록 명시
- 방향벡터를 이용하는 것이 매개변수 표현법이고 법선벡터를 이용하는 것이 음함수 표현법임을 알고 나면, 공간에서 직선과 평면의 방정식을 바로 이해할 수 있기에, 평면벡터에서 방향벡터와 법선벡터를 먼저 공부하도록 배치
- 이미 잘 알고 있는 원의 방정식을 벡터를 이용하여 나타낼 수 있음을 보여줌으로써 벡터의 유용성을 강조
- 벡터의 성분을 다루는 부분에서 위치벡터를 좌표에 대응시킬 수 있음을 소항목으로 제시하여 강조

2.4. 2015 개정 수학과 교육과정

2015년 9월 23일 초 · 중등교육법 제23조 제2항에 의거하여 초 · 중등학교 교육과정을 고시하였다.

1) 2015 개정 수학과 교육과정(전체 내용)

<table>
<tr><th rowspan="3">학교급</th><th rowspan="3">학년</th><th colspan="3">보통교과</th><th rowspan="3">전문교과</th></tr>
<tr><th rowspan="2">공통과목</th><th colspan="2">선택 과목</th></tr>
<tr><th>일반선택</th><th>진로선택</th></tr>
<tr><td rowspan="3">중학교</td><td>1</td><td rowspan="3">수학</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">고등학교</td><td>1</td><td>수학</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td rowspan="2">수학 I (5)
수학 II (5)
미적분(5)
확률과 통계(5)</td><td rowspan="2">기하
실용수학
경제수학
수학과제 탐구</td><td rowspan="2">심화수학 I
심화수학 II
고급수학 I
고급수학 II</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td></tr>
</table>

(1) 성격

① 수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하여 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다.

② 수학은 오랜 역사를 통해 인류 문명 발전의 원동력이 되어 왔으며, 세계화 · 정보화가 가속화되는 미래 사회의 구성원에게 필수적인 역량을 제공한다.

③ 수학 학습을 통해 학생들은 수학의 규칙성과 구조의 아름다움을 음미할 수 있고, 수학의 지식과 기능을 활용하여 수학 문제뿐만 아니라 실생활과 다른 교과의 문제를 창의적으로 해결할 수 있으며, 나아가 세계 공동체의 시민으로서 갖추어야 할 합리적 의사결정 능력과 민주적 소통 능력을 함양할 수 있다.

④ 수학과 교육과정에서 초등학교 수학 내용은 '수와 연산', '도형', '측정', '규칙성', '자료와 가능성'의 5개 영역으로 구성된다.

· '수와 연산' 영역: 자연수, 분수, 소수의 개념과 사칙계산
· '도형' 영역: 평면도형과 입체도형의 개념, 구성요소, 성질과 공간 감각
· '측정' 영역: 시간, 길이, 들이, 무게, 각도, 넓이, 부피의 측정과 어림
· '규칙성' 영역: 규칙 찾기, 비, 비례식
· '자료와 가능성' 영역: 자료의 수집, 분류, 정리, 해석과 사건이 일어날 가능성

⑤ 중학교 수학 내용은 '수와 연산', '문자와 식', '함수', '기하', '확률과 통계'의 5개 영역으로 구성된다.

· '수와 연산' 영역: 정수, 유리수, 실수의 개념과 사칙계산
· '문자와 식' 영역: 식의 계산, 일차방정식과 일차부등식, 연립일차방정식, 이차방정식
· '함수' 영역: 좌표평면, 그래프, 정비례와 반비례, 함수 개념, 일차함수, 이차함수
· '기하' 영역: 평면도형과 입체도형의 성질, 삼각형과 사각형의 성질, 도형의 닮음, 피타고라스 정리, 삼각비, 원의 성질
· '확률과 통계 영역: 자료의 정리와 해석, 확률의 개념과 기본 성질, 대푯값과 산포도, 상관관계

⑥ 초등학교와 중학교에서 학습한 수학은 고등학교 수학 학습의 토대가 되고, 자연과학, 공학, 의학뿐만 아니라 경제 · 경영학을 포함한 사회과학, 인문학, 예술 및 체육 분야를 학습하는 데 기초가 되며, 나아가 창의적 역량을 갖춘 융합 인재로 성장할 수 있는 기반을 제공한다. 이를 위해 학생들은 수학의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다.

ⓐ 문제해결: 해결 방법을 알고 있지 않은 문제상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력
ⓑ 추론: 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력
ⓒ 창의 · 융합: 수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결 · 융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력
ⓓ 의사소통: 수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제해결과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력
ⓔ 정보 처리: 다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력
ⓕ 태도 및 실천: 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력

⑦ 수학 교과 역량 함양을 통해 학생들은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있다.

(2) 목표

수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하며 수학적으로 추론하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

[초등학교]

① 생활 주변 현상을 수학적으로 관찰하고 표현하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 수학의 기능을 숙달한다.

② 수학적으로 추론하고 의사소통하며 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 합리적으로 문제를 해결한다.

③ 수학 학습의 즐거움을 느끼고 수학의 유용성을 인식하며 자주적인 학습습관을 기른다.

[중학교]

① 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다.

② 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하고 문제를 합리적이고 창의적으로 해결한다.

③ 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 가치를 인식하며 수학 학습자로서 바람직한 태도와 실천 능력을 기른다.

[고등학교]

① 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 (선택 과목에 제시된 내용 영역)에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 숙달 한다.[34]

② 수학적으로 추론하고 의사소통하며, 창의 · 융합적 사고와 정보 처리 능력을 바탕으로 합리적으로 문제를 해결한다.

③ 수학에 대한 흥미와 자신감을 갖고 수학의 역할과 가치를 이해하며 자주적으로 학습하고 합리적으로 의사결정 하는 능력을 기른다.

(3) 내용 체계 및 성취기준[35]

가. 내용 체계

---

34) (예) 〈수학 I〉: 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 지수함수와 로그함수, 삼각함수, 수열에 관련된 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 숙달한다.

35) 중학교 부분만 제시, 고등학교 부분은 〈부록〉 참고

[중학교]

영역	핵심 개념	일반화된 지식	내용 요소			기능
수와 연산	수의 체계	수는 방정식의 해의 존재를 보장하기 위해 정수, 유리수, 실수 등으로 확장된다.	· 소인수분해 · 정수와 유리수	· 유리수와 순환소수	· 제곱근과 실수	이해하기 계산하기 판단하기
	수의 연산	각각의 수체계에서 사칙계산이 정의되고 연산의 성질이 일관되게 성립한다.				
문자와 식	다항식	문자를 통해 수량 관계를 일반화함으로써 산술에서 대수로 이행하며, 수에 대한 사칙연산과 소인수분해는 다항식으로 확장되어 적용된다.	· 문자의 사용과 식의 계산	· 식의 계산	· 다항식의 곱셈과 인수분해	표현하기 계산하기 문제해결하기 이해하기 활용하기 검토하기
	방정식과 부등식	방정식과 부등식은 양 사이의 관계를 나타내며, 적절한 절차에 따라 이를 만족시키는 해를 구할 수 있다.	· 일차방정식	· 일차부등식과 연립일차방정식	· 이차방정식	
함수	함수와 그래프	변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 함수는 대응과 종속의 의미를 포함하며, 그래프는 함수를 시각적으로 표현하는 도구이다.	· 좌표평면과 그래프	· 일차함수와 그래프 · 일차함수와 일차방정식의관계	· 이차함수와 그래프	이해하기 해석하기 표현하기 그래프 그리기 문제해결하기 활용하기 탐구하기
기하	평면 도형	주변의 형태는 여러 가지 평면도형으로 범주화 되고, 각각의 평면도형은 고유한 성질을 갖는다.	· 기본 도형 · 작도와 합동 · 평면도형의 성질	· 삼각형과 사각형의 성질 · 도형의 닮음 · 피타고라스 정리	· 삼각비 · 원의 성질	이해하기 설명하기 작도하기 판별하기 계산하기 문제해결하기 추론하기 정당화하기
	입체 도형	주변의 형태는 여러 가지 입체도형으로 범주화 되고, 각각의 입체도형은 고유한 성질을 갖는다.	· 입체도형의 성질			
확률과 통계	확률	사건이 일어날 가능성을 수치화한 확률은 정보화 사회의 불확실성을 이해하는 중요한 도구이다.		· 확률과 그 기본 성질		표현하기 수집하기 정리하기 그래프 그리기 표 만들기 해석하기 설명하기 계산하기 판단하기
	통계	자료를 수집, 정리, 해석하는 통계는 합리적인 의사 결정을 위한 기초 자료를 제공한다.	· 자료의 정리와 해석		· 대푯값과 산포도 · 상관관계	

나. 성취기준

[중학교 1~3학년]

1) 수와 연산

> 수는 방정식의 해의 존재를 보장하기 위해 정수, 유리수, 실수 등으로 확장되고, 각각의 수체계에서 사칙계산이 정의되고 연산의 성질이 일관되게 성립한다. 수는 수학에서 다루는 가장 기본적인 개념으로, 실생활뿐 아니라 타 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 또한, 수의 연산은 수학 학습에서 습득해야 할 가장 기본적인 기능 중 하나로, 이후 학습을 위한 기초가 된다.

[1] 소인수분해

① 소인수분해의 뜻을 알고, 자연수를 소인수분해 할 수 있다.

② 최대공약수와 최소공배수의 성질을 이해하고, 이를 구할 수 있다.

[2] 정수와 유리수

① 양수와 음수, 정수와 유리수의 개념을 이해한다.

② 정수와 유리수의 대소 관계를 판단할 수 있다.

③ 정수와 유리수의 사칙계산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

[3] 유리수와 순환소수

① 순환소수의 뜻을 알고, 유리수와 순환소수의 관계를 이해한다.

[4] 제곱근과 실수

① 제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

② 무리수의 개념을 이해한다.

③ 실수의 대소 관계를 판단할 수 있다.

④ 근호를 포함한 식의 사칙계산을 할 수 있다.

(가) 학습 요소

· 소수, 합성수, 거듭제곱, 지수, 밑, 소인수, 소인수분해, 서로소, 양수, 음수, 양의 정수, 음의 정수, 정수, 수직선, 양의 유리수, 음의 유리수, 유리수, 절댓값, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 역수, 유한소수, 무한소수, 순환소수, 순환마디, 제곱근, 근호, 무리수, 실수, 분모의 유리화, 양의 부호(+), 음의 부호(−), $|\ |$, $\leq$, $\geq$, 순환소수 표현(예. $7.\dot{2}1\dot{5}$), $\sqrt{\ }$

(나) 교수·학습 방법 및 유의 사항

· 최대공약수와 최소공배수는 자연수의 소인수분해를 이용하는 범위에서 다룬다.

· 다양한 상황을 이용하여 음수의 필요성을 인식하게 한다. (**태도 및 실천**)
· 정수의 사칙계산의 원리는 여러 가지 모델을 이용하여 직관적으로 이해하게 할 수 있다.
· 수의 소수 표현과 분수 표현의 장단점을 생각해 보게 하여, 각각의 표현이 가지는 유용성을 인식하게 한다.
· 유한소수를 순환소수로 나타내는 것은 다루지 않는다.
· 순환소수를 분수로 고치는 것은 순환소수가 유리수임을 이해할 수 있는 정도로 다룬다.
· 제곱근과 무리수는 피타고라스 정리를 이용하여 도입할 수 있다.
· 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이 등을 이용하여 직관적으로 무리수의 존재를 이해하게 할 수 있다.
· 실생활에서 사용되는 무리수의 예를 찾아보는 활동을 통해 무리수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

· 최대공약수와 최소공배수를 활용하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.
· 정수, 유리수와 관련하여 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.
· 사칙계산 이외의 이항연산 문제는 다루지 않는다.

2) 문자와 식

> 문자는 수량 관계를 명확하고 간결하게 표현하는 수학적 언어이다. 문자를 통해 수량 사이의 관계를 일반화함으로써 산술에서 대수로 이행하며, 수에 대한 사칙연산과 소인수분해가 다항식으로 확장되어 적용된다. 또한 방정식과 부등식은 양 사이의 관계를 나타내며, 적절한 절차를 따라 이를 만족시키는 해를 구할 수 있다. 문자는 수학적 의사소통을 원활히 할 수 있도록 도와주고, 문자를 이용한 방정식과 부등식은 여러 가지 문제를 해결하는 중요한 도구가 된다.

[1] 문자의 사용과 식의 계산
① 다양한 상황을 문자를 사용한 식으로 나타낼 수 있다.
② 식의 값을 구할 수 있다.
③ 일차식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

[2] 일차방정식
① 방정식과 그 해의 의미를 알고, 등식의 성질을 이해한다.
② 일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

[3] 식의 계산

① 지수법칙을 이해한다.

② 다항식의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

③ '(단항식)×(다항식)', '(다항식)÷(단항식)'과 같은 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

4 일차부등식과 연립일차방정식

① 부등식과 그 해의 의미를 알고, 부등식의 성질을 이해한다.

② 일차부등식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

③ 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

5 다항식의 곱셈과 인수분해

① 다항식의 곱셈과 인수분해를 할 수 있다.

6 이차방정식

① 이차방정식을 풀 수 있고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

(가) 학습 요소

· 대입, 다항식, 항, 단항식, 상수항, 계수, 차수, 일차식, 동류항, 등식, 방정식, 미지수, 해, 근, 항등식, 이항, 일차방정식, 전개, 부등식, 일차부등식, 연립방정식, 인수, 인수분해, 완전제곱식, 이차방정식, 중근, 근의 공식

(나) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

· 다양한 상황에서 문자의 필요성과 유용성을 인식하게 한다. (**태도 및 실천**)

· 문자와 수, 문자와 일상 언어의 공통점과 차이점을 찾아보게 하고 문자의 특징을 이해하게 한다.

· 지수법칙은 지수가 자연수인 범위에서 단항식의 곱셈과 나눗셈을 하는 데 필요한 정도로 다룬다.

· 다항식의 나눗셈에서는 다항식을 단항식으로 나누어 그 몫이 다항식이 되는 경우만 다룬다.

· 방정식과 부등식은 다양한 상황을 통해 도입하여 그 필요성을 인식하게 하고, 여러 가지 방법으로 풀어 보면서 더 나은 풀이 방법을 찾고 설명해 보게 한다. (**문제해결, 창의 · 융합, 의사소통, 태도 및 실천**)

· 방정식과 부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결하고 그 유용성과 편리함을 인식할 수 있게 한다. (**문제해결, 창의 · 융합, 태도 및 실천**)

· 방정식과 등식의 해가 문제상황에 적합한지 확인하게 한다. (**문제해결**)

· 수에 대한 사칙연산과 소인수분해가 다항식으로 확장될 수 있음을 이해하게 한다.

· 다항식의 곱셈과 인수분해는 다음의 경우를 다룬다.

$m(a+b)=ma+mb$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

· 다항식의 곱셈과 다항식의 인수분해의 역관계를 이해하고, 이와 유사한 관계를 찾아보는 활동을 하게 할 수 있다.

· 이차방정식은 해가 실수인 경우만 다룬다.

· '식의 값', '좌변', '우변', '양변', '이차식', '전개식', '연립일차방정식', '소거', '가감법', '대입법' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

· 방정식과 부등식에 대한 지나치게 복잡한 활용 문제는 다루지 않는다.

· 이차방정식에서 근과 계수와의 관계는 다루지 않는다.

3) 함수

> 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 함수는 대응과 종속의 의미를 포함하며, 그래프는 함수를 시각적으로 표현하는 도구이다. 여러 가지 현상에서 관찰할 수 있는 규칙 중에는 한 값이 변하면 다른 값도 일정한 규칙에 따라 변하는 것들이 많이 있다. 함수는 다양한 변화 현상 속의 수학적 관계를 이해하고 표현함으로써 여러 가지 문제를 해결하는데 도움이 된다.

[1] 좌표평면과 그래프

① 순서쌍과 좌표를 이해한다.

② 다양한 상황을 그래프로 나타내고, 주어진 그래프를 해석할 수 있다.

③ 정비례, 반비례 관계를 이해하고, 그 관계를 표, 식, 그래프로 나타낼 수 있다.

[2] 일차함수와 그래프

① 함수의 개념을 이해한다.

② 일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.

③ 일차함수의 그래프의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

[3] 일차함수와 일차방정식의 관계

① 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 이해한다.

② 두 일차함수의 그래프와 연립일차방정식의 관계를 이해한다.

[4] 이차함수와 그래프

① 이차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.

② 이차함수의 그래프의 성질을 이해한다.

(가) 학습 요소

· 변수, 좌표, 순서쌍, x좌표, y좌표, 원점, 좌표축, x축, y축, 좌표평면, 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면, 그래프, 정비례, 반비례, 함수, 함숫값, 일차함수, 기울기, x절편, y절편, 평행이동, 직선의 방정식, 이차함수, 포물선, 축, 꼭짓점, $f(x)$, $y=f(x)$[36)]

(나) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

· 실생활에서 좌표가 사용되는 예를 찾아보고 이를 수직선과 좌표평면 위에 표현해보며, 그 유용성과 편리함을 인식하게 한다. (**창의 · 융합, 의사소통, 태도 및 실천**)

· 그래프는 증가와 감소, 주기적 변화 등을 쉽게 파악할 수 있게 해 준다는 점을 인식하게 한다.

· 다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프 표현, 식으로 나타내고 이들 사이의 상호 변환 활동을 하게 한다. (**의사소통**)

· 속력과 거리, 속력과 시간과 같은 실생활의 예를 통해 정비례와 반비례 관계를 직관적으로 이해하게 하고, 정비례와 반비례 관계가 성립하는 실생활의 예를 찾아 설명하게 한다.

· 함수의 개념은 다양한 상황에서 한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계를 이용하여 도입한다. (**문제해결**)

· 다양한 상황을 이용하여 일차함수와 이차함수의 의미를 다룬다. (**창의 · 융합**)

· 함수의 그래프를 그리고 여러 가지 성질을 탐구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다. (**정보 처리, 의사소통**)

· '함수의 그래프' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

· 함수와 관련하여 지나치게 복잡한 활용 문제는 다루지 않는다.

36) '함수의 그래프'에서 '그래프'로 이름 수정, 정비례/반비례 중학교로 이동, '최댓값/최솟값' 삭제

4) 기하

> 주변의 형태는 여러 가지 평면도형이나 입체도형으로 범주화 되고, 각각의 평면도형이나 입체도형은 고유한 성질을 갖는다. 평면도형이나 입체도형의 성질에 대한 이해는 다양한 분야의 실생활 문제를 해결하는 데 기초가 되며, 수학의 다른 영역의 개념과 밀접하게 관련되어 있다. 도형의 성질을 정당화하는 과정에서 요구되는 연역적 추론은 수학적 소양을 기르는 데 도움이 된다.

1 기본 도형
① 점, 선, 면, 각을 이해하고, 점, 직선, 평면의 위치 관계를 설명할 수 있다.
② 평행선에서 동위각과 엇각의 성질을 이해한다.

2 작도와 합동
① 삼각형을 작도할 수 있다.
② 삼각형의 합동 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 합동인지 판별할 수 있다.

3 평면도형의 성질
① 다각형의 성질을 이해한다.
② 부채꼴의 중심각과 호의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 부채꼴의 넓이와 호의 길이를 구할 수 있다.

4 입체도형의 성질
① 다면체의 성질을 이해한다.
② 회전체의 성질을 이해한다.
③ 입체도형의 겉넓이와 부피를 구할 수 있다.

5 삼각형과 사각형의 성질
① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.
② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.
③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

6 도형의 닮음
① 도형의 닮음의 의미와 닮은 도형의 성질을 이해한다.
② 삼각형의 닮음 조건을 이해하고, 이를 이용하여 두 삼각형이 닮음인지 판별할 수 있다.
③ 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.

7 피타고라스 정리
① 피타고라스 정리를 이해하고 설명할 수 있다.

8 삼각비

① 삼각비의 뜻을 알고, 간단한 삼각비의 값을 구할 수 있다.
② 삼각비를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

[9] 원의 성질

① 원의 현에 관한 성질과 접선에 관한 성질을 이해한다.
② 원주각의 성질을 이해한다.

(가) 학습 요소

· 교점, 교선, 두 점 사이의 거리, 중점, 수직이등분선, 꼬인 위치, 교각, 맞꼭지각, 엇각, 동위각, 평각, 직교, 수선의 발, 작도, 대변, 대각, 삼각형의 합동 조건, 내각, 외각, 부채꼴, 중심각, 호, 현, 활꼴, 할선, 다면체, 각뿔대, 정다면체, 원뿔대, 회전체, 회전축, 접선, 접점, 접한다, 외심, 외접, 외접원, 내심, 내접, 내접원, 중선, 무게중심, 닮음, 닮음비, 삼각형의 닮음조건, 피타고라스 정리, 삼각비, 사인, 코사인, 탄젠트, 원주각, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, //, $\angle ABC$, $\perp$, $\triangle ABC$, $\equiv$, $\overset{\frown}{AB}$, π, □ABCD, $\backsim$, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$

(나) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

· 점, 선, 면, 각과 관련된 용어는 다양한 상황에서 직관적으로 이해하게 한다. (**문제해결**)
· 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 작도하는 활동을 하고, 자신의 방법을 설명하게 한다.
· 다각형의 성질에서는 내각과 외각의 크기의 합, 대각선의 개수를 다룬다.
· 다각형과 다면체는 그 모양이 볼록인 경우만 다룬다.
· 간단한 입체도형의 단면을 관찰하는 활동과 전개도를 접어 간단한 입체도형을 만드는 활동을 통해 평면도형과 입체도형의 관계를 직관적으로 이해하게 할 수 있다.
· 회전체 단면의 모양은 회전체의 성질을 이해하는 데 필요한 정도로 다룬다.
· 사각형의 성질은 대각선에 관한 성질을 위주로 다룬다.
· 공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 합동과 닮음의 의미를 이해하게 한다.
· 피타고라스 정리의 역은 직관적으로 이해하게 한다.
· 삼각비 사이의 관계는 다루지 않는다.
· 삼각비의 값은 $0°$에서 $90°$까지의 각도에 대한 것만 다룬다.
· 삼각비를 활용하여 직접 측정하기 어려운 거리나 높이 등을 구해보는 활동을 통해 그 유용성을 인식하게 한다.
· 원과 비례에 관한 성질은 다루지 않는다.
· 공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 도형을 그리거나 만들어보는 활동을 통해 도형의 성질을 추론하고 토론할 수 있게 한다. (**정보 처리, 추론, 의사소통**)
· 도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 관찰이나 실험을 통해 확인하기, 사례나 근거를 제시하며 설명하기, 유사성에 근거하여 추론하기, 연역적으로 논증하기 등과 같

은 다양한 정당화 방법을 학생 수준에 맞게 활용할 수 있다. (**추론, 의사소통**)

· '(도형의) 대응', '삼각형의 중점연결정리', '접선의 길이' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

· 복잡하게 변형된 평면도형의 넓이와 둘레의 길이, 입체도형의 겉넓이와 부피를 구하는 문제는 다루지 않는다.

· 정확한 용어와 기호의 사용, 복잡한 형식 논리 규칙의 이용을 요구하는 연역적 정당화 문제는 다루지 않는다.

5) 확률과 통계

> 사건이 일어날 가능성을 수치화한 확률, 그리고 자료를 수집, 정리, 해석하는 통계는 현대 정보화 사회의 불확실성을 이해하는 중요한 도구이다. 다양한 자료를 수집, 정리, 해석하고 확률을 이해함으로써, 미래를 예측하고 합리적인 의사결정을 하는 민주시민으로서의 기본 소양을 기를 수 있다.

[1] 자료의 정리와 해석

① 자료를 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형으로 나타내고 해석할 수 있다.

② 상대도수를 구하며, 이를 그래프로 나타내고, 상대도수의 분포를 이해한다.

③ 공학적 도구를 이용하여 실생활과 관련된 자료를 수집하고 표나 그래프로 정리하고 해석할 수 있다.

[2] 확률과 그 기본 성질

① 경우의 수를 구할 수 있다.

② 확률의 개념과 그 기본 성질을 이해하고, 확률을 구할 수 있다.

[3] 대푯값과 산포도

① 중앙값, 최빈값, 평균의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

② 분산과 표준편차의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

[4] 상관관계

① 자표를 산점도로 나타내고, 이를 이용하여 상관관계를 말할 수 있다.

(가) 학습 요소

· 변량, 줄기와 잎 그림, 계급, 계급의 크기, 도수, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형, 상대도수, 사건, 확률, 중앙값, 최빈값, 대푯값, 산포도, 편차, 분산, 표준편차,

산점도, 상관관계[37)]

(나) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항

- 다양한 상황에서 자료를 수집하고, 수집한 자료가 적절한지 판단하게 한 후, 자신의 판단 근거를 설명해 보게 한다.
- 다양한 상황의 자료를 표나 그래프로 나타내고, 그 분포의 특성을 설명할 수 있게 한다.
- 눈금 등을 부적절하게 사용하여 자료를 부정확하게 나타낸 표나 그래프에서 오류를 찾는 활동을 하게 한다.
- 상대도수는 도수의 총합이 다른 두 집단의 분포를 비교하는 상황에서 간단히 다루고, 상대도수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다.
- 경우의 수는 두 경우의 수를 합하거나 곱하는 경우 정도의 간단한 것을 다룬다.
- 확률은 실험이나 관찰을 통해 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다.
- 경우의 수의 비율로 확률을 다룰 때, 각 경우가 발생할 가능성이 동등하다는 것을 가정한다는 점에 유의한다.
- 자료의 특성에 따라 적절한 대푯값을 선택하여 구해보고, 각 대푯값이 어떤 상황에서 유용하게 사용될 수 있는지 토론해보게 한다.
- 대푯값과 산포도를 구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 상관관계는 양의 상관관계, 음의 상관관계, 상관관계가 없는 경우로 구분하여 다룬다.
- '계급값', '경우의 수' 용어는 교수 · 학습 상황에서 사용할 수 있다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 경우의 수는 두 경우의 수를 합하거나 곱하는 경우 정도로만 다루고, 순열과 조합을 이용하면 쉽게 해결되는 등의 복잡한 경우의 수를 구하는 문제는 다루지 않는다.
- 자료의 수집, 정리, 해석을 평가할 때에는 과정 중심 평가를 할 수 있다.

(4) 교수 · 학습 및 평가의 방향

가. 교수 · 학습 방향

ㄱ. 교수 · 학습 원칙

㈎ 수학과의 교수 · 학습은 학생이 수학과 교육과정에 제시된 목표를 달성하고 전인적으로 성장하도록 돕는 것을 목적으로 한다.

㈏ 수학과의 교수 · 학습은 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하고, 교육과정

37) '계급값' 삭제

에 제시된 목표, 내용, 평가와 일관성을 가져야 한다.

㈐ 문제해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천과 같은 수학 교과 역량을 함양하기 위한 교육 환경을 조성하고, 이에 적합한 교수 · 학습을 운영한다.

㈑ 학년군별 내용의 배열 순서가 반드시 교수 · 학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 · 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

㈒ 교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학습, 우수 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.

ㄴ. 교수 · 학습 방법

㈎ 수학과의 수업은 학생의 능력과 수준 등을 고려하여 설명식 교수, 탐구 학습, 프로젝트 학습, 토의 · 토론 학습, 협력 학습, 매체 및 도구 활용 학습 등을 적절히 선택하여 적용한다.

① 설명식 교수는 교사가 설명과 시연을 통해 수업을 주도하는 교수 · 학습 방법으로, 수업 내용을 구조화하여 체계적으로 지도하는 데 효과적이다. 이때, 교사는 학생의 적극적인 수업 참여를 유도하고, 사고를 촉진하는 발문을 적절히 활용한다.

② 탐구 학습은 학생이 중심이 되어 수학 개념, 원리, 법칙을 발견하고 구성하는 교수 · 학습 방법으로, 학생 스스로 자료와 정보로부터 지식을 도출하거나 지식의 타당성을 확인하는 능력을 기를 수 있게 한다.

③ 프로젝트 학습은 특정 주제나 과제를 탐구하기 위해 계획을 수립하고 수행하여 결과물을 산출하거나 발표하는 교수 · 학습 방법으로, 개인별 또는 집단별로 실시할 수 있다.

④ 토의 · 토론 학습은 특정 주제에 대해 협의하거나 논의하는 교수 · 학습 방법으로, 의사소통이 지니는 상호 협력적인 면을 강조한다. 이를 통해 학생들이 교과 내용을 폭넓게 이해하고 논리적이고 비판적으로 추론하며 다른 사람의 의견을 비판적으로 수용하고 자신의 주장을 효과적으로 표현하는 능력을 기를 수 있게 한다.

⑤ 협력 학습은 모둠 내의 상호작용, 의사소통, 참여를 통해 공동의 학습목표에 도달하도록 하는 교수 · 학습 방법으로, 다른 사람을 존중하고 배려하며 모둠 내의 역할을 이해하고 책임감을 기를 수 있게 한다.

⑥ 매체 및 도구 활용 학습은 학생의 수준과 학습내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수 · 학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다.

㈏ 문제해결능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 문제를 해결할 때에는 문제를 이해하고 해결 전략을 탐색하며 해결 과정을 실행하고 검증 및 반성하는 단계를 거치도록 한다.
② 협력적 문제해결 과제에서는 균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 동료들과 협력하여 문제를 해결하게 한다.
③ 수학적 모델링 능력을 신장하기 위해 생활 주변이나 사회 및 자연 현상 등 다양한 맥락에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하게 한다.
④ 문제해결력을 높이기 위해 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하고 그 과정을 검증하는 문제 만들기 활동을 장려한다.

(다) 추론 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.
① 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 수 있게 한다.
② 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적으로 수행하게 한다.
③ 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성하도록 한다.

(라) 창의 · 융합 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.
① 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출할 수 있는 수학적 과제를 제공하여 학생의 창의적 사고를 촉진시킨다.
② 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하게 하고, 해결 방법을 비교하여 더 효율적인 방법을 찾거나 정교화하게 한다.
③ 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 연결 · 융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하게 한다.

(마) 의사소통 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.
① 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확하게 사용하며, 수학적 표현을 만들거나 변환하는 활동을 하게 한다.
② 수학적 아이디어 또는 수학 학습과정과 결과를 말, 글, 그림, 기호, 표, 그래프 등을 사용하여 다른 사람과 효율적으로 의사소통할 수 있게 한다.
③ 다양한 관점을 존중하면서 다른 사람의 생각을 이해하고 수학적 아이디어를 표현하며 토론하게 한다.

(바) 정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.
① 실생활 및 수학적 문제상황에서 적절한 자료를 탐색하여 수집하고, 목적에 맞게 정리, 분석, 평가하며, 분석한 정보를 문제상황에 적합하게 활용할 수 있게 한다.
② 교수 · 학습 과정에서 적절한 교구를 활용한 조작 및 탐구 활동을 통해 수학의 개념과

원리를 이해하도록 한다.

③ 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수 · 학습 상황에서는 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있게 한다.

㈔ 태도 및 실천 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 수학을 생활 주변과 사회 및 자연 현상과 관련지어 지도하여 수학의 필요성과 유용성을 알게 하고, 수학의 역할과 가치를 인식할 수 있게 한다.

② 수학에 대한 관심과 흥미, 호기심과 자신감을 갖고 수학 학습에 적극적으로 참여하게 하며, 끈기 있게 도전하도록 격려하고 학습 동기와 의욕을 유발한다.

③ 학생 스스로 목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과를 평가하는 자주적 학습 습관과 태도를 갖게 한다.

④ 수학적 활동을 통하여 정직하고 공정하며 책임감 있게 행동하고 어려움을 극복하기 위해 도전하는 용기 있는 태도, 타인을 배려하고 존중하며 협력하는 태도, 논리적 근거를 토대로 의견을 제시하고 합리적으로 의사결정하는 태도를 갖고 이를 실천하게 한다.

㈊ 의미 있는 발문을 하기 위하여 교수 · 학습에서 다음 사항에 유의한다.

① 학생의 사고를 촉진하는 다양한 발문을 통해 상호작용이 활발한 교실 환경을 구축하고 학생의 능동적 수업 참여를 독려한다.

② 학생의 인지발달과 경험을 고려하여 발문을 하고, 발문에 대한 학생의 반응을 의미 있게 처리한다.

㈋ 개인차를 고려하여 수준별 수업을 운영할 때에는 다음 사항에 유의한다.

① 학습목표를 효과적으로 달성하기 위해 교실 내에서 개인차를 고려한 소집단을 구성하거나 수준별 학급을 구성하여 교수 · 학습을 전개한다.

② 수준별 수업을 위해 집단을 편성할 때에는 학생 개인의 능력과 수준, 적성과 희망, 교사 수급과 유후 교실 등의 학교 상황을 고려한다.

③ 수준별 수업은 내용 요소를 차별화하기보다는 내용의 깊이나 접근 방법에 차이를 두어 진행한다.

나. 평가 방향

ㄱ. 평가 원칙

㈎ 수학과의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 수집 · 활용하여 학생의 수학 학습과 전인적 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 것을 목적으로 한다.

(나) 수학과의 평가는 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수하고, 교육과정에 제시된 목표, 내용, 교수 · 학습과 일관성을 가져야 한다.

(다) 수학과의 평가에서는 수학의 개념, 원리, 법칙, 기능뿐만 아니라 문제해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천과 같은 수학 교과 역량을 균형 있게 평가한다.

(라) 수학과의 평가는 학습자의 수준을 고려하고 평가 목적과 내용에 따라 다양한 평가 방법을 활용한다.

(마) 평가 결과는 학생, 학부모, 교사 등에게 환류(feedback)하여 학생의 수학 학습 개선을 도울 수 있게 한다.

ㄴ. 평가 방법

(가) 수학과의 평가는 학습 결과 평가뿐만 아니라 과정 중심 평가도 실시하여 종합적인 수학 학습 평가가 될 수 있게 한다.

(나) 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가를 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통해 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

(다) 학생의 수학 학습과정과 결과는 지필 평가, 프로젝트 평가, 포트폴리오 평가, 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가, 자기 평가, 동료 평가 등의 다양한 평가 방법을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

① 지필 평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력과 문제해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통 능력 등을 평가하는 데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서 · 논술형 등의 다양한 문항형태를 활용한다.

② 프로젝트 평가는 수학 학습을 토대로 특정한 주제나 과제에 대해서 자료를 수집하고 분석, 종합, 해결하는 과정과 결과를 평가하는 방법으로, 문제해결, 창의 · 융합, 정보 처리 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

③ 포트폴리오 평가는 일정 기간 동안 수학 학습 수행과 그 결과물을 평가하는 방법으로, 학생의 학습내용 이해와 수학 교과 역량을 종합적으로 판단하고 학생의 성장에 대한 정보를 얻는 데 활용할 수 있다.

④ 관찰 평가, 면담 평가, 구술 평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 대화, 학생의 발표를 통해 학생의 이해 정도와 사고 방법, 수행 과정 등을 평가하는 방법으로, 의사소통, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑤ 자기 평가는 학생 스스로 자신의 이해와 수행을 평가하는 방법으로, 문제해결과 추론 과정의 반성, 자신의 생각 표현, 태도 및 실천 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

⑥ 동료 평가는 동료 학생들이 상대방을 서로 평가하는 방법으로, 협력 학습 상황에서 학

생 개개인의 역할 수행 정도나 집단 활동에 기여한 정도를 평가할 때 활용할 수 있다.

㈑ 평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다.

2) 2015 개정 수학과 교육과정의 특징 및 방향

(1) 교육과정의 문서 체계 및 내용 체계

가. 문서 체계

① 내용 체계 양식이 변화되었다.

> 1. 성격
> 2. 목표
> 3. 내용 체계 및 성취기준
>   가. 내용체계
>   나. 성취기준
>   [중학교 1~3학년]
>   (1) 영역명
>   머리말: 영역 및 성취기준 도입에 대한 설명
>
> | 성취기준 |
> |---|
>
>   (가) 학습 요소
>   (나) 교수 · 학습 방법 및 유의 사항
>   (다) 평가 방법 및 유의 사항
> 4. 교수·학습 및 평가의 방향
>   가. 교수·학습 방향
>   (1) 교수·학습 원칙
>   (2) 교수·학습 방법
>   나. 평가 방향
>   (1) 평가 원칙
>   (2) 평가 방법

② 초등학교부터 고등학교 〈수학〉까지는 영역을 단위로, 고등학교 선택 과목에서는 각 핵심개념을 단위로 성취기준을 제시하였다. 그리고 각 영역이나 핵심개념의 첫 부분에는 영역 및 성취기준 도입에 대해 설명하는 머리말을 두었다.

③ 각 영역이나 핵심개념에 대한 성취기준 다음에는 '학습 요소', '교수 · 학습 방법 및 유의 사항', '평가 방법 및 유의 사항'을 제시하였다.

나. 내용 체계

내용 요소를 포괄하고 부연하는 ‘핵심개념’, ‘일반화된 지식’, ‘기능’을 추가하였다.

<table>
<tr><th>영역</th><th>핵심
개념</th><th>일반화된 지식</th><th colspan="3">내용 요소</th><th>기능</th></tr>
<tr><td rowspan="2">수와
연산</td><td>수의
체계</td><td>수는 방정식의 해의 존재를
보장하기 위해 정수,
유리수, 실수 등으로
확장된다.</td><td rowspan="2">· 소인수
분해
· 정수와
유리수</td><td rowspan="2">· 유리수와
순환소수</td><td rowspan="2">· 제곱근과
실수</td><td rowspan="2">이해하기
계산하기
판단하기</td></tr>
<tr><td>수의
연산</td><td>각각의 수체계에서
사칙계산이 정의되고 연산의
성질이 일관되게 성립한다.</td></tr>
</table>

① 핵심개념

· 여러 개념들을 아우르는, 교과가 기반하는 학문의 가장 기초적인 개념이나 원리

· 학생들이 학습한 내용의 세부사항을 잊어버린 후에도 지속되어야 할 큰 개념(big idea)

· 미국, 영국, 호주, 캐나다, 싱가포르 등 주요국들의 동향을 반영

· 교과서의 사실적, 분절적 지식 전달과 습득에 제한되지 않고 교사는 수학교육과정을 기반으로 가르칠 수 있으며, 학생은 수학 고유의 체계 및 탐구방식을 이해할 수 있는 장점이 있음

· (예) 초등학교에서 자연수, 분수, 소수를 다루고, 중학교에서 정수, 유리수에 이어 무리수를 도입하여 실수까지 수를 확장하고, 고등학교에서는 허수를 도입하여 복소수까지 확장하는 것을 ‘수 체계’라는 핵심개념으로 포괄함으로써 초 · 중 · 고의 내용을 집약적으로 표현

② 내용

· 학년 및 학교급을 통해 학생들이 알아야 할 일반화된 지식

· 명제적 지식의 형태로 진술

· 핵심개념과 학년군의 내용 요소를 연결시켜주는 가교 역할을 하는 것

· 학년과 학교급을 관통하는 중심축

· (예) 초등학교에서 다루는 여러 가지 삼각형, 사각형의 성질에 대한 직관적인 탐구, 중학교에서 다루는 삼각형, 사각형, 원의 성질에 대한 정당화 등은 모두 각각의 평면도형이 불변함으로 갖는 고유한 성질에 대한 탐구임, 즉 주변의 형태들은

여러 평면도형 중의 하나에 포함되고, 특정한 평면도형은 그 내에서 모양이 바뀌더라도 항상 성립하는 성질을 갖는다는 것이 본질적인 특성이므로 이를 '내용'으로 진술함

③ 기능

· 수학 교과 고유의 탐구기능 및 사고방식을 반영하는 것
· 수학 내용을 학습한 후, 학생들이 할 수 있거나 할 수 있기를 기대하는 도달점(outcome) 혹은 수행능력으로 기술
· 학년군별 내용 요소는 교과 및 영역을 구성하는 지식이고 기능은 이러한 지식을 경험할 수 있도록 하는 것으로 교과역량이 구체화된 것
· 기존의 교육과정에서 강조한 계산하기, 이해하기 뿐 아니라 보다 다양한 행위동사를 포함시킴으로써 수업의 변화를 이끄는 하나의 기제가 될 수 있도록 함
· (예) 이해하기, 계산하기, 설명하기, 연결하기, 문제만들기, 문제해결하기, 어림하기, 검토하기, 추론하기, 토론하기 등
· '성취기준'과 '교수 · 학습 유의사항'을 진술할 때에는 이러한 기능을 내용요소와 결합하여 수학 교과역량의 구현을 촉진시키고자 함

(2) 교육과정의 방향 및 변경 사항

> 2015 개정 교육과정 총론의 비전은 창의 · 융합형 인재를 양성하는 것으로, 대표적인 개개정의 방향은 인문학적 상상력과 과학기술 창조력을 갖춘 균형 잡힌 인재의 양성이다. 2015 개정 수학과 교육과정은 총론이 추구하는 방향성을 반영하고, 수학과 교육과정의 국제적 동향을 반영하는 한편 2014년에 이루어진 '문 · 이과 통합형 수학과 교육과정 재구조화 연구'의 개정 방향을 이어받아 개정의 방향을 '수학 교과역량의 강조', '학습 부담 경감 실현', '학습자의 정의적 측면 강조', '실생활 중심의 통계 내용 재구성', '공학적 도구의 활용 강조'의 다섯 가지로 선정하였다.

가. 수학 교과역량의 강조

① 교육과정 총론 차원의 핵심역량(core competency): 자기관리 역량, 지식정보처리 역량, 창의 · 융합사고 역량, 심미적 감성 역량, 의사소통 역량, 공동체 역량

② 수학 교과역량: 문제해결, 추론, 의사소통, 창의 · 융합, 정보 처리, 태도 및 실천

교과역량	의미	하위요소
문제해결	해결 방법을 알고 있지 않은 문제상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력	문제 이해 및 전략 탐색, 실행 및 반성, 협력적 문제해결, 수학적 모델링, 문제 만들기
추론	수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력	관찰과 추측, 논리적 절차 수행, 수학적 사실 분석, 정당화, 추론 과정의 반성
창의 · 융합	수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하게 산출해내고 여러 관점에서 문제를 바라보고 해석하며 수학을 수학 내적 · 외적 상황과 연결시키고 활용하는 능력	독창성, 유창성, 융통성, 정교성, 수학 내적 연결, 수학 외적 연결
의사소통	수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제해결과정, 신념과 태도 등을 말이나 그림, 글, 기호로 명확하게 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하며 함께 협력하는 능력	수학적 표현의 이해, 수학적 표현의 개발 및 변환, 자신의 생각 표현, 타인의 생각 이해, 협력과 존중
정보 처리	다양한 자료와 정보를 수집 · 분석 · 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택 · 사용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력	자료 및 정보 수집, 자료 및 정보 분석, 정보 활용, 공학적 도구 및 교구 활용
태도 및 실천	수학의 가치를 인식하고 자주적인 수학 학습 태도와 민주시민의식을 갖추어 실천하는 능력	가치 인식, 자주적 학습 태도, 시민의식

③ 수학과 ‘성격’과 ‘목표’에 명시하며, ‘교수 · 학습 및 평가’에도 각각의 수학 교과역량을 상술하였다.

④ 〈교수 · 학습 유의사항〉에 적극 반영하였다. 학생들의 수학 교과역량을 신장시키는 방향으로 교과서가 집필되고 수업이 이루어지도록 하기 위함이다.

(예) 중학교 ‘확률과 통계’ 영역 〈교수 · 학습 유의사항〉

▸ 다양한 상황에서 자료를 수집하게 하고, 수집한 자료가 적절한지 판단하는 활동을 하게 한다. (**정보 처리**)

▸ 눈금 등을 부적절하게 사용하여 자료를 부정확하게 나타낸 표나 그래프에서 오류를 찾는 활동을 하게 한다. (**추론**)

▸ 확률은 실험이나 관찰 상황에서 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다. (**창의 · 융합**)

▸ 자료의 특성에 따라 적절한 대푯값을 선택하여 구해보고, 각 대푯값이 어떤 상황에서 유용하게 사용될 수 있는지 토론해 보게 한다. (**의사소통**)

나. 학습 부담 경감 실현

① 수학 학습 부담 경감은 제4차 교육과정부터 최근 교육과정에 이르기까지 매번 개정의 중점 사항으로 등장하고 있다.

② 수학 교수 · 학습을 통해 교과역량을 신장시키기 위해서는 탐구활동을 강조하고 다양한 해결 방안을 모색하는 한편 실생활과 연계시키는 것이 필수적이다. 따라서 여유 시간의 확보와 기존의 내용에서 일부를 감축하여 양과 수준의 적정화가 필요하다.

③ 학습 부담 경감을 내용 감축과 연계성 강화, 〈평가 유의사항〉을 통해 평가 가이드라인 제공, 교수 · 학습 방법 개선의 세 가지 방향에서 실현할 수 있다.

i) 내용 감축과 연계성 강화: 내용 삭제 혹은 약화 / 내용 상향 이동

– 초등학교

· 분수와 소수의 혼합계산, 원기둥의 겉넓이와 부피, 아르(a), 헥타르(ha) 삭제

· '정비례와 반비례' 중학교 1학년으로 상향 이동; 함수와 그래프 영역에서 불규칙한 변화를 나타내는 비정형적인 그래프를 다룬 이후, 정형적인 그래프의 예로써 정비례와 반비례를 다루도록 함

– 중학교

· '간단한 등식의 변형' 성취기준 삭제

· 최대공약수와 최소공배수의 활용 삭제

· 중학교 1학년 그래프 이해 강조

· 도수분포표에서의 자료의 평균 삭제

· 기하 단원 '도형을 만들고 조작하는 활동' 강조

· '함수' 개념 중학교 2학년으로 상향 이동; 대수식에 얽매이지 않고 실생활 맥락에서 그래프를 그리고 해석하는 활동 다룸

· '근호를 포함한 식의 사칙계산'과 '원주각의 활용' 약화

· 방정식, 부등식, 함수의 '활용'을 통합하여 서술; '활용'만을 별도의 단원으로 구성하다보면 인위적이고 어려운 활용 문제가 나오고, 이런 활용 문제가 유형화되면서 학생들은 유형에 따른 풀이를 암기, 자연스러운 활용 상황이 다루어지도록 유도하기 위하여 활용 관련 성취기준을 기능 부분과 통합하여 서술. 〈평가 유의 사항〉에 '지나치게 복잡한 활용 문제는 다루지 않는다.'를 명시

· '곱셈공식'과 '인수분해 공식'을 중학교 3학년으로 통합

· '연립일차부등식, 이차함수의 최대 · 최소'를 고등학교 1학년으로 상향이동 하여 통합

· '피타고라스 정리'를 중학교 2학년으로 이동; 학년별 학습량 적정화를 위해

– 고등학교

· 수열의 극한과 급수는 [미적분]으로 이동, 이공계열 진학 학생들만 선택

· 미적분을 도입하는 직관적인 접근 시도

· [수학] '부등식의 영역, 미지수가 3개인 연립일차방정식' 삭제

· [확률과 통계] '분할, 모비율' 삭제

· [기하] '공간벡터' 삭제

ii) '평가 유의사항'을 통해 평가 가이드라인 제공

· 학습내용의 범위를 줄이면 문항의 심도가 깊어지는, 즉 적은 수의 주제를 어렵게 구현한 문항들이 등장하여 내용이 감축되어도 학습부담은 경감되지 않는 경향을 보이고 있다.

· 각 학년별, 영역별로 '평가 유의사항'을 신성하여 교육과정을 벗어난 심화된 내용을 평가하지 않도록 안내하였다.

· (예) 고등학교 1학년 [수학]의 〈평가 유의 사항〉

: 이차방정식의 근과 계수의 관계는 주어진 이차방정식으로부터 두 근과 계수의 대수적인 관계를 알고 있는지 확인하는 수준에서 평가한다.

· 평가 문항의 범위와 수준을 제거함으로써 실제적인 학습부담 경감을 실현하였다.

iii) 교수 · 학습 방법 개선

· 동일한 내용이라도 교수 · 학습 방법에 따라 체감 난이도가 달라질 수 있기 때문에 조작 · 체험 · 탐구활동 중심으로 교실 수업의 변화를 도모할 수 있는 방향으로 교육과정의 각 학년별, 영역별로 '교수 · 학습 유의사항'을 이전 교육과정보다 상세하게 진술하였다.

· (예) 초등학교 1~2학년군 '도형' 영역의 교수 · 학습 유의사항

: 입체도형의 모양이나 평면도형의 모양을 다룰 때 모양의 특징을 직관적으로 파악하여 모양을 분류하고, 분류한 모양을 지칭하기 위해 일상용어를 사용할 수 있게 한다.

다. 학습자의 정의적 측면 강조

① 수학에 대한 긍정적인 인식을 강화시키기 위해 수학 학습에서의 성공 경험이 중요한데, 성공 경험이란 반드시 높은 점수를 의미하는 것이 아니라 수학 학습과정에서 작은 성공을 경험함으로써 수학에 대한 열패감을 극복하고 자신감을 회복하는 것을 의미한다.

② '태도 및 실천'을 교과역량의 하나로 설정하고, 학생들의 흥미, 가치, 인성, 자신감, 의지, 즐거움, 성공 경험 등을 진작시킨다.

③ 태도 및 실천 능력을 신장시키는 교수 · 학습
- 생활 주변 및 사회, 자연 등 다양한 현상과 관련지어 수학을 배움으로써, 수학의 역할과 가치를 인식하고 수학의 필요성을 알게 한다.
- 수학에 호기심, 흥미, 자신감을 갖고 학습에 적극적으로 참여하게 하며, 끈기 있게 도전하도록 격려하고 학습 동기와 의욕을 유발시킨다.
- 학생 스스로 학습목표를 설정하고 학습을 수행하며 학습 결과를 평가하는 자기 주도적 학습 습관을 갖게 한다.
- 수학적 사고를 기반으로 공정한 자세로 정직하게 행동하고 어려움을 극복하는 용기를 가지려 노력하는 태도와 타인을 배려하는 시민의식을 기른다.

라. 실생활 중심의 통계적 소양 교육 강조 및 내용 재구성

① 학업성취도 국제비교 연구 결과, 수학 내용 영역 중에서 확률과 통계에 대한 소양이 상대적으로 낮게 나왔다.

② 확률과 통계는 교과서에 갇힌 생명력을 잃은 지식이 아니라 교과서 밖으로 나와 일상과 유기적으로 연계되기에 가장 적합한 학교 수학의 주제이다.

③ 2015 개정 수학과 교육과정에서는 주어진 자료의 수동적인 처리에서 머무르지 않고, 자료의 수집, 정리, 해석 등 일련의 과정이 다루어지는 것을 강조하였다.

④ 중학교 1학년과 3학년 통계를 자료의 수집, 정리, 해석의 실생활 중심 통계 교육이 되도록 재조직, 통계에서 학습내용보다 자료의 수집, 정리, 해석의 '절차'를 강조하였다.

(예) 중학교 1학년 '자료의 정리와 해석' 단원명 바꿈

⑤ '확률과 통계' 영역을 '기하' 영역과 위치를 바꾸어 학습 부담 없이 통계적 소양 교육이 충실하게 이루어지도록 하였다.

⑥ 통계에서 자료를 표나 그래프로 정리할 때 공학적 도구의 사용을 성취기준에 포함시키고, 적극적으로 공학적 도구의 사용을 권장함으로써 실생활 자료의 사용이 가능하도록 하였다.

⑦ 일상생활 및 다른 분야의 활용도가 높은 산점도와 상관관계를 중학교 3학년에 추가

⑧ 고등학교 [확률과 통계]에서 자료수집 방법으로서의 표본조사의 의미를 강조하여 각종 미디어에 소개되는 통계 내용을 이해하는 통계적 소양을 기를 수 있도록 하였다.

마. 공학적 도구의 활용 강조

① 실제적인 맥락을 강조하는 수학 내용을 전개하기 위해 복잡한 계산을 공학적 도구에 위임하는 것이 필요하며, 공학적 도구의 활용에 더욱 개방성을 보이고 있는 세계적인

추세도 참작할 필요가 있다.

② 교과서와 수업에서 공학적 도구가 적극적으로 활용되어야 함을 명시적으로 강조하기 위하여 중학교 성취기준에 진술하였다.

(예) 중학교 '확률과 통계' 영역 성취기준; 공학적 도구를 이용하여 실생활과 관련된 자료를 수집하고 표나 그래프로 정리하고 해석할 수 있다.

③ 중학교 통계에 새로이 추가되는 산점도, 상관관계를 다룰 때 손으로 하는 복잡한 계산을 배제하고 적절한 공학적 도구를 사용하여, 이 개념들의 보다 본질적인 측면에 주목하도록 하였다.

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 제1차 교육과정의 특징은?

㉠ 미국의 진보주의의 교육, 특히 듀이의 실용주의 사상의 영향을 받아 실생활에서의 실용성을 강조하면서 사회적, 경제적, 문화적 생활과 관련된 상황과 문제를 수학적으로 해결하려는 생활 경험을 강조하는 방향으로 교육과정을 구성하였다. (생활단원학습기)

㉡ 수학을 일상생활과 무리하게 관련시킴으로써 수학적 체계가 무시되고 수학 내용의 수준이 낮아진 경향이 있었다.

2. 제2차 교육과정의 특징은?

: 학문으로서의 계통성에 충실하기 어렵다는 단점을 해소하기 위하여 수학 본연의 계통성을 중시하는 방향으로 선회하였으며(계통학습기), 기초 학력 배양에 힘쓰도록 하였고, 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하여 수리적인 사고 방법과 처리기능을 얻도록 하는데 주안점을 두었다.

3. 제3차 수학과 교육과정의 특징은?

㉠ 집합론, 위상수학, 기호논리학 그리고 추상대수와 같은 내용이 초등화 되어 학교 교육과정에 반영되었다.

㉡ 용어와 기호를 엄밀하게 사용하면서 직선, 반직선, 사선의 개념을 구분하고 측도에서 기호 m을 사용하여 $m(\overline{AB})$, $m(\angle ABC)$와 같이 나타내기도 하였다.

㉢ 정확한 개념 형성, 구조 규명, 수학적 사고 등을 위하여 집합 개념을 중점으로 사용하였다.

㉣ 수학적 개념형성에 있어서는 통일적인 방법을 택하기 위하여 나선형적 교육과정을 택할 수 있도록 하였다.

4. 제4차 교육과정의 특징은?

㉠ 기본적으로 새수학의 정신을 유지하되, 수학적 구조와 논리적 엄밀성의 무리한 강조를 지양하였다.

㉡ 일상생활의 여러 가지 현상을 수리적으로 생각하는 경험을 통하여 문제해결력의 계발에 중점을 두었다.

㉢ 학년간, 학교급간에 내용이 지나치게 중복되는 나선식 교재 구성을 탈피하고 단계적 교재를 구성하여 기본 개념을 보다 철저하게 이해시키도록 하였다.

5. 제5차 교육과정의 특징은?

: 세계 각국에서 문제해결에 대한 연구가 활성화 되었고 그 결과 많은 국가가 문제해결을 교육과정에 반영한 것과 같이 가장 핵심적인 상황으로 문제해결력의 신장을 두고, 이외에 정의적 목표의 강조, 최소의 필수 기본 지식 및 기능의 정선, 수학적 활동의 강화, 대다수 학생을 위한 수학교육, 학교수학의 유용성과 적용 가능성의 강조, 학습자 개개인의 경험, 욕구, 흥미 중시 등을 강조하였다.

6. 제6차 교육과정의 특징은?

: 범국민적 기초 소양으로서의 수학교육, 수학적 사고력과 문제해결력을 신장하는 수학교육, 실용성을 강조하는 수학교육, 계산기나 컴퓨터를 수학적 도구로 활용하는 수학교육, 학생의 적성, 능력, 진로 등에 적합한 학습의 기회를 제공하는 수학교육, 다양한 교수·학습 방법과 평가 방법이 이용되는 수학교육을 기본 방향으로 한다.

7. 2009 개정 교육과정에 따른 수학 과목의 목표는?

수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰함으로써 합리적이고 창의적으로 해결하며, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다.

가. 생활 주변이나 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 기능과 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하는 능력을 기른다.

나. 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변이나 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 기른다.

다. 수학에 대하여 관심과 흥미를 가지고, 수학의 가치를 이해하며, 수학 학습자로서 바람직한 인성과 태도를 기른다.

8. 2009 개정 교육과정에서 창의력 신장 방안은?

㉠ 수학적 창의력의 신장이 이루어지도록 수학적 문제해결력, 추론 능력, 의사소통 능력을 강조한다.

㉡ 다양한 아이디어를 산출할 수 있는 수학적 과제를 통해 학생들의 확산적 사고를 촉진시킨다.

㉢ 하나의 수학 문제를 여러 가지 방법으로 해결한 후 그 해결 방법을 비교해 보고, 더 높은 차원으로 확장해서 사고할 수 있게 한다.

㉣ 수학 개념이나 용어의 정의를 직접적으로 제시하기보다 학생 스스로 개념과 용어의 필요성을 인식하고 정의해 보게 한다.

9. 2009 개정 교육과정에서 인성 함양 방안은?

㉠ 다른 학습자의 풀이 방법과 의견을 존중하며, 이를 통해 타인을 배려하는 성품을 기르게 한다.

㉡ 자신의 수학적 아이디어를 설득력 있게 논리적으로 표현하여 그 타당성을 입증하고 이에 기초하여 합리적으로 결론을 내리는 과정을 통해 민주 시민의 소양을 기르게 한다.

㉢ 수학 문제를 해결함에 있어 결과에 이르는 과정이 중요함을 인식하게 한다.

10. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중 · 고등학교 주요 변화 내용은?

(1) 중학교에서의 주요 내용 변화

· 집합 삭제 · 근삿값 삭제 · 십진법과 이진법 삭제
· 수학 개념과 실생활 활용의 통합 · 방정식 관련 용어 약화
· 함수 개념 도입 방법의 변화 · 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
· 통계 교수 · 학습 방법의 변화 · 누적도수의 분포 삭제
· 줄기와 잎 그림 추가 · 정당화에 의한 기하 교육 강조
· 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소 · 원의 성질 내용 축소

(2) 고등학교에서의 주요 내용 변화

▶ 수학 Ⅰ
· 실수와 실수의 체계 삭제
· 복소수와 이차방정식의 연계 강화
· 다항식의 약수와 배수 약화
· 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

▶ 수학 Ⅱ
· 집합 내용 통합
· 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
· 함수 영역의 내용 약화
· 수열의 약화 및 이동
· 지수와 로그 내용 약화 및 이동

▶ 확률과 통계
· 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
· 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
· 공학적 도구의 활용 강조

▶ 미적분 Ⅰ
· 수열의 극한의 이동 통합
· 롤의 정리와 평균값 정리 이동
· 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제

▶ 미적분 Ⅱ
· 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
· 삼각함수 통합 및 약화
· 미분법 및 적분법의 내용 조정

▶ 기하와 벡터
· 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
· 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

11. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 수학적 창의성이란?

㉠ 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다.

㉡ 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

㉢ 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선적으로 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다.

㉣ 수학적 창의성을 계발할 수 있는 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

12. 자기 주도적 학습 능력을 신장시키기 위해?

㉠ 학생의 인지구조에 맞는 과제를 제시하고 스스로 학습할 수 있는 환경을 제공한다.

㉡ 교사는 학생 활동의 결과물만을 중시할 것이 아니라 그 과정을 더 중요시함으로써 학생 스스로 학습을 유지하고 결과를 이끌 수 있도록 돕는다.

㉢ 교사는 학생의 활동에 대해 옳고 그름을 평가해서는 안 되며 학생이 자신의 학습을 끝까지 유지할 수 있도록 격려한다.

㉣ 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해주어야 한다.

㉤ 교사는 학생이 능동적인 수업태도를 가질 수 있도록 비평가적인 열린 형식의 발문을 준비하고 활용해야 한다.

㉥ 학생 스스로 자신의 학습 활동에 대해 학습 일지를 써보게 하거나 학생 스스로 정한 학습목표에 달성했는지 점검할 수 있는 점검표를 제공한다.

㉦ 정답과 수행방법이 정해지지 않은 과제를 제시하고, 학생 스스로 정보를 탐색하여 과제 수행 방법을 스스로 결정하고 해결하도록 돕는다.

13. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 기하 영역의 목표는?

: 학생들이 도형을 탐구하여 기하적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서, 학생 활동을 중시하고 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측 활동을 강조한다.

14. 정당화에 의한 기하 교육의 변화는?

: '증명할 수 있다'를 대신하여 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다. 예를 들어,

삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다. → 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

와 같이 증명 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

15. '정당화'란?

: 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도이다.

16. '정당화'의 종류는?

: 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 예에 의한 정당화 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 구분된다. 이 때 수학적 증명은 논리적 연역법 즉, 기하 지식을 증거로 하는 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다.

17. 정당화를 유도하는 교수 방법은?

: 예를 들어, 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제해결(계산 증명), 그리고 귀납추론 등이 포함된다. 예를 들어,

- 컴퓨터 상에서 확인하기
- 수학적으로 증명하기
- 종이접기 활동 이용하기
- 모눈종이 위에 그려 보기
- 좌표평면 위에 그려 분석하기
- 컴퍼스와 자를 가지고 직접 작도하면서 분석하기

18. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육의 방향은?

: 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강조하는 것이다. 따라서 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

19. 2015 개정 수학과 교육과정에 명시된 6가지 수학 교과 역량은?

: 학생들은 수학의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제해결, 추론, 창의 · 융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다.

㉠ 문제해결: 해결 방법을 알고 있지 않은 문제상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력

㉡ 추론: 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력

㉢ 창의 · 융합: 수학의 지식과 기능을 토대로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출하고 정교화하며, 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 수학과 연결 · 융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하는 능력

㉣ 의사소통: 수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제해결과정, 신념과 태도 등을 말이나 글, 그림, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하는 능력

㉤ 정보 처리: 다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력

㉥ 태도 및 실천: 수학의 가치를 인식하고 자주적 수학 학습태도와 민주 시민 의식을 갖추어 실천하는 능력

수학 교과 역량 함양을 통해 학생들은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있다.

03

교직수학

1. 수와 연산 지도

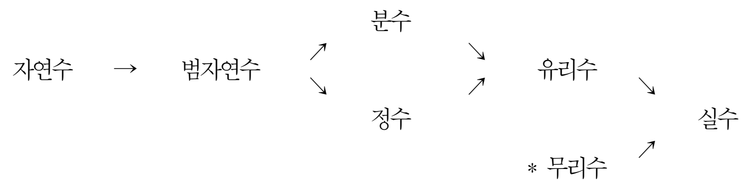
1.1 수 지도

1) 수의 종류

① 내용 상: 자연수, 정수, 유리수, 실수, 복소수, 대수적수, 초월수

② 관점 상: 셈수(counting number), 개수(numerosity number), 기수(cardinal number), 서수(ordinal number), 측정수, 작용소, 계산수 등

③ 발달사 상



* 무리수의 도입 – "유리수 집합의 절단"을 이용한 Dedekind의 방법
– "유리수의 Cauchy 수열"을 이용하는 Cantor의 방법

2) 자연수 지도

① Dewey: 사물을 다루는 인간의 '활동으로부터' 수 개념이 발생한다. 따라서 수 개념을 처음부터 완전히 추상화된 수학적 대상으로 제시하는 것이 아니라 측정 '활동'을 통하여 반성하고 성장하는 것으로 지도해야 한다.

② Piaget: 수학적 개념은 '행동의 일반적 조정에 대한 반영적 추상화의 결과로 구성되는 조작'이다. 즉 '조작(내면화[38]된 가역적[39] 행동)을 구성'함으로써 수가 지도되어야 한다.

3) 정수 지도

① 정수의 정의

㉠ 자연수에 '+' 부호를 붙인 수를 양의 정수, '–'를 붙인 수를 음의 정수라고 하며 0과

38) 자신의 행동을 의식하는 것으로부터 시작하여 그 행동을 머릿속에 넣는 것

39) 행동의 출발점으로 되돌아갈 수 있는 상태

양의 정수, 음의 정수를 통틀어 정수라고 한다.

㉡ 정수란 두 자연수의 차(差), 즉 $N\times N=\{(a,\ b)|\ a,\ b\in N\}$이다.

(예) +3=4−1=5−2=6−3= ‥ ⇒ +3={(4, 1), (5, 2), (6, 3), ‥}

+0=1−1=2−2=3−3= ‥ ⇒ 0={(1, 1), (2, 2), (3, 3), ‥}

−3=1−4=2−5=3−6= ‥ ⇒ −3={(1, 4), (2, 5), (3, 6), ‥}

② 음수의 역사

㉠ 방정식 $x+a=0\ \ (a\in N)$를 만족하는 근이 필요하였다. 그러나 음수를 설명할 실제적인 모델을 찾을 수 없어 음수를 역사상에서 수로 인정하지 않았다.

㉡ 그러다 17세기 Descartes의 해석기하학의 탄생 이후[40] 그리고 19세기 독일의 수학자 Hankel이 구체적인 모델 없이 음수를 인정하고 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수체계를 연구함에 의해 인정되고 활용 가능해졌다.

⇨ 음수는 역사상 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로 시각이 변화하였다.

③ 학교에서의 효과적인 정수(음수) 지도

학생들이 자연수를 구체적인 크기 개념과 관련지어 학습했기 때문에 정수(음수)도 구체적이고 직관적인 대상을 통하여 파악하려 하며 따라서 수학사의 흐름과 같이 음수에 대한 혼란이 시작된다. 따라서 형식적인 접근(형식적인 분석적 접근방법)과 다양한 직관적 해석(모델을 통한 직관적인 지도 방법)을 함께 고려하여 지도해야 한다.

㉠ 음수와 음수 연산을 설명하기 위해 사용되는 모델

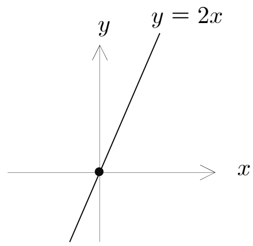
: 도박에서 돈을 딴 경우와 잃은 경우, 계단에서 위로 올라가기와 아래로 내려가기, 온도계에서 온도가 현재보다 올라간 경우와 내려간 경우 등이 활용 가능하다.

㉡ 직관적 해석

i) 수직선 모델(가장 많이 사용되는 모델)

: $+a$은 0에서 오른쪽 방향으로 a만큼 이동한 화살표, $-a$는 왼쪽 방향으로 a만큼 이동한 화살표로 약속하여 음수와 그 연산을 지도한다.

40) Descartes의 해석기하학에 의해 음수와 그 연산을 음수까지 확장 지도 & 음수에서의 대수적 기술 가능, 프로이덴탈은 이 방법을 "기하적-대수적인 형식불역의 원리"라 불렀다.



$x=1,\ \ y=2$

$x=0,\ \ y=0$

$x=-1,\ \ y=-2$

$x=-2,\ \ y=-4$

…

$a(-b)=-(ab)$ 확인 가능

ii) 셈돌 모델(Gattegno가 제안)

: $+a$는 검은돌 a개, $-a$는 흰돌 a개 그리고 $+a$와 $-a$가 만나면 상쇄되어 0이 되는 방법을 이용해 음수와 그 연산을 지도한다.

iii) 우체부 모델

: 어음(양수)과 고지서(음수)가 배달되고(+) 잘못 배달된 것은 되가져 가기(−) 상황을 이용해 음수와 그 연산을 지도한다.

㉢ 형식적인 접근

i) 귀납적 외삽법

: 자연수 연산에서 정수 연산에로의 귀납적 확장을 통해 정수의 연산을 지도한다.

$3 + 2 = 5$	$3 - 2 = 1$	$3 \times 2 = 6$	$(-3) \times 2 = -6$
$3 + 1 = 4$	$3 - 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$(-3) \times 1 = -3$
$3 + 0 = 3$	$3 - 0 = 3$	$3 \times 0 = 0$	$(-3) \times 0 = 0$
$3 + (-1) = \cdots$	$3 - (-1) = \cdots$	$3 \times (-1) = \cdots$	$(-3) \times (-1) = \cdots$
$3 + (-2) = \cdots$	$3 - (-2) = \cdots$	$3 \times (-2) = \cdots$	$(-3) \times (-2) = \cdots$

ii) 형식불역의 원리[41)]

음수 -2와 -3은 각각 $(-2)+2=0$과 $(-3)+3=0$을 뜻하는 자연수의 덧셈에 대한 역원으로 정의하고, 교환법칙과 결합법칙에 의해 $(-2)+(-3)$은 $-(2+3)$을 의미하도록 정의한다.

[참고] 지수를 자연수 지수에서 정수 지수로 확장

m, n이 자연수일 때, 지수법칙

$\mathrm{a^m a^n = a^{m+n}}\ (\mathrm{a} \neq 0)$

이 $\mathrm{m = a,\ n = 0}$일 때에도 성립한다고 하면

$\mathrm{a^1 a^0 = a^{1+0} = a}$

이고 양변을 a로 나누면

$\mathrm{a^0 = 1}$

이다. 또, 위의 지수법칙이 n=−m인 경우에도 성립한다고 하면

41) 형식불역의 원리: 기존의 기본적인 성질이 유지되면서 대수적인 구조를 확장하는 원리

(예) 수 지도: 기존의 산술 체계에서 각 방정식을 만족하는 것으로 간주된 새로운 형식적인 대상을 x로 도입하여($\frac{2}{3}$는 $3x=2$, -3은 $x+3=0$, $\sqrt{2}$는 $x^2=2$, $a^{\frac{p}{q}}$는 $x^q=a^p$, i는 $x^2=-1$의 한 해로 도입) 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계를 확장하고 연산과 관계를 확장한다.

$a^n a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$

이고 양변을 a^m 으로 나누면

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

또한, 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ 이 지수가 유리수일 때에도 성립한다고 하면

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$

이다. 따라서

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

이다. 지수가 유리수일 때에도 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ $(a > 0)$ 이 성립한다고 하면

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$

이며 $a^m > 0$ 이므로

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

이다.

㉣ 각 모델 활용 가능성 정리표

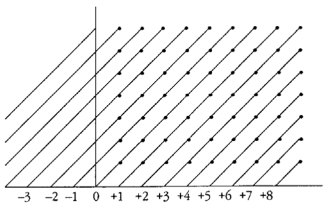
	수직선 모델	셈돌 모델	우체부 모델	귀납적 외삽법	형식불역의 원리
덧셈	○	○	○	○	○
뺄셈	○	○	○	○	○
곱셈	○	어려움	○	○	○
나눗셈	어려움	어려움	어려움	○	○
특이 사항	· 정수 = 수직선 위의 점 · 정수 = 벡터	· 정수 = 자연수의 순서쌍 · 덧셈과 뺄셈에 서로 역연산임을 명확히 제시	· 소득과 손실 모델을 바탕 · 재미있는 이야기나 극화로 활용	· 직관적 모델을 이용한 지도 후 계산 연습으로 활용	· 음수가 대수적 필요성에서 출현되었음을 보여 줌 · 기하(좌표)에서 음수의 필요성 확인 · 음수 인정의 당위성 제시

4) 유리수 지도

① 유리수의 내포적 정의: 분모, 분자가 자연수인 분수에 +와 −를 붙인 수 및 0

② 유리수의 외연적 정의: 정수의 순서쌍의 동치류

<유리수의 시각화>



좌표평면 R×R에서 원점과 한 정수 격자점을 지나는 직선 위의 모임 = 대등한 분수의 동치류

(cf) 무리수: 어느 격자점도 지나지 않는 원점을 지나는 직선

③ 유리수 지도의 다양한 문맥

㉠ 등분할 된 전체량과 부분의 관계(포함제)

(예) 1/5 = 사과 1개를 다섯 조각으로 나누었을 때 한 조각

㉡ 나눈 결과의 몫(등분제), $ax+b=0$

(예) 1/5 = 사과 1개를 다섯 명이 나눠먹을 때 한 명이 먹을 량

㉢ 비율 $a:b$(유리수의 본질)

㉣ 곱셈의 작용소

㉤ 측정수: 듀이의 측정 활동

④ 학교에서의 유리수 지도

㉠ 기본적으로 분수와 소수의 계산지도가 중심을 이룬다.

㉡ 유리수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대한 알고리즘적 측면만을 강조한다.

㉢ 유리수의 다양한 개념을 깊이 있게 다루지 않고 간단히 제시하고 있다.

㉣ 유리수의 사용이 가능한 현상을 조직하는 경험이 부족하다.

㉤ 유리수 개념이 정립될 수 있는 학생 스스로의 반성의 기회가 부족하다.

5) 무리수와 실수 지도

① 공리적 방법으로 지도

㉠ 실수의 기본 성질을 공리로 받아들이고 나머지 다른 성질들을 연역해 나아가는 방법으로 지도한다.

㉡ 엄밀한 공리적 방법보다는 실수의 기본 성질을 통해 몇 가지 연산에 관한 성질과 대소 관계에 대한 성질 연역이 더 효과적이다.

② 구성적 방법으로 지도

㉠ 자연수를 집합과 관계로부터 구성한 다음 정수계, 유리수계를 차례로 구성하고 유리수계의 확장으로서 실수계를 구성하는 방법으로 지도한다.

㉡ 실수계의 존재성을 실재로 구성해보는 방법이다.

㉢ 현재 학교수학에서는 실수를 유리수의 Cauchy 수열로 도입하지는 않지만 특정한 Cauchy 수열을 얻을 수 있는 무한소수로 실수를 정의하고 있다.

(예)

· 유리수 집합을 Dedekind cut으로 실수구성 · 유리수를 Cauchy수열로부터 그 동치류로 실수구성	→	적당히 덧셈·곱셈정의, 체의공리·순서공리·완비성의 공리가 만족됨, 증명	→	실수계 존재

③ 실수를 수직선과 동치로 지도

㉠ 자연수, 분수, 소수, 음수, 유리수, 무리수 등의 순으로 수직선을 채운다.

㉡ 수직선은 실수체계와 동형이므로 자연수, 정수, 유리수로 확장하면서 실수를 수직선 위의 자료로 생각하고 자연스럽게 점진적으로 분석 영역을 확장하게 된다.

④ 방정식 이용

(예) $x^2 = 2$ 가 유리수 해를 갖지 않으므로 해가 되는 수 $\sqrt{2}$ 를 도입한다.

⑤ 기하 이용

㉠ 단위 정사각형의 대각선의 길이와 같이 유리수가 아닌 수가 존재함을 발견하게 한다.

㉡ 바빌로니아 식 계산법을 이용해 넓이가 2인 정사각형의 한 변의 길이 $\sqrt{2}$ 를 구한다.

1.2. 집합 지도

1) 집합론의 창시자 Cantor

① 무한에도 여러 가지 단계가 있음을 보였다.

② 자연수의 산술을 무한의 산술로 확장하였다.

③ 집합에 기수와 서수를 도입하였다.

④ 초한수가 대수적 수보다 훨씬 많음을 보였다.

⑤ 차원이 다른 유클리드 공간의 기수가 같음을 보였다.
⑥ 유클리드 공간의 점집합의 위상적 성질을 논의하였다.

2) 집합 지도

① 집합 교재: 현대 수학의 집합 언어와 집합론의 내용적 측면의 일부인 자연수의 기수 측면과 그 연산이 초등화 되어 (고등학교 1학년에서만) 지도되고 있다.

② 집합 지도의 필요성

집합을 학습함으로써 학생들 스스로 수학의 각 영역에서 집합을 생각하고, 분류하며, 부분집합을 고려해보고, 집합사이에 대응을 생각해 보고, 관계를 발견하여 전체상을 파악하고, 개념을 명확화 · 단순화 · 통합화 할 수 있는 실험적 사고를 기를 수 있다.

③ 집합지도의 현실

㉠ 집합과 그 연산의 지도 자체가 목적이 되고 있으며, 합집합 · 공집합 · 여집합 · 멱집합 등의 연산 그 자체만을 지도하거나 연산에 치중하여 가르쳐지고 있다.

㉡ 집합과 그 연산의 지도를 위해 '꾸민 내용'이 증식되고 있다.

(예) {☆, ☆, ☆}, {□, △, ○}, {a, b, c}

㉢ 현학적인 집합지도 방법을 제시하는 경우가 있다.

(예) 집합을 사용할 필요 없는 상황에서도 집합을 이용한다.

$$\{x \mid x^2-5x+6=0\} = \{x \mid (x-2)(x-3)=0\} = \{x \mid x-2=0 \lor x-3=0\}$$
$$= \{x \mid x=2 \lor x=3\} = \{2, 3\}$$

㉣ 외연적 정의[42] 양식을 학교수학에 도입하여 정의 방식이 혼란을 겪고 있다.

(예) 기수란? 대등한 집합의 집합
정수란? 자연수의 순서쌍의 동치류
유리수란? 정수의 순서쌍의 동치류

㉤ 집합 표현방법에서 표기론적 오류를 범하고 있다.

· Venn 다이어그램과 집합기호 $\notin$, $\in$, $\subset$, $\not\subset$, $\cup$, $\cap$ 와 등호 =를 혼용하여 사용한다.

· $\{x \mid p(x)\}$꼴의 조건제시법을 활용한다.(=Russel의 패러독스 발생)

④ 효과적인 초등 집합지도 방법

㉠ Dienes의 특성 블록을 이용하여 색 · 모양 · 크기 · 두께에 따른 분류 활동을 집합 사이

42) 내포적(intensional) 정의: 개념이 나타내는 대상에 공통적인 속성으로써 정의하는 것
외연적(extensional) 정의: 개념에 포괄되는 대상 전체로 정의하는 방식

의 포함관계나 연산을 고려하여 구조화할 수 있다.

㉡ 공약수와 공배수를 약수의 집합과 배수의 집합의 공통집합으로 지도할 수 있다.

㉢ 자취를 점의 집합으로 보고 점의 교점 · 위치 · 포함 등을 따져 볼 수 있다.

(예) 평면 위 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점의 집합=$\overline{AB}$ 의 수직이등분선

㉣ 평면에서 한 점을 지나는 원의 집합, 두 점을 지나는 원의 집합, 세 점을 지나는 원의 집합을 생각하게 하여 세 점은 한 원을 결정함을 이용할 수 있다.

㉤ 수직선 위에서 동치인 분수의 집합을 고려하여 유리수 개념을 지도할 수 있다.

㉥ 여러 가지 사각형 사이의 관계나 수 체계 등의 포함관계를 Euler−Venn 다이어그램으로 나타내면 효과적이다.

㉦ 경우의 수 지도 시 집합을 고려할 수 있다.

㉧ 정수의 가법군, 유리수체, 실수체, 복소수체, 다항식 환을 암시적으로 다루면 효과적이다.

2. 문자와 식 지도

2.1. 대수의 역사 3단계

언어적 대수		생략적 대수		기호적 대수
· 기호 미사용 · 미지수나 계산의 전체적인 과정을 일상 언어만으로 기술 · 그리스, 아라비아, 인도 등 · 디오판토스 이전	⇒	· 풀이 방법은 언어로, 자주 반복되어 사용되는 개념이나 계산은 축약된 용어나 머리글자와 같은 생략기호를 사용 (예) plus → p, minus → m · 디오판토스의 Arithmetica(수론) 에서 16세기 초엽까지	⇒	· 모든 식과 연산이 일상 언어로부터 독립된 기호적 언어로 표현 · 16세기 Viete, Descartes 이후 발달

〈기호적 대수의 영향〉

① 수학적인 문제의 일반화 · 형식화 가능
② 해법의 공식화 가능
③ 수학적 원리와 방법의 타당성을 연역적 추론으로 처리 가능
④ 수학의 적용 범위 확대(구체성이 약하여 여러 가지 문맥에 적합)

2.2. 학교 대수

1) 산술언어 vs 대수언어

절차적 측면 (산술적 관점 – 산술언어)	이 행 →	구조적 측면 (대수적 관점 – 대수언어)
· 수치를 얻기 위해, 수를 가지고 행하는 산술적 연산 · 조작적인 '과정적' 관념 · a+b: 덧셈 연산 · 등호: 입력한 결과를 오른쪽에 출력하라는 기호로 해석, 비대칭적 · 표면상으로는 대수적인 예이지만 조작되는 대상은 대 수식이 아니라 그 식의 수치적인 대입 과정임 (예) 방정식에 수를 대입하여 해 구하기 초등 산술		· 수가 아닌 대수식 자체에 대해 행해지는 여러 연산 · 구조적인 '대상적' 관념 · a+b: a와 b의 합 · 등호: 왼쪽의 결과와 오른쪽의 결과가 대등함, 대칭적, 추이적인 관계로 해석 · 수행되는 연산을 통해 식의 구조가 변형되며 연산결과도 여전히 대수식으로 남아 있음 (예) 동류항 계산, 등식의 성질을 이용한 방정식 풀이, 인수분해, 전개 등 중등 대수

2) 산술언어에서 대수언어로의 지도

① 등호를 산술 언어 입장에서 이해하고 있기에 범하는 오류

$x+3=7$
$\quad =7-3 \Leftarrow$ 산술언어에서 범한 $1063+217=1280-425=855$와 같은 실수 즉, 생각하고 있는 순서대로 계산결과를 기술. 절차와 관계가 미분화된 상태
$\quad =4$

② 점진적 대수화 이용

(예) $7\times2-3=1+2\times5$ 등식 지도 후 $7\times\square-3=1+2\times5 \rightarrow 7\times-3=1+2\times5$를 지도

(예) $3\times7+3=25-1$ 지도 후 $a\times7+3=25-1$, $3\times b+3=25-1$, $3\times7+3=c-1$ 등을 제시

③ 대수적 언어 강조 시 수학언어는 알고리즘화 되어 형식화 되고 따라서 교사는 학생들이 수학을 점진적으로 형식화하여 스스로 알고리즘을 구성하고 교사와 학생이 함께 수학적 형식을 반성할 기회를 제공

㉠ 수학 언어: 명백한 규칙(여러 가지 연산과 괄호 등)을 따름. 이때, 이 규칙들은 사용하는 가운데 학습되어야 함

㉡ 대수적 언어 특히 형식적인 대입을 가르치기 위해서 계산을 행한다는 생각을 버리고 정적으로 해석하도록 함

④ 대수적인 전략과 전술 활용

(예) '대수적인 원리', (형식적인) 대입, 대수적인 번역, 방정식과 부등식 풀기 등

2.3. 문자 지도

1) 문자의 종류와 특성

① 문자의 정의

㉠ 수와 함께 문자식을 이루는 기호

㉡ 특수한 수나 조작을 나타내는 기호 (π , i , e, $\sum$ 등)

㉢ 여러 가지 일반적인 규칙을 나타내는 기호

㉣ 어떤 종류의 일반적인 원소를 나타내는 기호

(예) 점 P, 함수 f, 넓이 S, 부피 V, 반지름 r

② 문자의 종류

㉠ 미지수: 이미 그 값이 정해져 있지만 아직 알고 있지 못한 값을 나타내는 문자

㉡ 상수: 방정식이나 함수의 계수나 상수항과 같은 정해진 값을 나타내는 문자

㉢ 변수: 어떤 집합에 속하는 모든 원소를 취할 수 있는 값을 나타내는 문자

③ 문자의 특성: 수학적인 언어에 일반성, 유연성, 정확성을 부여해준다.

④ 문자의 역할

초등학교 수학	중학교 수학
· 문자 = 자리지기로 사용 · 문자식을 문자에 구체적인 수를 넣을 때 의미 발생	· 문자식의 계산이나 변형이 직접적인 취급 대상 · 문자식 ⊃ 수 · 문자식의 계산 ⊃ 수의 계산

2) 문자 지도 방법

① 문자 지도의 의의

: 문자의 의미를 해석하는 능력의 진보는 대수적 능력의 진보를 의미하며 결국 변수 개념을 표현하는 수단으로서의 문자에 대한 올바른 이해는 대수학습에서 가장 기본적이면서도 중요하다 할 수 있다.

② 아동들이 문자 또는 문자식을 어려워하는 이유

㉠ 학교에서 급속도로 문자와 문자식을 제시하고 있다.

㉡ 구체적 조작기에서 형식적 조작기로의 이행기에 있는 학생들이 문자를 배우기 때문이다.

③ 아동이 범하는 문자식에 대한 오류와 오류분석

㉠ 학생들이 문자 선택의 자유성을 인식하지 못하는 경향이 있다.

· 동일한 정의역에 대한 두 식 $y=2x$, $y=2k$ $(x, k \in \mathbb{N})$에서 x, k가 다르기에 다른 식으로 인식

· 같은 것을 다른 문자사용으로 나타낼 수 있음을 아는 학생도 서로 다른 문자는 서로 다른 것을 나타내어야 한다고 믿는 경향이 있음

㉡ 초등학교를 거치는 동안 수에 대한 조작이 몸에 배게 되어 중학교 수학에서 문자식 계산에 산술방법을 이용하여 계산하는 오류를 범한다.

(예) 20a+100b=120ab

㉢ 문자를 주어진 식의 값을 구하는데 사용하지 않은 문자로 보고 어떤 의미도 주지 않으려 한다.

(예) 20+a=100일 때, 25+a의 값을 구하는 문제에서 a값을 구해 대입하기보다 우변의 100에 ‘5’만 추가로 더하여 계산하는 모습

㉣ 문자를 어떤 실물의 약호 또는 실물 자체처럼 사용한다.

㉤ 문자식을 수, 문자, 계산 기호가 나열된 식으로 생각한다.

㉥ 문자를 처음부터 수치가 지정되어 있는 수치화로 보는 경향이 있다.

(예) $5+a=8$이면 a에 어떤 조작을 행하지 않고 직접 수를 대입하여 찾으려 함

㉦ 등호가 식의 변환이나 계산 조작의 흐름을 나타내는 것이며 등호의 우측은 좌측의 계산 결과를 나타내는 것으로 보고 그 역조작은 염두에 두지 않는다.

④ 효율적인 문자식의 지도 방법

구분	문자의 본질적 성질	수학 언어로서의 특징
'수'와의 차이점	동시 표현의 성질	문자사용의 일반성
'일상 언어'와의 차이점	한계 결정의 자유성	
	문자 선택의 자유성	문자사용의 유연성

2.4. 변수 지도

1) 변수의 종류

① 동적측면으로의 변수: 변화하는 대상(variable object)을 나타내는 기호

② 정적측면으로의 변수: 다가이름(polyvalent name)을 나타내는 기호

		동적측면으로의 변수	정적측면으로의 변수
특징		· 고전적 변수 개념 · 실제로 변하거나 변하는 것으로 가정되는 대상의 운동학적 상태를 나타내는 것 · 변화하는 세계에 살고 있는 우리가 변화하는 세계를 설명하기 위한 수단	· 현대적 변수 개념 · 동치인 여러 대상을 동시에 나타내는 것, 여러 상황의 '동시 고려' 필요성에서 발생 · 수학적 사고의 중요한 요소인 패턴의 일반화를 표현하는 수단
예	$\epsilon \to 0$	ϵ이 0에 한없이 다가간다.	모든 $\epsilon>0$에 대하여 $n>n_0$일 때 $\lvert x_n \rvert<\epsilon$인 n_0이 존재한다.
	함수 정의	두 변수 x, y에 대하여 x 값이 변함에 따라 y값이 하나로 정해지는 관계	두 집합 X, Y에서 X원소 x에 어떤 관계에 의하여 Y원소를 대응하는 관계

③ 자리지기(placeholder): 어떤 대상으로 채워질 빈 자리를 나타내는 기호

2) 대수를 보는 관점에 따른 변수의 의미

대수 개념	변수인 문자 사용의 의미
문제해결 과정의 학습	자리지기(place holder)로서의 미지수(unknown)
일반화의 학습	다가이름(polyvalent)으로서의 부정소(indeterminate)
양 사이의 관계 학습	독립변수, 종속변수, 매개변수
구조의 학습	임의의 대상, 임의의 기호(형식적 조작의 대상)

3) 변수 학습의 어려움과 지도 방법

① 변수 학습의 문제점

> 변수 개념에 대한 학습자의 제한된 학습 경험이나 정신적인 미성숙으로 인해 그의 마음속에 그릇된 개념 이미지43)가 형성되어 있어서 학습자가 변수를 사용하는 단계에서 갈등을 유발하게 된다.

㉠ 변수 기호를 임의로 선택할 수 있다는 것을 학생들이 잘 이해하지 못한다.

㉡ 변수를 접할 때 즉각적으로 수를 대신하는 것을 생각한 결과, 점, 명제, 행렬 등을 나타내는 문자를 변수로 이해하지 못한다.

㉢ $x+3=3x$, $(3+x)+(3-x)=3x+(-3x)$ 등과 같이 변수가 포함된 대수식을 완결되지 않은 식으로 여기고 수의 계산법처럼 계산한다.

㉣ $x+y=y+x(x,\ y\in\mathbb{N})$의 x, y처럼 임의의 수(양)를 나타내기 위해 사용된 문자의 역할(다가명사)을 바르게 이해하지 못한다.

㉤ 독립변수, 종속변수 개념을 불완전하게 이해하고 있으며, 독립변수에 대한 이해도와 종속변수에 대한 이해도에 차이가 나타난다.

---

43) 개념 이미지: 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조
개념 정의: 개념을 정확히 설명하는 언어적 인지 구조
(예) 함수의 연속

개념 정의	개념 이미지
일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이라고 한다. (i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 정의되어 있다. (ii) 극한값 $\lim_{x\to1}f(x)$가 존재한다. (ii) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$	교사가 함수의 연속에 대하여 곡선의 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있다는 방식으로 지도한 결과, 손을 떼지 않고 한 번에 그려지는 그래프의 함수를 연속함수라 답하는 학생들을 볼 수 있다.

② 변수 지도 방법

㉠ 변수의 여러 가지 측면을 이해하고 임의의 대수식을 관점에 따라 여러 가지로 해석하는 기회를 갖는다.

대수식	변수	대수식에서의 변수의 역할	변수의 역할
$y=ax+b$	a, b	특정한 방정식이나 함수를 결정하면 그 값이 하나의 값으로 고정된다.	미지수
		일반화된 대수적 표현이므로 아직 그 값이 결정되지 않았다.	부정소
		a, b의 값에 따라(즉, a, b를 매개로 하여) x, y 사이의 관계를 결정할 수 있다.	매개변수

㉡ 실세계의 변화하는 현상을 정리하고 다양한 현상 가운데에서 관찰되는 패턴을 일반화하는 것이 변수의 본질임을 알고 점진적으로 형식화하도록 한다.

㉢ 컴퓨터 프로그래밍 언어에서 변수 기호는 특정한 기억장소의 주소로 여겨지고 변수의 값도 그 기억 장소의 내용으로 간주되므로 $x+3$과 같은 식을 자연스럽게 하나의 대상으로 받아들이게 되고 기호의 임의성에 대해 이해할 수 있게 된다.

3. 함수 지도

3.1. 함수의 정의

① 종속관계로서의 함수

: x와 y사이의 관계식을 바탕으로 x의 값 하나 정해지면 그에 따라 y의 값이 하나씩 정해지고 이 관계를 y는 x의 함수라 한다.

② 대응관계로서의 함수

: 두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x에 어떤 규칙에 의하여 Y의 원소 y가 단 하나 정해질 때, 이 대응 규칙을 함수라 한다.

③ 순서쌍으로서의 함수

: 두 집합 X, Y에서 집합 X의 임의의 원소 x와 집합 Y의 원소 중, x에 대응하는 오직 하나의 원소 y를 택하여 만든 순서쌍 $(x,\ y)$들의 집합을 함수라고 한다. 즉,

$\forall x \in X,\ \exists y \in Y, (x, y) \in f$

$(x, y), (x, z) \in f$ 이면 $y = z$

를 만족하면 f를 X에서 Y로의 함수라고 한다.

3.2. 함수 개념의 발달사와 교육사

1) 함수 개념의 발달사

집합적 함수 단계(20세기)	Bourbaki
⬆	
논리적 함수 단계(19세기)	Dirichlet, Hankel
⬆㉠	
대수적 함수 단계(18세기)	Bernoulli, Euler
⬆	
기하적 함수 단계(17세기)	Oresme, Galilei
⬆	
전 함수 단계	바빌로니아, 그리스

㉠ 은 달람베르의 진동현, 프리에 급수[44], 디리끌레 함수[45] 등 이전 함수 개념으로 설명하기 어려운 상황들을 접하게 되는 과정에서 임의의 대응이라는 개념으로 전환하게 되었고, 변수 개념을 없앴고 일가성과 임의성을 강조하게 된다.

① 일가성: 정의역의 각 원소에 대해 치역의 단 하나의 원소가 대응된다는 조건, 함수와 함수가 아닌 것을 구분하는 기준
② 임의성: 함수는 어떤 특별한 표현에 의해 기술되거나 또는 어떤 규칙성을 따르거나 또는 어떤 특별한 형태를 가진 그래프에 의해 묘사될 필요가 없다는 조건

2) 함수 개념의 교육사

① 20세기 초 독일의 Klein이 수학교육 개혁에서 '함수적 사고(functional thinking)' 교육의 중요성을 강조하여 이에 따라 '메란 교육과정'을 제정하였다.
② Meran 교육과정 이후 「변수 사이의 변화 관계라는 전통적인 고전적인 함수 개념」을 바탕으로 다항함수와 초월함수의 성질과 그 미분법과 적분법에 대한 논의가 중심을 이루었다.
③ 1960년 '새수학' 이후(우리나라는 제3차 교육과정 이후) 집합 사이의 일가성을 갖는 임의적인 대응관계라는 Dirichlet-Bourbaki 식의 현대적인 함수 개념과 일차 · 이차 함수를 중심으로 한 다항함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등 특별한 규칙을 갖는 함수만을 다루는데 중점을 두었다.

3) 우리나라 교육과정에 따른 함수 정의 지도

① 교수요목기부터 제2차 교육과정까지 '종속 함수' 개념으로 함수가 도입되었다.
② 제3차 교육과정부터 제6차 교육과정까지 '대응 함수' 개념으로 함수가 도입되었다.
③ 제7차 교육과정에는 다시 '종속 함수' 개념으로 함수가 도입되었다. 그리고 고등학교에서 '대응관계'로 함수가 정의되었다.
④ 제7차 개정 교육과정부터 현재까지 '종속관계에 대한 대응관계'의 개념으로 함수가 도입된다.

---

44) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2x+1)x}{(2n+1)}$

45) $f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 0 & (x\text{가 무리수일 때})\end{cases}$
$= \lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}(\cos^2 n!\pi x)^k)$

4) 대응관계로서의 일반적인 함수개념에 의해 발생한 교수학적 문제점

① 메타인지적 방향 전환이 일어난다. 즉 학습의 초점이 함수 개념 자체에서 함수를 지도하기 위한 '함수 기계'나 인위적인 집합 사이의 대응표와 대응도 등으로 옮겨진다.
② 특정한 함수 기호 $y=f(x)$로 고착되는 '형식적 고착'이 이루어진다.

3.3. 함수 학습의 어려움과 지도방안

1) 함수 학습에서 보이는 학생들의 어려움

① 학생들은 변화 현상을 관찰하면서 변하는 대상이 무엇인지, 그 대상을 변하게 하는 것이 무엇인지 명확히 파악하지 못하는 경향이 있다.
② 함수의 정의에서 독립변수와 종속변수의 비대칭성을 잘 인식하지 못한다. 학생들은 첫 번째 좌표에 의해 유일하게 결정되는 것이 두 번째 좌표이고, 그 역이 성립하지 않는다는 것을 인식하는 데 어려움이 있다.
③ 학생들이 비례 관계나 인과 관계와 같은 특수한 경험에만 집착하여 함수를 이해하였기 때문에 함숫값은 독립변수에 따라서 변화되어야 한다는 선입관을 가지고 있다. 이로 인해 상수함수를 함수로 받아들이는 데 어려움이 생긴다.
④ 학생들은 함수를 체계적인 규칙이나 함수식으로 보는 경향이 강하며, 종속변수의 값을 구하기 위해 독립변수에 실행된 조작이라고 생각하는 경향이 있다.
⑤ 학생들은 함수는 모든 정의역에서 한 가지 규칙이나 대수식으로 표현되어야 한다고 생각하는 경향이 있다. 따라서 한 가지 이상의 규칙이나 대수식으로 표현된 함수들을 받아들이는 데 어려움이 있으며, 함수의 그래프는 규칙적이고 체계적이어야 하며, 갑작스런 그래프상의 변화가 일어나면 함수가 아니라고 생각한다. 이는 함수의 임의성을 이해하지 못한 결과이다.
⑥ 학생들은 함수를 함수의 다양한 표현, 즉 표, 대수식, 곡선으로서의 그래프 등과 동일시하는 경향이 있어 함수의 본질에 어긋날 때가 있다.
⑦ 학생들은 함수에서 중요한 변수 개념을 이해하는 데 어려움이 있다. 즉 정적변수와 동적변수의 활용을 정확히 알지 못하며 그에 따른 함수에 대한 관계도 부족하다.
⑧ 학생들은 함수의 개념을 외부로부터 제시받았을 뿐 자신의 경험을 조직하는 행동을 통해서 추상화하지 못했기 때문에, 함수의 정의에서 나타나는 일가성(정의역의 각 원소에 대해 치역의 단 하나의 원소가 있다), 일대일 함수, 일대일 대응의 의미를 혼동한다.

2) 함수 지도 방법

> 프로이덴탈: 함수 교육은 함수로서 조직될 필요가 있는, '종속적인' 관련성을 갖는, 학습자 주변의 다양한 현실적인 변화 현상으로부터 출발하여 종속관계에 대한 심상의 구성을 바탕으로 점진적인 수학화 경험을 거쳐 최종적으로 집합 사이의 대응 관계로서의 현대적인 함수 개념에 이르도록 해야 한다.

① 실제적인 물리적, 사회적인 변화 현상을 기술하고 해석하는 경험(체험을 통해서 깨닫는다는 뜻)으로부터 출발하여 점진적으로 함수 개념을 재발명하도록 지도해야 한다.

② 그래프를 통한 함수의 시각적 측면을 보다 강조하고, 함수와 관련된 내용은 가능한 한 그래프와 결부시켜서 생각하도록 지도함으로써 함수적 감각을 발달시켜야 한다.

③ 함수를 다룰 때 함수를 이야기로, 대응표로, 화살표 기호로, 수직선 위에서 함수기계로 경험시키고 여러 가지 함수 경험의 동형성을 강조하며 이러한 함수 경험을 통해 함수적인 관계에 대한 심상이 구성되게 한 다음 이를 기호화, 대수화하는 교수학적 계열이 자연스럽다.

(예) 화살표 기호 $x \to x+2$, $x \to x-2$, $x \to 2-x$, $x \to 2 \cdot x$, $x \to 2/x$

④ 함수의 대수는 함수의 합성과 역함수의 대수화를 포함하도록 하되 이는 대응표, 함수기계, 화살표 기호, 도해 등을 통한 비형식적인 사고 경험을 시키고 이에 이어지도록 하는 것이 자연스럽다.

(예) 둥근 화살표 기호

⑤ 독립변수를 한 가지 기호 x로 한정하지 말고 변수를 나타내는 문자를 자유로이 바꿀 것을 강조한다.

(예) $y = \log \sin 3x$에 대하여 $x \to y = 3x$, $y \to z = \sin y$, $z \to u = \log z$로 분해하여 미분하도록 해야 기계적인 조작이 되지 않는다.

⑥ 해석분야는 물론이고 대수, 기하, 확률과 통계분야 등 학교수학의 전 영역에 걸쳐 모든 내용을 함수적인 관점에서 해석하고 여러 가지 수학 내적 외적인 문제를 함수적으로 보고 해결하는 함수적 사고 능력과 태도를 기르도록 해야 한다.

4. 기하 지도와 증명 지도

4.1. 기하 지도

1) 기하교육의 목표

① 평면도형과 입체도형의 개념과 그 기본적인 성질을 이해할 수 있다.
② 평행이동, 대칭이동, 회전이동 등 기하학적 변환에 대한 기본적인 사항을 이해할 수 있다.
③ 증명의 의의와 방법, 곧, 연역적 방법을 이해할 수 있다.
④ 증명 능력을 개발할 수 있다.
⑤ 공간적인 상상력을 신장시킬 수 있다.
⑥ 기하의 대수적 접근법과 벡터에 의한 접근법을 습득할 수 있다.
⑦ 기하학적 개념과 다른 수학적 개념을 통합할 수 있다.

2) 현재 학교에서 지도되는 기하의 종류

직관기하 평면논증기하	삼각형의 합동조건에 바탕으로 둔 전통적인 Euclid식 접근	접근방법이 다양하기 때문에 내용이 당연히 다르게 전달되며 따라서 공간인식의 의미가 달라지게 된다.
공간기하		
해석기하 벡터기하	해석기하학적 접근을 바탕으로 벡터에 의한 선형대수적 접근	
변환기하	변환군에 바탕으로 둔 Klein식 접근	

3) 여러 가지 기하 접근

① Euclid식 접근
㉠ 직관기하: 초등학교부터 중학교 1학년 정도까지 이루어지는 기하로 학생들의 직관만을 이용한 기하이다.

㉡ Euclid 기하[46]

ⓐ 삼각형의 합동조건과 닮음조건 및 보조선 방법이 중심을 이루는 '삼각형 기하학'을 의미한다.

ⓑ 그리스적인 전통에 뿌리를 둔 논증기하이다.

ⓒ 형식도야제로서의 역할을 하며, 논리적 사고력, 개념적 사고력, 공간 직관력, 생산적 사고를 신장시키는데 도움이 된다.

장점	단점
· 논리적 사고력 도야(형식도야제) · 도형 개념 형성 · 공간 직관력 개발 · 수학적 사고 개발	· 형식적인 엄밀한 교육 (이른 기성체계 제시) · 비실용성 · 발견의 논리인 분석법 삭제

ⓓ 일상적인 사고를 형식적인 사고로 전이시키는 중개자의 역할을 한다.

ⓔ 학생들이 도전할 수 있는 문제와 문제해결 교육에 적절한 다양한 문제를 포함한다.

ⓕ 연역적 방법을 훈련시키는 주요 분야이다.

㉢ 공리적 방법: 인간이 직관적으로 자명하게 참으로 인정하는 사실을 공리와 공준으로 상정한 다음, 공리와 공준으로부터 다른 모든 수학적 명제를 이끌어내는 방법. 이와 같이 정의, 공리, 공준, 이미 참이라고 알려진 성질을 이용하여 새로운 참인 명제를 이끌어내는 것을 연역적 추론이라고 한다.

㉣ Euclid 기하의 내용을 중학교 학생들이 쉽게 이해하고 알아들을 수 있도록 교수학적 변환을 하여 교과서에 수록하고 있다. 이 때, Euclid 〈원론〉은 학문 수학이며 중학교 교과서의 수학 내용은 학교 수학이다.

(예) 〈원론〉의 정의, 공리, 공준으로 제시된 내용은 학생들의 직관이나 수학적 상식에

46) 〈유클리드 원론〉

〈정의〉
· 점이란 부분이 없는 것이다.
· 선이란 폭이 없는 길이이다.
· 직선이란 그 위의 모든 점이 곧게 놓여 있는 선이다.
· 면이란 길이와 폭만을 갖는 것이다.
· 평면이란 그 위의 모든 직선이 곧게 놓여 있는 면이다.
· 한 직선이 다른 직선과 만났을 때 생기는 이웃한 각이 서로 같을 때, 같게 되는 이 각을 각각 직각이라고 한다. 이때 한쪽 선분은 다른 직선과 수직이라고 한다.
· 동일한 평면상에서 양쪽 방향으로 한없이 연장하여도 서로 만나지 않는 두 직선을 평행선이라고 한다.

〈공리(Axiom)〉
· 같은 것에 같은 것은 모두 서로 같다.
· 같은 것에 어떤 같은 것을 더하면 그 전체는 서로 같다.
· 같은 것에서 어떤 같은 것을 빼면 나머지는 서로 같다.
· 서로 포개어지는 것은 같다.
· 전체는 부분보다 크다.
〈공준(Postulate)〉
· 한 점에서 또 다른 한 점으로 한 직선을 그릴 수 있다.
· 유한직선은 무한히 연장시킬 수 있다.
· 임의의 점을 중심으로 하고 그 중심으로부터 그려진 임의의 유한직선과 동일한 반경을 갖는 원을 그릴 수 있다.
· 모든 직각은 서로 같다.
· 한 직선이 두 직선과 만날 때, 같은 쪽에 있는 내각의 합이 두 직각보다 작으면 이 두 직선은 무한히 연장될 때 그쪽에서 만난다.

의존하여 자연스럽게 도입하고 있다.

(예) 〈원론〉에서 공준을 전제해야만 증명할 수 있는 기본적인 명제를 직관적으로 설명함으로써 참임을 정당화하여 지도한다. (이후 이 참인 명제를 근거로 새로운 참인 명제들을 계속적으로 연역한다.) – 국소적 조직화

[참고] 중학교 교과서에서와 같이 학생들의 수학적 상식에서 출발하여 적은 범위의 수학 내용을 조직하는 것을 국소적 조직화로 명명한다. 반면 Euclid 〈원론〉에서와 같이 기본이 되는 전제로서 정의, 공리, 공준을 설정한 다음 그것으로부터 전체 수학 내용을 모두 조직하는 방식을 전반적 조직화로 명명한다.

[참고] 프로이덴탈(H. Freudenthal, 1973)이 제시한 국소적인 조직화의 전형적인 예 : 정리 "삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점을 지난다"의 증명

ⓐ 수학을 창조하고 적용할 때의 논리적 사고 활동은 국소적 조직화 활동이며, 수학 학습 역시 국소적 조직화 활동 경험이 되어야 한다.

ⓑ 삼각형 ABC에서 점 M은 $\overline{AB}$의 수직이등분선 위에 있으므로, $\overline{MA}=\overline{MB}$이다.
점 M은 $\overline{BC}$의 수직이등분선 위에 있으므로, $\overline{MB}=\overline{MC}$이다.
따라서 $\overline{MA}=\overline{MC}$이므로, 점 M은 $\overline{AC}$의 수직이등분선 위에 있다.[47)]

② 기하의 대수적 접근: 해석기하와 벡터기하

㉠ 해석기하

ⓐ 임의의 방정식에 의해 나타나는 곡선에 대하여 연구하는 기하이다.

ⓑ Euclid 기하에서 추상적이고 증명으로 정리되었던 내용들을 계산으로 해결하게 된다.
(예) 두 점 사이의 거리, 삼각형의 넓이, 두 곡선의 교점을 찾는 문제 등

ⓒ 특정한 기하학적 성질을 만족하는 곡선의 방정식을 구하여 그 성질을 연구한다.

ⓓ 새로운 기하학적 정리를 대수적으로 증명하고 방정식을 기하학적으로 나타내어 해결한다.

ⓔ 좌표변환을 통해 곡선의 일반형을 표준형으로 변형하여 그 성질을 보다 용이하게 연구한다. (예) 이차곡선/일차곡선

---

47) 이 증명 과정은
① 조건 명제의 역과 필요충분조건 포함
② 등식의 추이성 포함
③ "세 직선은 한 점을 지난다"는 것을 "한 직선은 두 직선의 교점을 지난다", 곧 대칭적 명제를 증명하기 위해서 비대칭적 방법으로 접근한다는 유용한 방법론적인 패턴 포함. 따라서 등식의 추이성이 생산적 사고에 필요함을 보여주는 적절한 예가 됨
④ 직선과 점의 결합에 관한 정리가 측도에 관한 논의를 통해 증명됨
⑤ 이 증명 과정을 통해 삼각형의 외접원과 그 작도법이 유도됨 인식

Descartes의 기본적인 발상

┌ 좌표 개념 도입, 점 대신에 실수의 순서쌍 $(x,\ y)$ 도입 → 평면의 '산술화'
│
└ 부정방정식 $f(x,\ y)=0$에서 미지수 x를 x좌표로 간주, 그에 대응하여 결정되는 미지수 y의 값을 y좌표로 간주. $f(x,\ y)=0$을 좌표들로 이루어진 곡선

㉡ 벡터기하

Euclid 공간은 현대 수학적 관점에서 볼 때 내적이 정의된 실체 위의 2, 3차원 벡터공간이며 벡터공간 위에서 기하를 논의한다.

㉢ 초등기하의 대수적 접근에서 발생하는 문제점: 지나친 추상화

ⓐ 공간과 그 안에 있는 입체의 성질을 탐구하여 조작하고 정의와 증명을 발명할 기회를 빼앗고 있다.

ⓑ 기하적 내용을 대수화하여 답을 구할 수는 있지만 도형연구에 무기력한 영역이 많다.

ⓒ 기하의 가장 기본 개념인 각이 빠져 있으며 각을 구성하려면 커다란 곤란이 따른다.

따라서 기하를 대수로 해석하려면 먼저 Euclid 기하에 대한 지도를 통해 기하에 친숙해 있어야 한다.

③ 변환기하학

㉠ 학교수학에서 변환기하를 도입해야 하는 이유

ⓐ 평행, 회전, 대칭이동 등 변환은 함수적 사고 교육을 위한 함수의 좋은 예이다. 따라서 직관적으로 취급되어온 합동, 닮음 등의 개념이 자연스럽게 함수적 관점에서 명확히 지도될 수 있다.

ⓑ 초등기하에서의 합동변환, 닮음변환과 그에 대한 불변성의 개념은 장래 사영기하, 아핀기하, 위상기하 등을 학습하기 위한 준비이다.

ⓒ 변환은 강력한 문제해결을 위한 도구이다.

ⓓ 변환군과 변환의 행렬 표현 등은 대수학적인 내용과 기하학적인 내용의 관련성과 공통된 구조를 보여주는 소재이다.

ⓔ 조작적이고 구성적으로 군의 도입을 가능하게 한다.

ⓕ 기하학적 사고를 정적인 것에서 동적인 조작으로 변화시킬 수 있고, 변환의 합성과 군의 구조에 대한 학습 경험을 제공함으로써 기하와 대수의 구조적 유사성을 음미할 수 있는 기회를 제공한다.

㉡ 변환기하학 도입의 문제점

ⓐ 구체적인 교재 개발이 이루어지지 않았고 교수학적 변환이 활발하게 연구되지 않았다.

ⓑ 에를랑겐 프로그램(Erlangen Program)의 슬로건으로 이용되어 온 데 불과하다.
ⓒ 기하학적 변환이 학교수학에서의 도형의 이동, 도형의 자유로운 가동성으로 바뀌는 오류가 발생할 수 있다.

4) 기하교육의 방향

① 기하의 여러 가지 접근 방법은 서로 다른 안목을 제공하므로 학생들은 종합기하, 해석기하, 벡터기하, 변환기하 등의 내용을 배워야 하고, 이들 기하 체계를 비교, 대조하고 상호 번역할 수 있는 기회를 갖도록 지도해야 한다.
② 주어진 문제를 다양한 방법으로 다루어 볼 기회를 갖게 함으로 문제에 따라 각 접근법의 장단점이 있음을 이해(문제해결 활용 시)해야 한다.
③ 컴퓨터를 이용하여 도형의 역동적인 측면을 보여줌으로써 공간 지각력을 개발할 수 있도록 제시해야 한다.
④ 학생 개개인이 기성의 기하학적 지식에 대하여 개인화, 배경화 과정을 거쳐 기하화를 경험함으로써 기하학적 지식을 구성할 수 있도록 도와야 한다.
⑤ Freudenthal: 기하는 공간에 대한 경험을 조직화하는 수학화 활동을 통하여 학습되어야 하며 국소적 조직화를 통해 연역적 구성 과정을 재발명 시킬 것을 강조하였다.
⑥ van Hieles: 기하학적 학습 5수준[48)]을 이용한다.
㉠ 시각적 인식 수준 – 도형을 전체적인 모양새로 인식하며 따라서 이미지로서의 도형을 정신적으로 표현할 수 있음. 그러나 도형의 성질에 주목하지 않으며 도형의 성질을 인식하지 못함
㉡ 기술적/분석적 인식 수준 – 시각적으로 지각되는 모양을 분석함으로써 도형의 성질을 알게 되고 결과적으로 도형을 성질에 의해 인식하고 특징지음. 따라서 각 도형은 그 도형을 특징짓는 데 필요한 성질들의 집합이 됨. 그러나 도형들 사이의 포함 관계를 인식하지 못함
㉢ 관계적/추상적 인식 수준(비형식적 연역 수준) – 도형의 성질이나 도형들이 논리적으로 정렬됨. 도형의 성질의 일부는 정의로 채택되고 나머지 성질은 논리적 방법으로 정리되며 여러 도형 사이의 관계와 한 도형의 여러 성질 사이의 관계를 이해함. 도형들의 성질을 정렬함으로써 도형들을 위계적으로 분류할 수 있고 자신들의 도형 분류를

48) 수학적 사고 활동은 경험의 세계를 조직하는 활동이며 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되고 그것을 조직화하는 활동을 통해 그 다음 수준으로 비약이 이루어지게 되는 반복 과정으로, 수학 학습 지도는 이러한 불연속적인 사고 수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명해야 한다.

비형식적으로 정당화함(국소적 연역)

㉣ 형식적 연역 수준 – 기하학의 이론 전체를 전개하는 공리적 방법의 의의를 이해하게 됨. 공리적 체계 내에서 정리를 확립할 수 있으며, 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 사이의 논리적인 차이점을 인식함. '제시된 조건'의 결과로서의 결론을 논리적으로 정당화하는 일련의 명제를 만드는 등 형식적 증명을 구성할 수 있음(전면적 연역). 대학교에서 수학을 전공하는 대학생들이 이에 속함

㉤ 엄밀한 수학적 수준 – 모델을 참고하지 않고 기하를 연구할 수 있으며, 공리, 정의, 정리 등의 문장을 형식적으로 다룸으로써 추론이 가능함. 다양한 공리 체계와 논리 체계에 대한 논의의 가치를 이해할 수 있으며 다양한 수학 체계 안에서 가장 엄밀한 방식으로 추론하는 것이 가능함. 수학적 구조를 잘 이해하며, 구조에 관한 고차원적 수준의 명제를 정당화할 수 있는 등 전문적인 수학자의 수준을 의미함. 여러 기하 체계를 비교할 수 있음

4.2. 증명 지도

1) 증명 지도의 의의

① 수학적 추론 능력은 모든 학생들이 갖추어야 할 주요한 수학적 소양이다.

② 수학교육의 주요 목적의 하나는 발견의 논리인 귀납과 유추에 의한 개연적 추론 능력과 함께 강력한 정당화의 논리인 연역적 추론 능력을 개발하는 것이다.

③ 연역적 사고 경험, 증명의 본질 이해, 증명 능력 개발, 엄밀한 논리적 사고 능력과 태도의 함양 등은 전통적으로 두뇌의 질서와 합리성의 개발에 기여하는 사고력 도야의 수단으로 강조해야 한다.

2) 증명 학습의 어려움과 지도 방법

① 현재 학교의 증명 지도

㉠ 중학교 2, 3학년에서 Euclid 원론의 내용을 중학교 학생 수준에 맞추어 초등화 하여 제시하고 있다.

㉡ 도형의 몇 가지 기본적인 성질을 시작으로 삼각형의 합동조건과 닮음조건 및 보조선 방법을 이용하여 연역적으로 추론하도록 지도하고 있다.

(단, 2009 개정 교육과정에 따른 개정 수학과 교육과정은 정당화의 개념에 맞추어 중학

교에서 ‘증명할 수 있다’를 ‘이해하고 설명할 수 있다’로 수정하고 본격적인 연역 활동을 고등학교 1학년으로 이동하였다.)

㉢ 증명자체의 어려움을 강조하기 위해 역방향의 증명은 소개 정도로 축소하고 있으며 성질의 활용에 중점을 두고 있다.

② 논증기하 지도의 목적

㉠ 공간적인 상상력을 신장하고 도형에 관한 기본적인 명제와 그 적용을 도울 수 있다.

㉡ 연역적 증명을 이해하고 그 가치를 인식할 수 있다.

㉢ 정밀하고 간결한 표현력, 아이디어의 논리적인 조작력 그리고 기억습관 등을 형성할 수 있다.

㉣ “~이면 ~이다.” 형태의 가설 - 연역적 사고 방법과 증명의 본질을 이해하고 증명 능력을 개발할 수 있다.

③ 학생들이 보이는 증명 학습의 어려움

㉠ 학생들은 증명 방법을 스스로 찾을 수 없다고 인식한다. 그리고 교사나 교과서에만 나와 있는 것을 단순히 외워야 하는 것으로 인식한다.

㉡ 학생들은 ‘A이면 B이다($p \to q$)’ 형태의 증명 문제를 해석하는 데에 어려움을 겪는다. 또한 보통문제와 증명문제 사이의 차이점을 바르게 구분하지 못한다.

㉢ 학생들은 이미 참인 것으로 알고 있는 익숙한 사실을 왜 증명해야 하는가에 대해 의아해한다.

㉣ 학생들이 증명 방법을 충분히 탐색할 만한 시간이 수업 시간에 할애되지 않는다.

④ 증명이 어려운 이유

㉠ 중학교 학생에게는 구체적이고 실제적인 수준의 활동이 아직 잠재해 있어 인지발달과정 상 형식적 조작기에 속한다하더라도 순수한 이론적인 논의인 증명의 의미를 이해하기 어렵다.

㉡ 지금까지 배우거나 소개된 적 없는 내용을 갑자기 학습해야 하므로 당황한다.

㉢ van Hieles의 학습 수준 이론을 근거로 아직 학생들 중 논증기하를 이해 못하는 수준의 아동이 존재한다.

⑤ 중등학교 수학교육과정에서의 증명 지도 방향

㉠ 학생들이 교사의 도움을 바탕으로 스스로 증명을 구성하고 상호작용을 통해 합의에 도달하도록 지도한다.(즉, 능동적인 지식 구성자로서의 학습자)

㉡ 학생 스스로 증명을 구성하도록 증명 방법의 탐색을 위한 분석과정인 분석법을 활용하고 분석한 결과를 바탕으로 증명을 마무리하는 수업이 필요하다.

ⓒ 증명에 대한 비판적 검토와 반례의 탐색 등을 활용하여 증명 방법을 탐구 · 발표 · 논의 · 검토하는 과정을 학습한다.
ⓔ 보통 문제처럼 증명할 명제의 가정만 제공하고 학생 스스로 결론을 완성하여 증명할 명제를 만들도록 한다.
ⓜ 학생들이 증명된 명제의 보편적 타당성에 대한 신념을 갖도록 지도한다.
ⓑ 반힐의 수준 이론에 의한 증명 지도 방향을 활용한다.
: 관계적/추상적 인식 수준의 학생들은 다양한 성질들을 발견함에 따라 성질들을 조직할 필요성을 느끼게 되며 한 성질은 다른 성질의 전제가 된다는 것을 인식하는 논리적 사고가 시작되어 연역적 추론을 경험하게 된다. 그러나 학생들은 연역적 추론, 즉 형식적 증명을 완전히 이해하지는 못하며, 연역적인 체계를 전체적으로 파악하는 수준에는 이르지 못한다. 즉, 학생들은 연역적 추론을 소규모로 또는 국소적으로 실행하며 간단한 연역적 추론을 할 수 있게 된다.[49)]
ⓢ 증명 학습이 '증명'이라는 용어를 도입한다고 해서 의미 있게 이루어지는 것은 결코 아니며, 도형을 관찰하고 도형의 성질들을 학생들 스스로 분석하는 경험을 토대로 했을 때 비로소 의미 있는 증명 학습이 이루어진다. 더욱이 한 도형의 여러 성질 사이에 그리고 여러 도형 사이에 어떤 관련성이 있는가를 탐색하는 과정에서 증명의 필요성을 자연스럽게 도입함으로써 학생들을 동기유발 시키는 것이 바람직하다.

3) 수리철학의 입장에 따른 증명의 본질과 해석

① 논리주의: 논리적 체계를 바탕으로 수학의 확실성을 확보하는 수단
② 형식주의: 인위적인 언어체계와 형식체계를 통해 수학의 확실성을 확보하는 수단
③ 직관주의: 직관적으로 명확한 구성적 과정을 바탕으로 수학의 확실성을 확보하는 수단
④ 준-경험주의(I. Lakatos): 발견과 개선을 위한 수단, 발견을 위한 사고실험과정. 또한 증명은 절대적인 것이 아니며 비판을 이끌어내고 발견을 이끄는 열린 활동
⑤ 사회적 구성주의(P. Ernest): 당대의 수학자 사회의 동의 절차, 의사소통의 수단

4) 분석법과 종합법

① 문제해결과 분석법-종합법 사이의 관계
어떤 문제든 각 문제가 해결되는 풀이 방법이 존재한다. 결국 각 문제해결은 풀이 방법을 발견한 뒤 그 발견한 풀이 방법을 바탕으로 문제를 해결하는 것이 타당하다.

49) 형식적인 정의를 제시할 것이 아니라 도형의 성질을 조직화하는 수단으로 도형을 정의하는 재발명 활동을 시키고, 정리를 가르칠 것이 아니라 도형의 성질의 논리적인 국소적 조직화 활동을 시켜야 한다. 이때, 국소적 조직화란 참인 것으로 보이는 영역에서 시작하여 수학적 사고를 부분적으로 조직화하는 것이다. 따라서 학생들이 자명하다고 생각되는 곳이 국소적 조직화에서 출발의 기준이 되도록 하여 학생들의 자발적이고 창조적인 활동이 가능하게 되도록 한다.

증명문제	작도문제	방정식 문제	답 구하는 문제
증명(D)이 되었다고 하자.	주어진 조건을 만족하는 도형을 작도(D)했다고 하자.	미지의 값을 찾았다 하고 조건에 맞는 식 세우기(D)	구하고자 하는 것(D)을 이미 구했다고 하자.
⇧	⇩	⇩	⇩
증명(D)이 되려면 어떤 조건(A)이 선행되어야 하는가?	D를 작도하기 위해 필요한 도형 찾기(A)	등식의 성질을 적용하여 방정식 변형하기(A)	구한 것으로부터 유도될 수 있는 명제 도출하기(A)
⇧	⇩	⇩	⇩
증명문제	**작도문제**	**방정식 문제**	**답 구하는 문제**
A가 되려면 어떤	A를 작도하기 위해 필요한 도형 찾기(B)	A를 만족하는 답 구하기(B)	A로부터 유도될 수 있는 명제 도출(B)
…	…	…	…
충분조건 찾기		필요조건 찾기	

┌ 분석은 풀이계획을 발견하는 과정이고 종합은 그 계획을 실행하는 과정이다.
└ 증명 문제에서 분석의 과정을 거꾸로 되밟는 연역과정인 종합이 곧 증명이다.

(예) Polya의 문제해결 4단계에서 분석법과 종합법의 활용

분석법	**이해 단계**	문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 파악하면서 문제를 분석한다. 구하려는 것을 x로 놓는다.
	계획 단계	문제에서 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악한다. 그러한 관계를 나타내는 방정식을 세운다. 이때 방정식이 참이라고 하자. $\sqrt{2x-6}=3-x$
	실행 단계	양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-8x+15=0$이고, $(x-3)(x-5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다. 그런데 이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.
종합법	**반성 단계**	$x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다. $x=3$이 문제의 상황에 부합하는지의 여부를 점검한다.

② 분석법–종합법 활용의 의의

㉠ 수학에 대한 인식 변화: 모든 수학적 지식이 이미 존재하는 결과물로 단순히 전달되거

나 전수된 지식이 아닌 누군가에 의해 발견되고 논의되고 계속적으로 연구된 결과임을 알게 된다.

㉡ 동기유발: 모든 문제는 해결될 수 있는 과정이 있음을 학생 스스로 인식하고 문제해결에 동기유발을 얻게 되며, 스스로 문제를 해결하려고 노력한다.

㉢ 발견적 사고 확장: 스스로 수학적 문제를 해결하거나 수학적 지식을 이해하려는 노력을 함으로써 능동적인 사고를 기르게 된다.

5. 미적분 지도

5.1. 미적분 지도의 배경

① 20세기 초 수학교육개혁운동을 주도한 영국의 Perry와 독일의 Klein에 의해 학교수학에 미적분 지도가 중점이 되어야 한다고 주장하였다.

② Perry: 미적분은 지력을 개발하고 정서를 함양하며 자연의 신비를 파헤치는 정신적 도구로서 꼭 가르쳐야 한다.

③ Klein: 함수적 사고의 개발을 위해 미적분을 꼭 가르쳐야 한다.

5.2. 미적분 지도의 주요 목적

① 변화현상의 규칙성을 수식이나 그래프 등으로 나타내어 연구하는 분야가 함수이며, 이러한 함수의 변화 관계를 수학적으로 분석하는 도구가 미적분이다.

② 미적분을 학습함으로써 동역학에 관하여 지적인 탐구를 하고 관찰 결과를 종합하며 변화 관계를 분석하는 함수적 사고력이 신장된다.

(예) $y=\sin x$이면 $y''=-\sin x$이다: 함수의 이계도함수로부터 자연의 기본적인 순환 현상의 특성 곧, 순환 현상은 그 상태와 정반대인 힘에 의해 움직인다는 패턴에 주목할 수 있다.[50]

5.3. 미적분 지도 방법

1) 극한 방법

① 우리나라 고등학교에서 다루어지고 있는 미적분 지도 방법이다.

$$h \to 0,\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ \left(=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \to f(x)$$

'어떤 극한값에 접근할 경우 그 극한값을 $f(x)$'로 택한다.

---

50) - 공급이 가장 많을 때 가격은 가장 낮다.
- 저항이 가장 약할 때 뒤틀림이 최고조에 달한다.
- 활주궤도에 탄 사람들은 활강이 실질적으로 끝났을 즈음 비명을 지른다고 한다.
- 부침을 거듭하는 경제적인 순환 현상에서 대중의 목소리 수준에 따르지 말고 추세의 변동에 따라 수정 정책을 조절하도록 조언하는 것이 바람직하다.
- 주식 시장의 자연적인 힘을 이해하고 반순환적인 접근을 하는 투자자는 주식을 사고파는 행동을 '대중과 반대로' 하는 지혜를 발휘할 필요가 있음을 통계치는 보여 주고 있다.

② 극한 방법을 이용한 미적분 학습의 어려움

㉠ 함수의 증분 Δx, Δy의 극한이 dx, dx인 듯한 암시를 준다.

㉡ 합성함수의 도함수를 구하는 공식 $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$에서 미분을 약분하듯이 다룬다.

㉢ 치환적분 시 계산의 편의상 $\int f(x)dx$에서 $x=g(t)$, $dx=g'(t)dt$로 놓고 계산하도록 지도한다.

㉣ 미분 도입 후 $dy=f'(x)dx$, $f'(x)=\frac{dy}{dx}$와 같이 다룬다.

2) Leibniz 식의 전통적인 무한소 방법

① 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=\frac{dy}{dx}$를 미분상으로 보고 무한소량[51]은 결과에서 무시한다.

(예) $f(x)=x^3$ 에서 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$

$$=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{(x+dx)^3-x^3}{dx}=3x^2+3xdx+dx^2$$

따라서, $f'(x)=3x^2$이다.

② dx로 분자와 분모를 모두 나누면 dx는 0이 아닌 무한소로 취급하다가 동시에 dx가 무시할 수 있을 정도로 작아 0이라고 취급하고 있다. 즉, 편의에 따라 dx를 0이 아닌 것으로 또는 0인 것으로 이중적인 취급이 이루어지고 있다(Struik, 1987).

③ Leibniz와 그의 제자들이 무한소 개념의 논리적 기초 문제를 유보한 채 무한소 계산법만을 발전시킨 이유는

㉠ 자연과학 연구에 이용함으로써 유용한 생산적인 결과를 얻을 수 있었고 수학적인 문제를 통합적으로 해결해 주는 일관성 있는 강력한 도구를 제공해 주었기 때문이다.

(예) 곡선의 접선과 법선 구하기, 최대 · 최솟값 구하기, 면적 · 부피 · 길이 구하기 등

㉡ 우주는 신이 조화롭게 창조하였으므로 언젠가는 무한소의 기초문제가 밝혀질 것이라는 철학적인 신념이 있었기 때문이다.

㉢ (의의) 엄밀성의 지나친 추구를 유보한 채 계산법의 개발을 추구하였기 때문이다.

---

51) 무한소부피 $S(x)$ = 수면의 높이 x에 대한 무한소량과 순간의 부피 $V(x)$에 대한 무한소량의 미분상

$$S(x)=\frac{V(x+dx)-V(x)}{dx}$$

Liebniz 무한소 방법	극한 방법(Cauchy)
· 단순/직관적, 발견적 가치 큼(기하학적) · 18세기 이후 논리적 결함 때문에 포기된 방법 · Newton: 무한소 ‘계산법’을 개발하여 역학 연구에서 적극적으로 활용 · Liebniz: 무한소 계산법 확립 · 근원 - Archimedes: 구의 부피를 무한소인 단면의 부피의 총합으로 생각 - Galileo: 원은 무한히 작은 무한히 많은 변을 갖는 다각형으로 생각	· 실수의 기초 위에서 극한 개념에 의해 함수의 연속성, 미분가능성, 적분, 무한급수의 수렴 등 미적분법의 기본 개념 정의 · 무한소는 함수이며 0에 무한히 접근하는 변수로 간주 · $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$과 같은 함수의 ‘비정상적인’ 무한소를 다루게 될 경우 오류발생 · ε $-\delta$ 방법의 자연스러운 도입

3) 현재의 미적분 지도

① 미적분을 일반적인 극한개념의 응용으로 간주하고 있다.

② 알고리즘 곧 대수적 접근법을 지나치게 강조하고 있다.

4) 미적분 지도의 올바른 방법

① 도입 시부터 현실과 연관되어야 하며, 기본적인 개념이 현실적인 문맥에서 학습되도록 지도해야 한다.

② 미분법을 도입하는 극한방법은 컴퓨터를 이용한 수치적 방법과 컴퓨터 그래픽 기능을 이용한 방법을 보충하면 효과적이다.(단, 메타인지적 사고 전환 주의)

③ 현실과 관계가 풍부한 내용을 다루기 위해 무한소 방법이 활발히 활용되도록 지도한다.

(예) 넓이나 부피의 무한소량의 합 → 적분법 지도

속도와 곡선의 접선 → 미분법 지도

④ 그래프나 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 직관적이고 물리적인 방법으로 지도한다.

⑤ 역사발생적 원리를 이용한다: 역사적인 문제 상황에 대한 제시와 무한소 방법이나 극한 방법에 의한 미적분 교재를 지도할 수 있다(수학 교사는 미적분의 역사적 발달에 대한 분석을 통한 그 관점의 변화 과정을 명확히 이해해야 한다).

⑥ Freudenthal의 미적분 지도

㉠ 함수 $f(x)$가 x에서 미분 가능할 때, $f'(x)$를 미분계수라고 부르는 것은 미분식 $dy = f'(x)dx$에서 연유한 것이며, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$이므로 $f'(x)$를 미분상이라고 부른다는 사실에 따를 때, 극한에 의한 미분법 지도는 옳지 않다.

(예) 물리, 순간 속력 $V=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 미분상으로 지도

ⓛ Δx, Δy가 서로 대응하며 $\frac{\Delta x}{\Delta y}$가 $\frac{dy}{dx}$에 수렴한다는 말 대신 무한소 변화 dy, dx와 그 몫 $\frac{dy}{dx}$로 제시하는 것이 효과적이다(물리학의 표현방법을 활용한다).

5.4. 수열의 극한에 대한 직관적 정의와 형식적 정의의 비교

직관적 정의	형식적 정의
무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라, 수열의 일반항 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.	무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 적당한 $\alpha \in R$가 존재하여, 명제 “임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $K(\epsilon) \in R$이 존재하여 $n > K$인 모든 $n \in N$에 대하여 $\lvert a_n - \alpha \rvert < \epsilon$이다.” 를 만족하면 수열 $\{a_n\}$은
n이 변화함에 따라 a_n이 변화하는 함수의 종속적 관점을 취함	각 n에 대해 정해진 조건을 만족시키는 a_n이 존재한다는 식으로 함수의 대응적 관점을 취함
독립변수 n이 커질 때, 종속변수 a_n이 일정한 값에 가까워지는 동적인 특성을 지님	수열의 항들이 이미 존재한다고 가정하고 항들과 극한 사이의 관계를 보는 정적인 특성이 강함
‘한없이 커지면 한없이 가까워진다’는 표현에서 알 수 있듯이 항이 끝없이 계속된다는 가능적 무한을 기초로 함	수열이 무한하게 계속되지만 어느 순간 완결된 값을 갖는다고 생각하는 ‘실무한’ 개념을 바탕으로 함
n의 변화에 따른 a_n의 변화 ‘과정’에 초점을 맞춤	$\lvert a_n - \alpha \rvert < \epsilon$을 만족하는 ‘결과’로서의 극한값 α에 주목함
극한값을 ‘발견’하는데 초점을 둠, 따라서 극한값을 계산하는 데 유용함	발견된 수가 극한값임을 ‘보증’ 하는데 초점을 둠. 따라서 극한값을 정당화하는 데 유용함
n이 커지는 원인에 의해 종속변수 a_n이 α에 가까워지는 결과를 생각하므로, 논리적 전개 순서가 ‘원인→결과’임	종속변수가 $\lvert a_n - \alpha \rvert < \epsilon$을 만족할 수 있도록 독립변수 n을 결정한다는 점에서 ‘결과→원인’의 역순서임. 수열을 $\epsilon - N$ 방법으로 정의할 경우 자연스러운 사고 방향을 역행하는 논리적인 반전이 뒤따름

5.5. 실무한 지도

1) 실무한의 정의와 예

① 실무한이란 현실적으로 존재하는 무한을 의미한다.

(cf) 가능적 무한(=잠재적 무한)이란 가능성으로만 생각하는 무한을 의미한다. Aristoteles는 가능적 무한으로서의 무한 개념만 받아들였으며 실무한의 존재를 부정하였다.

② 실무한의 예

㉠ 자연수 전체, 정수 전체, 유리수 전체, 실수 전체, 복소수 전체의 집합을 각각 N, Z, Q, R, C로 나타냄

㉡ 0.666⋯ = 2/3

㉢ $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$

㉣ x_0에서의 미분계수를 $f'(x_0)$와 같이 나타내기

㉤ 넓이를 구분구적법이나 정적분으로 구하기

⇒ 위 예들은 모두 자연수 전체나 실수전체, 무한소수를 완결된 것으로, 순간변화율과 극한을 현실적인 존재로 본 경우이다.

2) 실무한 지도 방법

① 실무한이 학생들에게 어려운 이유

㉠ 학생들에게는 잠재적 역동적 무한이 자연스럽다.

㉡ 잠재적 무한을 나타내는 수직선, 함수 $y=x,\ y=\dfrac{1}{x}$ 그래프가 일찍부터 도입되었다.

㉢ 그래프에 ∞, −∞가 함께 교수되기 때문이다.

② 실무한의 극복방법

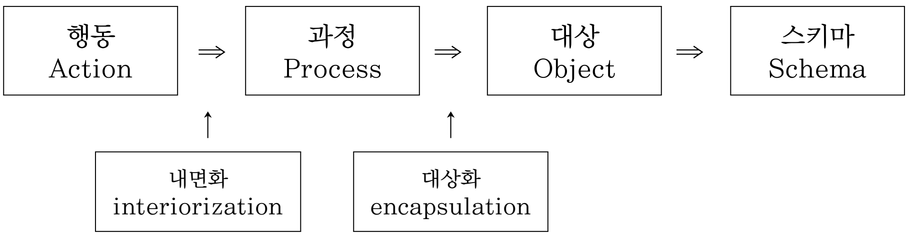
㉠ 무한 관념을 다룰 때의 인간의 일반적인 심리적 어려움을 의식시켜야 한다.(반영적 추상화 과정 이용)

㉡ 우리의 정신적 양식의 유한성과 실무한 사이를 연결해줄 수 있는 타협적인 모델을 준비할 수 있다.

㉢ 새로운 개념의 논리적 구조와 보다 높은 내적인 일관성과 포괄성을 갖는 이차적 직관을 구성할 수 있도록 지도한다. 즉 새로운 논리적 근거가 있는 해석이 새로운 이차적 직관을 생성하도록 지도해야 한다.

3) APOS 이론(Dubinsky 외, 2005)에 따른 실무한 지도

① 어떤 수학적 개념이 구성되기 위해서는 그림과 같이 구체적인 ‘행동’이 정신적인 ‘과정’이 되고, 그 ‘과정’이 하나의 ‘대상’으로 인식된 후 구조화되어 ‘스키마’가 되는 단계를 거치게 된다.



㉠ A: 어떤 개념을 익히기 위해서 우선 대상에 대한 변환을 적용해 본다.

㉡ P: 대상에 대한 행동을 반복하면서 반성함으로써 그 행동이 내면화되어(interiorized) 동일한 조작을 할 수 있는 하나의 정신적 구조 즉 정신적인 ‘과정’이 된다. ‘과정’의 상태에서는 각 단계를 명시적으로 의식하지 않고도 변환이 가능하다.

㉢ O: 과정을 전체적으로 인식하기 시작하면서 ‘과정’은 대상화되어(encapsulated) 하나의 ‘대상’이 된다. 어떤 것을 캡슐(capsule)에 싸기 위해서는 그것에서 벗어나 객관적으로 대상화[52] 하는 것이 필요하다.

㉣ S: 행동, 과정, 대상이 조직화되고 연결됨으로써 하나의 일관성 있는 구조가 되면 ‘스키마’가 된다.

② 무한 개념에 대한 APOS 이론 적용

㉠ A: 자연수를 1, 2, 3에서 시작하여 $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \cdots\}$으로 구성

㉡ P: ‘행동’이 ‘내면화’된 ‘가능성 무한’의 단계

㉢ O: 도달할 수 없는 ‘가능적 무한’이 ‘대상화’ 되어 도달할 수 있는 무한의 개념인 ‘실무한’이 되는 단계

㉣ S: ‘실무한’이 그 자체로 완결된 전체성(totality)이 됨

---

52) [대상화]와 관련된 예시로는
① 자연수를 끝없이 셀 수 있다는 가능적 무한(potential infinity)의 개념에서 완결된 무한, 즉 현실적 무한(actual infinity)을 인식하는 데 이르게 되었다.
② 삼각형과 삼각형이 아닌 것을 구별하던 아동이 삼각형의 성질에 관심을 가지게 되었다.
③ ‘2+3=5’를 ‘2와 3을 더한 결과가 5’라고 생각하는 것을 넘어서 ‘2+3’과 ‘5’가 동등한 의미를 가지는 것으로 생각하게 되었다.
④ 실수의 집합에서 두 실수를 대응시키는 함수를 다루다가 함수를 원소로 하는 새로운 집합을 생각하게 되었다.

4) Sfard(1991)의 '내면화', '압축', '실재화' 단계

① '계산적인 조작'이 '추상적인 대상'으로 전이되기 위해 '내면화', '압축', '실재화'의 세 단계를 거쳐야 한다.

② 해석학에서 다루는 ϵ 개념을 엄밀한 설명으로 전환하는 단계는 다음과 같다.

㉠ 내면화 단계

: $\left|\frac{1}{n}-0\right|=0.1,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|=0.01,\ \cdots$을 만족하는 n을 구하고,

$\left|\frac{1}{n}-0\right|<0.1,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|<0.01,\ \cdots$을 만족하는 n을 구해봄으로써 n이 커짐에 따라 각각 대응되는 $\frac{1}{n}$의 값의 상황을 추정

㉡ 압축 단계

: $\left|\frac{1}{n}-0\right|=0.1,\ \left|\frac{1}{n}-0\right|=0.01,\ \cdots$의 우변을 특정한 수가 아니라 임의의 작은 양수 m이 되도록 하며 이러한 과정을 통해 $\left|\frac{1}{n}-0\right|<m$과 같이 더 일반화된 경우를 추정

㉢ 실재화 단계

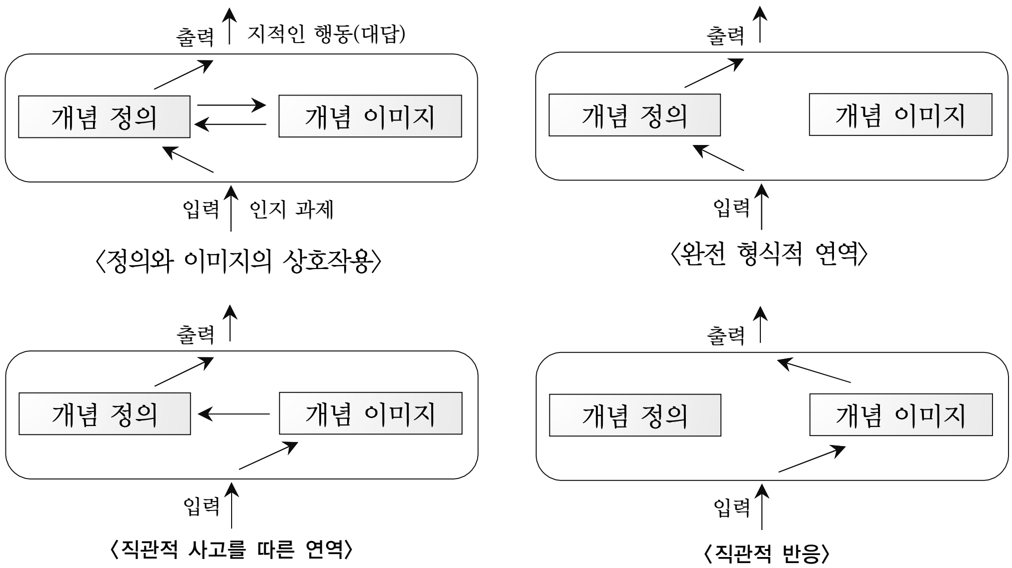
: '임의의 양수 ϵ에 대하여 $0 \le a \le \epsilon$이 성립하면 $a=0$이다'라고 이해

③ 세 단계는 위계적인 특성을 가지고 있으며, 실재화된 개념이 새로운 조작 대상이 되면 세 단계가 다시 반복되면서 이미 형성된 개념이 더 상위 수준의 개념으로 발달된다.

5.6. 극한과 연속에 대한 개념 정의와 개념 이미지

① 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조를 개념 이미지(concept image)라 하고, 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 개념 정의(concept definition)라 한다.

② 공식적인 개념 정의가 학생의 인지구조에 동화 또는 조절을 거쳐 적절한 개념 이미지로 형성되지 않으면 그 개념은 오래 지나지 않아 잊혀질 수 있으므로 개념 정의를 이해할 때 개념 이미지를 동원하는 것이 효과적이다. 그러나 개념 이미지를 거치는 과정에서 여러 가지 오류가 나타날 수 있다. (=개념 정의와 개념 이미지 사이의 마찰)



〈개념 정의와 개념 이미지가 상호 작용하는 방식, Vinner, 1991〉

③ 개념 정의보다 직관적인 개념 이미지에 의존했을 때의 예

㉠ $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$과 같은 교대수열은 0에 수렴하지만, 진동하는 수열의 개념 이미지를 먼저 떠올리게 되면서 '교대 수열은 극한값이 없다'고 잘못 판단한다.

㉡ 수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$ 등을 좌표평면에 나타내면서 수열은 끊임없이 진행하면서 변화한다는 생각을 갖게 되어, 상수수열의 극한값은 존재하지 않는다고 잘못 판단한다.

㉢ 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있으면 연속이고 끊어져 있으면 불연속이라고 판단한다.

6. 확률과 통계 지도

6.1. 확률 지도

1) 수학에서의 확률

(1) 확률의 의의

① 확률은 어떤 사건이 일어날 가능성을 측정하는 수학적 수단이다.

② 확률은 현실 문제나 과학적인 문제의 해결을 위한 중요한 사고 도구이다.

③ 확률은 의사소통을 위한 강력한 수단이다.

(2) 확률의 역사

① 확률은 16세기에 이르러서야 수학화 되기 시작하였으며 19세기 초에 Laplace에 의해 확률 이론의 집대성이 이루어졌고 많은 패러독스가 제기되면서 20세기 들어와 확률론의 공리화가 확립되었다.

② 1654년 Pascal과 Fermat 서신 왕래(1679년 내용 공표)

[de Méré의 문제] 첫 번째 게임에서는 주사위 한 개를 네 번 던질 때 적어도 한 번 6이 나오면 이기는 것으로 한다. 두 번째 게임에서는 주사위 두 개를 24번 던질 때 (6,6)이 적어도 한 번 나오면 이기는 것으로 한다. 어느 쪽이 유리한가?

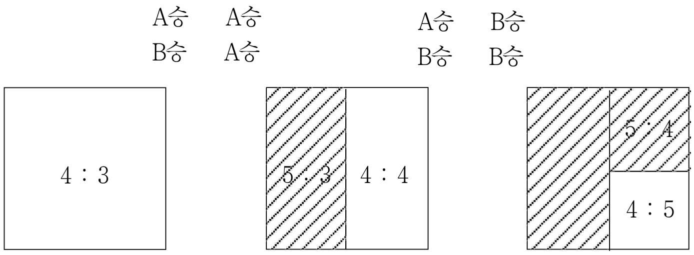
〈풀이〉 모든 경우의 수를 다 열거한다는 생각에 기초

첫 번째 게임에서 이길 확률: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}=0.508>\frac{1}{2}$

두 번째 게임에서 이길 확률: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=0.491<\frac{1}{2}$

[상금의 분배 문제] 게임을 시작할 때 A, B 두 사람은 같은 내기돈을 건다. 정해진 횟수만큼을 먼저 이기는 사람이 내기돈을 모두 가지기로 한다. 그러나 두 사람 중의 누구도 필요한 횟수만큼 이기기 전에 게임이 중단될 수밖에 없는 상황이 일어났다. 만일 승자가 되기 위해서 5게임을 먼저 이겨야 하고, 게임이 중단된 상태에서 A가 4:3으로 유리한 상황이라고 하면 내기돈을 어떻게 나누어야 공정한가?

〈풀이〉 게임의 지속성, 경기자의 이길 기회 동일, 게임이 계속될 경우 이길 확률에 비례하여 상금 분배. 곧, 게임이 계속된다면 다음과 같은 4가지 경우 발생



마지막 경우를 제외하고는 A가 이기게 되므로 상금은 3:1의 비율로 분배

⇒ Pascal과 Fermat의 방법은 가능한 경우를 모두 고려한다는 생각 제시. 가능한 경우를 모두 고려하는 것이 실제적인 우연 현상을 구조화하는 편리하고 이해하기 쉬운 도구로서, 그리고 확률 직관을 보다 명확화 하는 도구로서 처음으로 사용되었다는 점에서 역사적인 의의를 갖는다.

(3) 확률의 여러 가지 정의

① Laplace의 고전적인 확률

어떤 사건 A의 확률 $P(A)$는 시행에서 가능한 모든 경우의 수에 대한 사건 A가 일어나는 경우의 수의 비와 같다(개개의 경우가 일어날 가능성이 같다는 가정이 암묵적으로 전제되어있다).

㉠ 시행을 하기 전에 확률값을 계산할 수 있다.(확률에 대한 일종의 선험적인 접근)

㉡ 적용 상황에서 일어날 가능성이 같은 근원사건이 어느 것인가를 결정하는 문제가 발생한다.

㉢ 개개의 경우가 일어날 가능성이 다를 경우 문제가 된다.

(예) 압정, 윷, 찌그러진 주사위 등

② 도수적 관점으로의 확률

㉠ 시행의 반복을 통하여 나타나는 규칙성에 의해 확률을 구하는 방법이다.

㉡ 반복 시행에서 한 사건이 일어나는 횟수의 전체 시행 횟수에 대한 상대도수로부터 확률이 추정되고 실제적인 시행이 이루어진 후에 관찰 된 정보에 근거하여 귀납적으로 확률값을 결정한다.

㉢ 확률은 상대도수의 극한이다.

㉣ '경험적 확률'이라고도 한다.

③ 주관적인 확률(우연 상황에 대한 주체의 평가라고 보는 관점으로의 확률)

㉠ 주체는 자신의 마음 가운데 있는 사전 정보와 반복 시험에서 얻어지는 도수에 대한 경험적인 자료라는 두 가지 정보를 결합하여 당면한 사건의 확률을 그때그때 새롭게 결정한다.

㉡ 경험으로부터 학습한 결과가 확률이다.

㉢ 주체의 신념의 정도에 따라 서로 다른 값으로 제시될 수 있다.

㉣ 해당 분야의 전문적인 지식수준이 향상되면 일정한 값으로 수렴한다.

④ 구조적 접근으로의 확률

㉠ 확률론의 공리 체계 및 이로부터 연역되는 정리에 의해 암묵적으로 정의되는 개념이다. (단, 확률론의 구조가 확률에 대한 가능한 해석을 암시해 주지만 확률 자체의 본질을 분명히 해주지는 못함)

㉡ 확률론에서 Kolmogorov의 공리체계 위에 건설된 구조적인 확률 이론은 고전적인 관점, 도수적 관점 그리고 주관적 관점 모두를 옹호하는 입장이다.

> Kolmogorov의 공리
> (1) 임의의 사건 E에 대해, $P(E) \geq 0$
> (2) 전체 표본공간 S에 대해, $P(S) = 1$
> (3) E_1, E_2 ⋯ 가 서로 배반사건일 때, $P(\cup_i E_i) = \Sigma_i P(E_i)$

2) 효과적인 확률 지도

(1) 확률 지도 시 배경적인 문제점

① 반직관적이고 오류 가능성을 포함함으로 제한된 지도 내용을 갖는다.

② 확률의 의미에 대해 여러 가지 관점이 병존함으로 가르치는 각도가 비통일적이다.

(2) 현행 학교수학에서의 확률 지도

① 확률 개념의 지도보다 계산 패턴에 따라 여러 가지 복잡한 사건의 확률을 구하는 형식적인 알고리즘의 지도를 강조하고 있다.

② 확률 지도 후 학생들은 여전히 우연현상과 확률에 대한 실제적인 의식 변화가 부족하며, 주관적 확률을 유지하고 있다.

③ 수학적 확률이나 통계적 확률이라는 수학적인 정의와 여러 가지 유형의 사건에 대한 확률 계산 방법을 직접 가르치고 이를 익히는 연습만을 강조하고 있다.

④ 수학적인 확률 이론만으로는 확률개념의 애매한 특성을 해명하기 어렵다는 점을 교사가 이해 못하고 있다.

(3) 효과적인 확률 지도

① 확률 지도의 여러 특성을 교사가 충분히 숙지하고 학생들 스스로 동화와 조절에 의해서 확률적 사고를 구성할 수 있도록 지도해야 한다.

② 학습자의 확률적 직관으로부터 출발하여 그것을 점진적으로 변화시켜야 한다. 예를 들어, 생활 장면을 소재로 다양하고 풍부한 확률적 경험을 도입함으로써 우연 현상에 대한 원시적 직관을 수정할 수 있다.

③ 확률 본질의 이해를 강조하고 확률개념의 특성을 보다 폭넓고 구체적으로 논의하는 과정을 이용해야 한다.

④ 확률적 사고의 오류를 수정하고 다각적인 의미가 자연스럽게 파악되도록 지도해야 한다. 예를 들어, 패러독스[53]를 이용할 수 있다.

(예) 베르트란트 현의 패러독스, St. Petersburg 패러독스 등

⑤ 주관적인 확률 직관과 무작위 상황 및 그에 대한 수학적 모델 사이의 관계를 고려한다. 이 때, 무작위 상황에 대하여 개인적인 판단으로 시작하여 의도된 수학적 모델과 비교하는 교수가 필요하다.

⑥ 확률 교재는

㉠ 고전적 관점·도수적 관점·주관적 관점을 문제 상황에 따라 선택적으로 적용 · 조정 · 통합함으로써 확률의 이론적 실제적 의미를 살려낼 수 있는 내용을 포함해야 한다.

㉡ 구체적인 실험이나 모의실험을 포함해야 한다.

㉢ 개개 학생을 위한 과제보다 공통으로 해결할 수 있는 문제해결을 지향하는 내용이 포함되어야 한다.

㉣ 어떤 판단과 결정을 요하는 상황을 포함해야 한다.

㉤ 주사위, Galton 판, 난수표, 치우친 주사위, 실제적인 확률 상황 등 다양한 무작위 수 발생자를 사용하고 이를 비교하여 공통 성질과 차이점을 분석하도록 제시되어 있어야 한다.

---

53) · 모호한 확률적 상황을 분석할 수 있는 기회 제공
· 확률적 직관과 추론의 특성을 간접적으로 제시
· 직관적 추론과 형식적인 수학적 추론 사이의 인지적 갈등 제시
· 학습자의 개념적 반성을 촉진

3) 확률 지도에서 컴퓨터 활용

① 주사위를 100번 던지는 실험과 같이 개념적으로는 단순하지만 매우 시간이 많이 걸리는 여러 가지 문제해결에서 컴퓨터의 사용이 요구된다.

② 모의 실험

확률 문제에 대한 주관적인 판단에 의한 추측	→	물리적인 모의실험과 컴퓨터 모의 실험 제공	→	추측 확인	→	초기 판단과 실험결과를 비교 분석	→	자신의 주관적 판단 검사

㉠ 알고리즘적 관점을 뒷받침한다.

㉡ 문제를 해결하는 분석적 방법을 위한 배경을 제시한다.

㉢ 통계적인 자료 분석의 기회가 제공된다.

㉣ 반복 횟수의 자율적인 증가로 결과의 불확실성과 변이성을 제공한다.

㉤ 새로운 종류의 패턴 발견이 가능하다.

(예) Monte Carlo 방법

③ 확률적 과정의 역동적인 표현이 가능하다.

(예) Galton판

④ 컴퓨터 이용 시 문제점

㉠ 모의실험을 통한 문제해결, 컴퓨터 그래픽을 이용하는 방법, 수치적 방법 등으로 학생 스스로의 사고 과정을 컴퓨터가 대신한다.

㉡ 컴퓨터 작동으로 사고가 전환될 수 있다. 즉, 메타인지 방향 전환의 극단적 교수현상이 가능하다.

6.2. 통계 지도

1) 우리나라의 통계 교육

(1) 통계 교육의 목적

자료를 수집하고 분석하여 발견된 지식을 실제적인 문제를 해결하는데 적용할 수 있는 통계적 사고력을 개발하는 것이다.

(2) 통계 교육의 구성

① 자료산출: 생활 주변 소재에 대한 주어진 자료를 이용/ 생활 주변에서 발생하는 실제적인 자료를 수집 · 분류 정리하여 표로 나타내기

② 자료분석: 막대그래프, 꺾은선 그래프, 줄기와 잎그림, 띠그래프와 원그래프, 히스토그램, 도수분포다각형, 상관도 등의 그래프로 나타내어 그 특성 파악, 자료에 대한 평균과 표준편차 등의 통계치 교육

③ 자료로부터의 추론: 확률분포 이론에 의한 모평균과 모비율의 추정 방법 제시, 그것을 문제해결에 적용하는 것 강조

(3) 현 학교에서의 통계 교육방향

① 문제해결 도구 혹은 주변 세계를 이해하는 유용한 도구보다 초등 통계학에 나오는 특정한 내용으로 구성된 교재로 간주되고 있다.

② 교과서의 적용 문제는 흔히 꾸며 낸 문제가 주가 되고 있다.

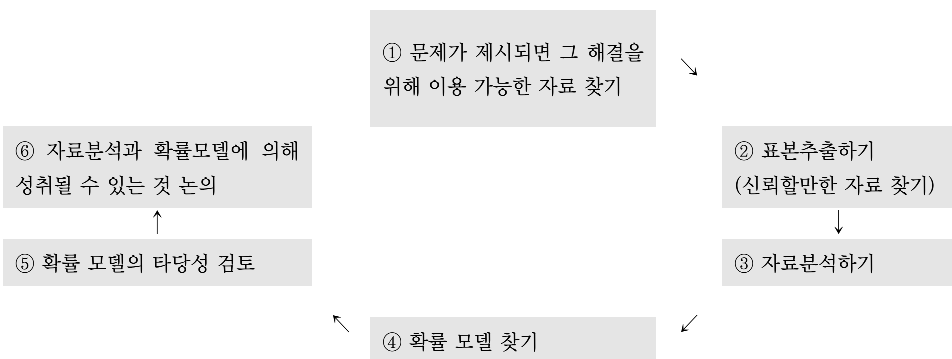
③ 통계적 탐구의 실제적 특성이 무시되고 있다.

④ 통계적 지식을 그저 가르침으로써 막대그래프와 히스토그램의 차이점을 학생들은 이해 못한다.

⑤ 통계의 잠재력과 유용성 및 탐구를 통한 발견의 기쁨을 전달하는데 실패하고 있다.

⑥ 많은 교사들이 통계에 대한 배경적 지식과 통계적 기법의 적용 경험이 미약하다.

2) 효과적인 통계 지도



① 계산기, 컴퓨터, 그래픽 계산기, Web 등을 통계지도에 적극적으로 이용한다.
㉠ 그래프 기법: 자료의 패턴, 구조, 규칙성을 확인하는 주요 관찰도구
㉡ 통계 그래프: 자료의 패턴과 함께 자료의 예기치 않은 특성을 쉽게 드러내주기 때문 통계적 모델의 적절성을 진단하고 특별한 영향을 주는 극단적인 자료를 확인하는데 이상적인 도구
㉢ 시뮬레이션: 통계적 원리나 절차를 예시하고 입증하는 조정된 경험을 학생들에게 제공
(예) 중심극한정리
② 통계의 입문과정은 자료를 그래프로 나타내고 해석하기, 무작위성, 실험 설계, 추정 등과 같은 폭넓은 개념과 원리에 초점을 맞추어 제시해야 한다.
③ 초 · 중 · 고에 걸쳐 실제적인 탐색적 자료 분석이 보다 적극적으로 도입되어야 하며 통계 실제에서 요구되는 기본적인 개념 중심으로 교재를 구성해야 한다.
④ 통계에 대한 평가의 방향: 학생이 학습해야 할 가장 중요한 통계 내용을 반영해야 하며, 통계 학습을 향상시키고 훌륭한 지도를 뒷받침해야 한다.

3) 통계적 추론

(1) 통계적 추론 이해의 장벽
① 학생들은 통계적 추론의 배경인 확률분포 개념과 통계적 추론의 핵심적인 아이디어인 표본분포의 개념을 이해하기 힘들어한다.
② 학생들은 영가설이나 검정의 기본적인 아이디어는 쉽게 이해하는데 반해 '우리가 찾는 효과가 나타나지 않았다고 가정하자'로 출발하는 유의성 검정의 논리를 힘들어한다.

(2) 현재 통계적 추론의 지도 방법
① 형식적인 확률분포 이론만을 강조한다.
② 통계의 개념적 이해를 소홀히 하고 확률이론과 정규분포 모델에 맞추는 기계적인 계산 방법을 강조하고 있다.

(3) 통계적 추론의 지도
① 통계적 추론에 들어가기 전, 자료 분석에 관한 실제적인 경험을 강조한다.
② 도수분포표로부터 그리고 실제적인 우연현상과 컴퓨터 시뮬레이션에 대한 경험을 통하여, 확률분포 개념을 직관적으로 이해하도록 강조한다.

③ 자료를 살펴보는 경험을 통해 우연 현상이 반복되어 얻어지는 결과의 무작위성과 표본분포 개념 등을 직관적으로 이해하도록 이끌어 통계적 추론의 아이디어를 직관적으로 이해시킨다.

④ 동전 던지기, 상자로부터 구슬 추출하기 등의 구체적인 시행, 컴퓨터 시뮬레이션, 사고 실험 등과 같은 실제 상황을 통해 표본 통계치의 확률분포인 표본분포 이해시킨다.

⑤ '이것을 여러 번 하면 무슨 일이 일어날까'와 같은 질문을 통해 표본분포 개념과 통계적 추론의 논리를 직관적으로 터득하도록 안내한다.

⑥ 실제적인 자료와 관련되는 자료분석 과정을 확률분포 이론과 통합되도록 구성한다.

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 수학사에서 음수를 수로 인정하기 힘들었던 상황 두 가지는?

: 첫째, -3은 2보다 작지만 두 수를 제곱하면 $(-3)^2$이 2^2보다 크게 된다. 어떻게 작은 수의 제곱이 큰 수의 제곱보다 클 수 있는지 의심했다.

둘째, $(-4)\times(-5)=20$임을 인정하면 $1:(-4)=(-5):20$이 되는데, 더 큰 수와 더 작은 수의 관계가 어떻게 더 작은 수와 더 큰 수의 관계와 같을 수 있는지 의심했다.

2. 학생들의 음수에 대한 어려움을 수학사와 관련지으면?

: 역사적으로 19세기에 이르기까지 많은 수학자들은 수 개념을 크기, 개수, 길이, 넓이 등의 양적인 관념과 연결 지어 생각하였기 때문에 음수를 하나의 '수'로 받아들이는데 많은 어려움을 겪었다고 한다. 이러한 수학자들의 모습은 음수 개념을 학습하는 학생들에게도 그대로 발생하게 되는데 즉 음수에 대하여 인식론적 장애를 겪는 학생들이 많다. 다시 말해, 수 개념을 크기, 개수, 길이, 넓이 등 양적인 관념과 연관 짓는 것은 자연수를 학습하는 상황에서 유용한 방법이었지만 음수를 학습하게 될 때에는 오히려 이 방법이 수 개념을 확장하는 학습에 방해가 되어 학생들이 음수를 이해하는데 어려움을 겪도록 만들고 있다.

3. 형식불역의 원리에 따라 '음수+음수'를 지도하는 방법?

: 음수 -2와 -3은 각각 $(-2)+2=0$과 $(-3)+3=0$을 뜻하는 자연수의 덧셈에 대한 역원으로 정의하고, 교환법칙과 결합법칙에 의해 $(-2)+(-3)$은 $-(2+3)$을 의미하도록 정의한다.

4. 유리수 개념의 발생과 관련되는 맥락 2가지는?

: 유리수 개념은 '등분할 된 부분과 전체의 맥락'과 '분배 결과의 몫으로서의 맥락'으로 설명 가능하다.

5. 실무한이란?

: 무한을 존재하는 실체로 여기는 입장에서 포착한 무한을 의미한다.

6. 잠재적 무한이란?

: 계속 무엇을 향해가는 입장에서 가능성으로만 생각하는 무한이다.

7. 실무한을 학생들이 어떻게 이해해야 하나?

: 역사적으로 가우스나 코시 등의 경우에도, 무한수열이나 실수의 집합과 같은 무한집합을 다루고 연구하였지만 실무한의 개념을 받아들인 것은 아니었다. 그러나 이후 극한의 개념과 같은 해석학의 이론들이 엄밀함을 갖추게 되는 과정에서 실무한의 개념은 불가피하게 수용될 수밖에 없었다(즉, 개념의 본성에 기인한 개념이므로 분명히 인식되어야 한다). 따라서 어려운 것은 당연한 것이다. 그러므로 자신의 무한 개념을 반성하여 스스로 실무한을 인식할 수 있도록 노력해야 한다.

8. 초등학생들은 문자를 일반화의 의미로 인식할 수 있을까?

: 초등학생들은 아직 문자를 일반화의 의미로 이해하지 못하며 단지 수를 넣기 위한 문자로만 이해한다. 초등수학 교과서에서 분수의 나눗셈 규칙을 설명하기 위해 나오는 식의 표현을 접할 때 학생들은 기호가 수를 일반화하는 변수라고 구체적으로 설명을 하지는 못하지만 적어도 그러한 기호들이 수를 대신하고 있다는 것은 안다.

9. 변수 개념 학습에서 나타나는 학생의 인지장애는?

㉠ 원인: 변수 개념에 대한 학습자의 제한된 학습 경험이나 정신적인 미성숙으로 인해 그의 마음속에 그릇된 개념 이미지가 형성되어 있어서 학습자가 변수를 사용하는 단계에서 갈등을 유발하는 것으로 해석될 수 있다.

㉡ 변수에 대해서 학생들이 이미 갖고 있는 초기 인상은 변수의 일반적인 개념을 구성하는 데 방해가 되기도 한다. 예를 들면, 변수를 점 A, 점 B와 같은 이름으로 접하고 나면 변수를 어떤 축약어라고 생각하기 쉽다.

㉢ 변수를 방정식의 미지수로서 처음 접하게 되면 문자는 어떤 특정한 값을 나타내는 것이라고 생각하기 쉽다. 이런 학생들은 일반적인 명제에서 변수를 접할 때 일반화된 문자에 어떤 값을 대입시켜서 계산을 해버리는 오류를 범하기도 한다.

10. 개념 이미지 때문에 발생하는 학생들의 문제는?

: 학생들은 xx의 형식적인 정의를 배우기 이전에 은연중에 그 개념을 접하는 과정 속에서 막연하게나마 xx에 대한 그들 나름대로의 인지 구조를 형성해 나간다. 예를 들어,

'……'라는 생각이 자리 잡게 된다. 그리고 이것은 xx를 형식적인 정의를 통해 접하게 될 때 xx가 '……'라는 생각으로 나타나게 된다.

11. 변수 기호의 임의성 이해 결여란?

㉠ 학생들은 변수 기호를 임의로 선택할 수 있다는 것을 잘 이해하지 못한다. 변수를 표시하는 기호가 변화하면 변수가 나타내는 대상도 변화한다고 생각하는 경향이 있다. 예를 들어 x, y, z, w가 실수일 때, $y=2x$와 $z=2w$가 정의역이 같으면 동일한 함수임에도 불구하고 학생들은 문자 표현이 다르므로 같은 함수로 보지 않는 경우가 있다. 또한 학생들은 미지수를 나타내는 문자가 변함에 따라 방정식의 해가 바뀐다고 생각하기도 한다.

㉡ 원인: 함수를 배우기 전에 종종 변수를 일차방정식의 하나의 해처럼 어떤 유일한 대상을 구하는 학습 경험을 많이 하게 되는데, 이 때, 학생들은 변수로 사용되는 문자가 유일한 대상과 연결되어 있다고 생각하게 되기 때문에 문자의 변화는 대상의 변화를 수반하는 것이고, 그 역도 성립한다는 생각을 하게 된다. (또는 '3'이란 기호에 의해 나타내는 값은 선택의 여지가 없으며 대수에서도 산술과 비슷한 방식으로 새로운 기호를 인식함으로써 다른 문자는 다른 수를 나타낸다고 생각하기 때문에 $x+y=y+x$는 결코 참인 문장이 될 수 없다고 생각한다.)

㉢ 해결방안: 학생들이 $a(b+c)=ab+ac$을 확인하기 위해 a, b, c에 모두 다른 값을 넣어보는 현상에서도 확인이 된다. 수학 수업에서 교사는 때때로 다른 문자에 같은 값을 취해 보면서(위의 경우 a, b, c에 모두 2를 대입하여 보는 것처럼) 학생들의 인지장애를 완화시켜줄 수 있다.

12. 변수가 나타내는 대상을 제한한다는 것은?

㉠ 대부분의 학습자는 변수를 접할 때 즉각적으로 수를 대신하는 문자라고 생각하면서 변수가 나타내는 대상을 수에 국한시킨다.

㉡ 변수를 지정된 집합 안의 임의의 원소로 볼 때 집합의 원소는 수만으로 한정되는 것이 아니므로 그 집합의 원소가 수로 주어졌거나 수가 아닌 것으로 주어졌거나 상관이 없다. 예를 들어, 기하에서 변수는 임의의 기하학적인 대상을 나타낸다. 논리에서 변수는 어떤 명제를 나타낼 수 있다. 해석학에서 변수는 함수를 나타내는데 사용될 수 있으며, 선형대수에서 변수는 임의의 행렬을 나타내기 위해 사용될 수 있다. 좀 더 진보된 수준에서 변수는 '$a \circ b = b \circ a$', 'aRb, $bRc = aRc$'에서의 '$\circ$, R'처럼 어떤 연산이나 관계를 나타내는데 사용되기도 한다. 수학에서 변수는 수만을 대상으로 하고 있는 것이 아니다.

ⓒ 원인: 수 이외의 대상을 나타내는 변수를 바르게 인식하고 있지 못하는 이유는 영어 variable을 변수로 해석한 결과 '변하는 수' 또는 여러 가지 수를 대입할 수 있는 기호라는 제한된 관념을 갖게 하여 행렬변수, 연산변수, 관계변수 등을 나타내는 다가이름을 변수로 보기 어렵게 한다.

ⓓ 해결방안: 수학에서 변수가 항상 문자로 표현되는 것도 아니고, 수학에서 사용되는 문자가 항상 변수가 되는 것도 아님을 알려준다. 전자의 예로는 $\triangle^2+1=17$에서의 기호 △를 들 수 있다. 두 식 $x^2+1=17$과 $\triangle^2+1=17$은 해를 구하는 입장에서 보면 논리적으로 동치이다. 후자 예로는 허수 단위를 나타내는 i나 원주율을 나타내는 문자 π, 자연로그의 밑을 나타내는 문자 e는 수에 대한 편리한 축약형으로 사용되는 것이다(=영원히 문자로 표현되는 수)

13. 변수를 포함한 대수식을 완결되지 않은 식으로 인식하는 경우?

㉠ 학생들이 $x+3$, $x-5$, $2x$와 같이 변수가 포함된 대수식을 완결되지 않은 식으로 여겨 $x+3=3x$, 괄호로 둘러쌓인 부분은 반드시 먼저 간단히 계산해야 한다는 생각으로 $(x+5)+(x-5)$를 $5x+(-5x)$와 같이 바꾸는 오류를 범한다.

㉡ 원인: 학생들이 $x+7$, $3x$와 같이 더 이상 간단히 되지 않는 대수식을 '완결되지 않은 것'으로 생각하는 것은 $3+6$처럼 두 가지 이상의 수가 어떤 연산 기호로 연결되어 있을 때 그것은 연산의 결과에 의해 하나의 수 9로 대치되어야 한다는 산술 경험에 의존하기 때문이다.

㉢ 해결방안: 학습자가 대수에 대한 조작적 관점에서 구조적 관점으로의 학습이 진전되도록 도와야 한다.

구분	산술	대수
등호 해석	· 등호를 '더하라'는 과제나 질문으로 인식 · 등호는 오른쪽에 '결과'를 쓰라는 명령으로 이해 · 등호는 비대칭적으로 인식	· 등호는 등식의 기호 · 등호의 양쪽에 있는 것은 같은 것을 나타내는 서로 다른 이름 · 산술에서의 등호의 성격이 변하여 '대칭화'
예	4+3=　, 5-(4)=　, 4+(　)=7은 위와 같은 틀에 맞지 않기 때문에 아동들에게 혼동을 일으키기도 함	7+5=12, 12=7+5, 7+5=5+7 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $a+b=c$ 등
오류	등호를 비대칭적으로 해석할 때 학생들이 흔히 범하는 오류 (예1) 1063+217-425를 구하여라. (풀이) 1063+217=1280-425=855 (예2) 방정식 $x+3=7$의 해를 구하여라. (풀이) $x+3=7$ $=7-3$ $=4$	

[참고] 산술에서는 '$5+8$'이 '5와 8의 합'이라는 하나의 대상으로 해석되기보다는 5와 8을 더하는 과정(절차)으로 해석된다. 다시 말해 5+8이 13을 나타낼 수 있지만 5+8 그 자체가 13이라는 수를 표현하는 또 다른 이름으로 하나의 완전한 대상으로 간주되지 않는다. 그러나 대수에서 $a+b$라는 표현은 종종 a와 b를 더하는 과정(절차)이 되기도 하고 $a+b$, 즉 a와 b의 합 그 자체라는 대상이 되기도 한다. 이와 같이 대수에서는 산술에서와 달리 과정과 대상 사이에 명확한 구분이 없는 경우가 있고, 대수식을 하나의 대상으로 그대로 받아들여야 한다.

14. 변수를 특정한 대상을 대신하는 것으로 이해하는 경우?

㉠ 변수가 어떤 집합의 원소를 대표할 수 있다(다가명사로서의 역할)는 것을 인식하지 못한다.

(예) 학생들은 변수를 $x+3=8$에서의 x처럼 방정식에서 특정한 값을 대신하는 문자로 생각하는 경향이 있고, $x+y=y+x$에서의 x, y처럼 일반적으로 임의의 수(양)를 나타내기 위해 사용된 문자를 변수로 생각하는 것에는 익숙하지 않다.

(예) 학생들은 "모든 실수 x에 대하여…"라는 문장이나 "정의역에 들어 있는 원소를 x라고 하자"라는 문장을 잘 이해하지 못한다.

㉡ 원인: 학교수학의 수업에서 학생들이 변수를 $y=ax$와 같은 함수 관계에서의 문자 x, y나 일차방정식, 이차방정식, 고차방정식에서의 미지수 x 정도로만 이해하며 그 결과 변수를 미지수라고만 생각하게 된다. 즉, 일반화된 식의 부정소로 사용된 문자 a를 변수로 인식하는 학습의 기회가 그다지 제공되고 있지 않기 때문이다.

15. 독립변수, 종속변수 개념을 불완전하게 이해한다는 것은?

㉠ 종속변수에 대한 이해도가 독립변수에 대한 이해도에 비해 상대적으로 낮게 나타나고 있다. 예를 들어, $y=ax$에서 x는 변수로 파악하는 반면 y는 변수가 아니라고 한다.

㉡ 원인: 이는 어떤 관계에서 한 변수의 변화에 의해 다른 문자의 값이 '따라서' 변할 수 있다는 개념이 잘 인식되고 있지 못하기 때문이다.

㉢ 해결방안: 변수의 역할과 의미를 함수의 정의에서 바르게 잡아야 한다.

16. 일반화에 대한 학습을 위해 교사는?

: 학생들이 일반화된 식에서 변수의 값을 대입시키는 과정(즉, 특수화)과 구체적인 상황을 변수로 구성하여 일반화된 식을 구성해내는 과정(즉, 일반화)을 함께 경험해야 한다.

[참고] 수학의 특성인 일반화는 변수로 사용되는 문자에 의해 형식화되기 때문에 일반화에

대한 학습은 변수 개념의 정적 측면, 즉 다가이름이라는 변수 본질에 대한 이해에 밑바탕을 이루게 된다.

17. 문자사용의 유연성이란?

: 주어진 대상을 지칭하기 위해서 거의 아무거나 임의로 문자를 선택할 자유가 있다는 뜻이다. '문자 선택의 자유성'이라고 부른다. 주어진 임의의 대상을 표현하기 위하여 자유롭게 교환할 수 있는 많은 종류의 문자가 있다는 사실은 문자의 변화가 반드시 그것이 나타내는 대상의 변화를 수반하는 것이 아님을 의미한다.

[참고] '일상 언어'와의 차이점이다. 일상적인 언어 표현에서는 어떤 집합 내에 있는 원소들의 본질적인 특성이 그 집합을 언급하기 위해 사용하게 되는 단어나 구의 범위를 명확하게 제한하므로 언어 표현이 변화하면 그 언어가 나타내는 대상도 변한다.

18. 대수 학습을 4가지로 구분하면?

: 문제해결과정의 학습, 산술의 일반화 학습, 양 사이의 관계 학습, 구조의 학습이다.

19. 데카르트의 발견술이란?

㉠ 데카르트는 모든 문제를 수학 문제로 변형하고, 수학 문제를 다시 대수 문제로 변형하고, 대수 문제를 다시 방정식으로 변형함으로써 방정식을 해결하는 것으로 모든 문제를 해결할 수 있다고 주장하였다.

㉡ 대수 문제를 해결할 때 '구해야 하는 미지의 양'을 x로 놓고 방정식을 세우는데, 찾고 있는 것, 즉 구해야 하는 미지의 양을 마치 인정된 것처럼 x로 놓고 방정식을 세우는 과정에 이미 분석법이 내포되어 있다고 할 수 있다.

20. 함수의 정의에서 일가성이란?

: 정의역의 각 원소에 대해 치역의 단 하나의 원소가 대응된다는 조건으로 함수와 함수가 아닌 것을 구분하는 기준이 된다.

21. 함수 그래프 활용의 양적 접근과 질적 접근이란?

㉠ 양적 접근이란 정확한 수치적 자료를 이용해서 좌표평면이나 좌표공간에 이를 정확하게 그림으로써 변화의 특징을 설명하고 예측하는 것을 의미한다. 예를 들어, $y=x^2$에서 $x=0$에서 $x=1$로 변할 때 $y=0$에서 $y=1$로 변하는 것보다 $x=1$에서 $x=2$로 변할 때

는 $y=1$에서 $y=4$로 그 변화가 크다라고 해석할 수 있다.

㉡ 질적 접근이란 산에 대한 그래프를 모양대로 그리고, 산의 경사와 변화, 정상 등을 전반적으로 설명하는 것과 같이 어떤 상황을 수량화되지 않은 상태로 개략적으로 표현하고 설명하는 것을 의미한다. 예를 들어 $y=x^2$에서 $x=0$을 기준으로 왼쪽에서는 위에서 아래로 쭉 내려오다가 $x=0$을 지나면서 아래에서 다시 위로 쭉 올라간다로 해석할 수 있다.

22. 질적 접근에 따른 그래프를 어떻게 활용하는가?

: 그래프를 질적 접근으로 활용한다는 것은 어떤 상황을 수량화하지 않은 상태로 개략적으로 표현하고 설명하기 위해 활용한다는 것이다. 질적 접근은 개략적으로 전체적인 변화를 파악하는데 유용하다.

23. 개념 정의와 개념 이미지란?

: 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조를 개념 이미지라고 하고, 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 개념 정의라 한다.

24. 함수 단원 지도에서 개념 이미지와 개념 정의 사이의 불일치로 보이는 학생의 반응은?

㉠ 함수를 판단하는 문제에서 어떤 상황이 식으로 나타나거나 그래프로 나타나면 함수라는 개념이미지를 가지고 있는 경우, 대응 상황 예를 들어, 나라와 수도와의 관계를 함수라고 판단하지 않는다.

㉡ 함수를 판단하는 문제에서 어떤 상황이 하나의 식으로 나타나거나 연속하는 그래프로 나타나면 함수라는 개념이미지를 가지고 있는 경우, 식이 2개 이상인 식 예를 들어, $y=\begin{cases} 2 & 2 \le x \\ x & -2 \le x < 2 \\ -2 & x < 2 \end{cases}$와 같은 식은 함수가 아니라고 판단한다.

25. 유클리드 원론의 정의, 공리, 공준은?

〈정의〉

점이란 부분이 없는 것이다.
선이란 폭이 없는 길이이다.
면이란 길이와 폭만을 갖는 것이다.
….

〈공리〉

· 같은 것에 같은 것은 모두 서로 같다.
· 같은 것에 어떤 같은 것을 더하면 그 전체는 서로 같다.
· 같은 것에서 어떤 같은 것을 빼면 나머지는 서로 같다.
· 서로 포개어지는 것은 같다.
· 전체는 부분보다 크다.

〈공준〉

P1. 한 점에서 또 다른 한 점으로 한 직선을 그릴 수 있다.

P2. 유한직선을 무한히 연장시킬 수 있다.

P3. 임의의 점을 중심으로 하고 그 중심으로부터 그려진 임의의 유한 직선과 동일한 반경을 갖는 원을 그릴 수 있다.

P4. 모든 직각은 서로 같다.

P5. 한 직선이 두 직선과 만날 때, 같은 쪽에 있는 내각의 합이 두 직각보다 작으면 이 두 직선은 무한히 연장될 때 그쪽에서 만난다.

* 위에 제시된 공리는 일반적인 수준에서 인간이 직관적으로 자명하게 느끼는 이치나 상식 수준의 내용을 기술한 것이며, 공준은 더 특별하게 도형과 관련하여 인간이 자명하게 느끼는 것을 기술했다.

26. 반힐의 기하 수준과 증명 활용을 관련지으면?

: 반힐의 기하 수준 중 관계적 추상적 인식 수준에서는 학생이 현재 알고 있는 지식에 근거하여 참임을 유도하는 국소적 연역을 활용하며, 형식적 연역 수준에서는 공리, 공준, 정의를 상정한 다음 다른 모든 수학적 명제를 이끌어내는 전면적 연역을 활용한다.

27. 수학사에서 유클리드 원론 활용의 긍정적인 입장?

: 유클리드 원론에 따른 수학교육 중 긍정적인 입장은 '수학은 이데아의 대상이므로 수학을 배우면 학생들은 정신을 도야할 수 있는 기회를 갖게 된다'는 것이다.

28. 증명 학습에서 학생들이 보이는 어려움은?

: 학생들은 증명방법을 찾을 수 없다고 인식한다./ 학생들은 'A이면 B이다' 형태의 증명 문제를 해석하는 데에 어려움을 겪는다./ 학생들은 정당화 수단으로서의 증명을 인식하지 못한다./ 증명을 기호로 나타내는데 어려움을 보인다.

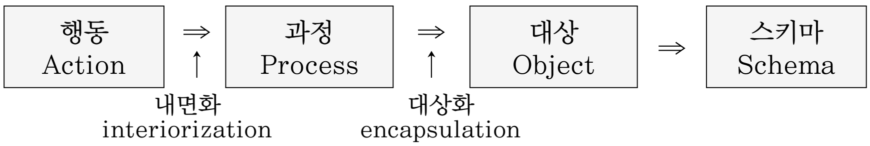
29. 수리철학의 입장에서 증명이란?

: 절대주의 수리철학에서 수학적 명제를 정당화하는 수단이 증명이다. 준-경험주의에서 증명 분석을 통해 추측을 개선해 나가고 증명 자체를 반박함으로써 새로운 개념을 발견해내는 발견의 수단이 증명이다. 사회적 구성주의에서 자기 자신을 포함해서 다른 사람을 확신시키기 위한 설명 즉, 수학자들 간의 의사소통하는 수단이 증명이다.

30. 극한 개념 지도에서 보이는 학생들은 어려움은?

: 개념과 정신적으로 관련된 모든 성질과 과정 및 심상들로 이루어진 인지 구조를 개념 이미지라 한다. 예를 들어, 상수수열의 극한값은 존재하지 않는다고 판단한다. 왜냐하면 수열을 좌표평면에 나타내므로 끊임없이 진행하면서 변화한다고 개념 이미지를 갖고 있기 때문이다.

31. APOS이론이란?



첫째, 어떤 개념을 익히기 위해서는 우선 대상에 대한 변환을 적용해 보게 되는데, 이러한 낱낱의 변환을 '행동'이라고 한다.

둘째, 대상에 대한 행동을 반복하면서 반성하는 가운데 그 행동이 내면화되어(interiorized) 하나의 정신적인 '과정'이 된다. '과정'이란 행동이 내면화되면서 동일한 조작을 할 수 있는 정신적 구조가 생긴 상태를 말한다. 과정의 상태에서는 각 단계를 명시적으로 의식하지 않고도 변환시킬 수 있다.

셋째, 과정을 전체적으로 인식하기 시작하면서 과정은 대상화되어(encapsulated) 하나의 '대상'이 된다. 어떤 것을 캡슐에 싸기 위해서는 그것에서 벗어나서 객관적으로 대상화하는 것이 필요하다.

(예) ① 자연수를 끝없이 셀 수 있다는 가능적 무한(potential infinity)의 개념에서 완결된 무한, 즉 현실적 무한(actual infinity)을 인식하는 데 이르게 되었다.

② 삼각형과 삼각형이 아닌 것을 구별하던 아동이 삼각형의 성질에 관심을 가지게 되었다.

③ '2+3=5'를 '2와 3을 더한 결과가 5'라고 생각하는 것을 넘어서 '2+3'과 '5'가 동등한 의미를 가지는 것으로 생각하게 되었다.

④ 실수의 집합에서 두 실수를 대응시키는 함수를 다루다가 함수를 원소로 하는 새로운 집합을 생각하게 되었다.

넷째, 행동, 과정, 대상이 조직화되고 연결됨으로써 하나의 일관성 있는 구조가 되면 '스키마'가 된다.

32. 수열의 극한값에 대한 형식적 지도 방법과 직관적 지도 방법의 차이점은?

> [고등학교의 직관적 정의]
> 무한수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라, 수열의 일반항 a_n이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴한다.
>
> [대학교의 형식적 정의]
> 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 적당한 $\alpha \in R$가 존재하여, 명제
> 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $K(\epsilon) \in R$이 존재하여 $n > K$인 모든 $n \in N$에 대하여 $|a_n - \alpha| < \epsilon$이다.
> 를 만족하면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다.

첫째, 직관적 정의에서는 n이 변화함에 따라 a_n이 변화하는 '함수의 종속적 관점'을 취하는 데 반해, 형식적 정의에서는 각 n에 대해 정해진 조건을 만족시키는 a_n이 존재한다는 식으로 '함수의 대응적 관점'을 취한다.

둘째, 직관적 정의에서는 독립변수 n이 커질 때, 종속변수 a_n이 일정한 값에 가까워지는 '동적인' 특성을 지니는 데 반해, 형식적 정의는 수열의 항들이 이미 존재한다고 가정하고 항들과 극한 사이의 관계를 보는 '정적인' 특성이 강하다.

셋째, 직관적 정의에서는 '한없이 커지면 한없이 가까워진다'는 표현에서 알 수 있듯이 항이 끝없이 계속된다는 '가능적 무한'을 기초로 하는데 반해, 형식적 정의는 수열이 무한하게 계속되지만 어느 순간 완결된 값을 갖는다고 생각하는 '실무한' 개념을 바탕으로 한다.

넷째, 직관적 정의는 n의 변화에 따른 a_n의 변화 '과정'에 초점을 맞추는 데 반해, 형식적 정의는 $|a_n - \alpha| < \epsilon$를 만족하는 '결과'로서의 극한값 α에 주목한다. 또한 직관적 정의는 극한값을 '발견'하는 데 초점을 두지만, 형식적 정의는 발견된 수가 극한값임을 '보증'하는 데 초점을 맞춘다. 따라서 직관적 정의는 극한값을 계산하는 데 유용하고 형식적 정의는 극한값을 정당화하는 데 유용하다.

다섯째, 직관적 정의는 독립변수 n이 커지는 원인에 의해 종속변수 a_n이 α에 가까워지는 결과를 생각하므로 논리적 전개의 순서가 '원인 → 결과'이다. 이에 반해, 형식적 정의는 종속변수 a_n이 $|a_n - \alpha| < \epsilon$를 만족할 수 있도록 독립변수 n을 결정한다는 점에서 '결과 → 원인'의 역순서이다. 이처럼 수열을 $\epsilon - N$방법으로 정의할 때에는 자연스러운 사고 방향을 역행하는 논리적인 반전이 뒤따라야 하므로, 이해에 있어 어려움이 따른다.

33. 평등수렴의 발달사와 관련한 수리철학은?

: 준−경험주의이다. 왜냐하면 연속함수의 임의의 수렴하는 급수의 극한도 연속이라는 추측에 대한 코쉬의 증명에서 시작하여 평등수렴 개념이 출현하는 과정은 증명과 반박을 통한 수학적 지식의 성장과정을 보여주기 때문이다.

1807년 푸리에(Fourier)가 $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots$와 같은 불연속 함수를 발견 1821년 코쉬가 연속함수의 임의의 수렴하는 급수의 극한은 연속이라는 정리를 증명 1826년 아벨은 삼각급수가 코쉬의 정리의 예외가 됨을 알고 이러한 것들을 제외하려고 함 1847년 사이델은 어떻게 연속인 함수의 수렴하는 급수가 불연속이 될 수 있는지에 관심을 갖고 코쉬의 증명을 주의 깊게 분석한 결과 그 증명이 평등수렴이라는 조건을 요구한다는 것을 발견

34. 함수의 연속과 극한 지도에서 보이는 학생들의 어려움은?

① 함수가 연속임을 판단하는 상황에서 함수의 그래프가 끊어지지 않고 이어져 있으면 연속함수라고 개념이미지를 가지고 있는 경우, $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q}^+ \\ -x & x\in(\mathbb{Q}^-)^C \end{cases}$인 함수도 모든 실수 $\mathbb{R}$에서 연속이라고 판단한다.

② 진동하는 수열을 판단하는 상황에서 그래프 위를 지그재그로 움직이며 진동하면 발산한다는 개념이미지를 가지고 있는 경우, 교대 수열 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$을 무조건 진동하므로 극한값이 없다고 반응을 보인다.

35. 준−경험주의에 따른 수학적 지식의 발전은?

: 수학적 지식은 원시적 추측이 제안되고, 증명되고, 반례가 출현하고, 증명을 분석하여 추측을 개선하고 새로운 개념이 발견되는 방식으로 발전해 왔다.

36. 확률 개념의 역사적인 입장을 반영한 학교 수학의 확률 개념 지도는?

: 역사적으로 확률은 통계적 확률이 먼저 발생하였으며 이후 수학적 확률이 발생하였다. 이러한 역사적 발생 과정을 반영하여 현 중학교 교육과정에서 확률의 정의 또한 통계적 확률에서 수학적 확률로 전개되도록 지도되고 있다. 즉, 학생들은 통계적 확률에 입각하여 현실 속에서 확률이 존재한다는 것을 경험하게 되고 이후 손쉽게 확률을 계산하기 위하여 수학적 확률을 확률의 정의로 학습하게 된다.

04

문제해결

* 2015 개정 수학과 교육과정 * 문제해결능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다. ① 문제를 해결할 때에는 문제를 이해하고 해결 전략을 탐색하며 해결 과정을 실행하고 검증 및 반성하는 단계를 거치도록 한다. ② 협력적 문제해결 과제에서는 균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 동료들과 협력하여 문제를 해결하게 한다. ③ 수학적 모델링 능력을 신장하기 위해 생활 주변이나 사회 및 자연 현상 등 다양한 맥락에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하게 한다. ④ 문제해결력을 높이기 위해 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하고 그 과정을 검증하는 문제 만들기 활동을 장려한다.

1. 문제의 정의와 특징

1.1. 문제의 정의

① Gagné(1985) "문제란 학생이 목표달성을 원하지만 실제로 그 목표를 달성하기 위한 방법을 모르고 있는 상태이다."

② Newell & Simon (1972) "문제란 학생이 얻고자 하는 해답이 있을 때 그 해답을 얻는데 필요한 일련의 행동들을 알지 못하는 상황이다."

③ Lenchner "문제란 개인이나 집단이 직면하여 반드시 해결을 해야 하지만, 그 해결의 분명한 경로가 보이지 않는 상황이다."

1.2. 문제의 기본요소(Andre, 1986; Glaser, 1985)

① 목표: 문제가 해결된 후의 결과나 상태나 상황이 무엇인지에 대한 진술

② 주어진 상태: 문제해결에 유용한 대상, 정보, 또는 제공되는 조건을 포함하고 항상 학생이 조작해야 하는 규칙들

③ 장애요인: 주어진 상태로부터 목표달성이 이루어지기까지 문제해결과정에서 간섭, 방해, 함정의 기능을 하는 대상이나 상황

④ 방법 혹은 조작: 문제를 해결하는데 사용될 수 있는 절차나 순차식 문제해결 과정(=알고리즘)

1.3. 문제의 특징

1) 일반 문제

① 문제는 학습자가 자신의 지식이나 상황조직 능력을 통하여 이해할 수 있는 것이어야 한다.
② 문제는 주어진 상태로부터 목표에 도달할 때까지 깊은 사고가 요구되는 상황이다.
③ 문제는 학생이 주어진 상태로부터 목표달성에 즉시, 쉽게, 직접적으로 도달될 수 없는 상황이다.
④ 문제는 학습자가 최초로 직면하게 되는 문제상황이 단순하지 않지만 결국에는 해답을 얻을 수 있는 것이어야 한다.
⑤ 문제는 개인적 관점, 관련지식의 획득 정도, 주어진 상황에 대한 경험의 유무, 능력, 흥미 등의 차이에 따라 다르게 인식된다.

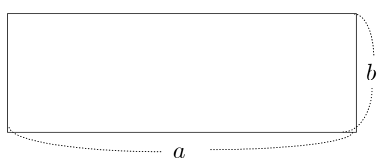
2) 수학 문제

① 문제는 기본적인 개념의 분명한 이해와 지적기능을 활용할 수 있는 것이다.
② 문제의 해결이 일반화될 수 있는 것이다.

(예) 8×8의 바둑판이 있다. 정사각형의 총 개수를 구하여라. 또 $n\times n$ 바둑판에서 정사각형의 총 개수를 일반화라 할 수 있는가?

	1×1	2×2	3×3	⋯	8×8	⋯	$n\times n$
총사각형의 개수	1	5	?		?		

(예) 면적과 네 변의 길이의 합이 같은 직사각형을 발견하여라.



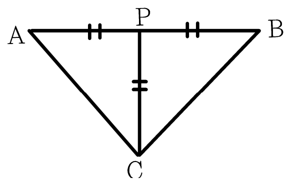
[풀이1] 이 문제에서 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 $2a+2b=ab$와 같은 식이 성립한다. 이 식이 성립하는 알맞은 a,b를 찾아보면 두 가지 경우가 발견된다.

[풀이2] $2a+2b=ab$를 변형하면 $\frac{(a+b)}{ab}=\frac{1}{2}$이며 두 정수 a, b의 조화평균(harmonic mean)이다.

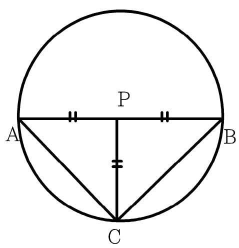
③ 문제를 해결한 결과를 확장 · 적용할 수 있는 것이어야 한다.

④ 문제의 해결방법이 다양한 것이어야 한다.

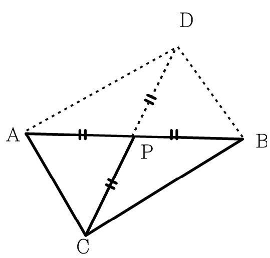
(예) 한 점 P가 $\triangle ABC$의 어느 한 변에 있으면서 세 개의 꼭짓점 A, B, C와의 거리는 똑같다. 이 때 삼각형 ABC는 직각삼각형임을 증명하여라.



[풀이1] 다음 그림과 같이 점P가 변AB에 있고
변PA=변PB=변PC일 때,
$2x+2y=180^\circ$ 이므로 $x+y=90^\circ$ 가 된다.



[풀이2] $\triangle ABC$는 원 O에 내접한다.
점 P는 A, B, C로부터 같은 거리에 있으므로 P는 원 O의 중심이 되어야 한다.
따라서 변APB는 원 O의 지름이고 원주각 $\angle ACB$는 직각이어야 한다.



[풀이3] 변CP를 같은 길이만큼 연장하여 그 점을 D라 한다.
P에서 점A, B에 선분을 그으면 평행사변형 $CADB$가 생기고 이 평행사변형의 대각선은 서로 같은 길이로 이등분하므로 이 평행사변형은 직각사각형 $ACBD$가 되어야 한다. 따라서, 각 C는 직각이다.

⑤ 학생들에게 흥미있고 도전감을 불러일으킬 수 있는 것이어야 한다.

⑥ 문제풀이과정에 여러 가지 (수학적) 개념이나 기능 등을 포함해야 한다.

(예) '함수 $f(x)=x\cdot e^{ax+b}$에서 $f'(0)=10$을 만족하는 상수 a, b의 값을 구하여라.'는 문제보다 '함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 미분가능할 때 $[a,b]$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이면 함수 $f(x)$는 상수함수임을 증명하여라.'가 더욱 좋은 문제이다.

(예) 새로 건설된 학교에는 1,000명의 학생들이 있고 개별 사물함도 꼭 1,000개가 있다. 개학 첫날 학생들은 다음과 같은 약속을 하였다. 처음 학생이 학교에 들어와서 모든 사물함의 자물쇠를 연다. 두 번째 학생은 자물쇠 중 짝수(2, 4, 6, 8, …) 번만을 잠근다. 세 번째 학생은 3의 배수(3, 6, 9, …) 번만을 골라서 잠겨 있는 것을 열고, 열린 것은 잠근다. 네 번째 학생은 마찬가지로 4의 배수(4, 8, 12, …) 번만을 세 번째

학생과 같은 방법으로 한다. 1,000번째 학생이 이와 같은 작업을 한 다음 마지막으로 열린 상태로 남아 있는 자물쇠는 어떤 것들이 있는가?

사물함 #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
학생 1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2		c	o	c	o	c	o	c	o	c	o	c	o	c	o	c	o	c	o	c
3			c	c	o	o	o	c	c	c	o	o	o	c	c	c	o	o	o	c
4				o	o	o	o	o	c	c	o	c	o	c	c	o	o	o	o	o
5					c	o	o	o	c	o	o	c	o	c	o	o	o	o	o	c
6						c	o	o	c	o	o	o	o	c	o	o	o	c	o	c
7							c	o	c	o	o	o	o	o	o	o	o	c	o	c
8								c	c	o	o	o	o	o	o	c	o	c	o	c
9									o	o	o	o	o	o	o	c	o	o	o	c
10										c	o	o	o	o	o	c	o	o	o	o
11											c	o	o	o	o	c	o	o	o	o
12												c	o	o	o	c	o	o	o	o
13													c	o	o	c	o	o	o	o
14														c	o	c	o	o	o	o
15															c	c	o	o	o	o
16																o	o	o	o	o
17																	c	o	o	o
18																		c	o	o
19																			c	o
20																				c

[풀이] 처음 20명 학생까지만 구체적으로 표를 만들어 표기해 보고, 어떤 일정한 패턴(pattern)이 있는가를 발견함으로써 전체를 알아낼 수 있고 배수, 완전제곱수와 약수의 개수 등과 같은 소재가 있다. 여기서 o는 열림, c는 닫힘으로 표기한다.

(예) 여덟 사람이 둥그렇게 앉아 있다. 각자 한 번씩만 돌아가면서 악수를 한다면 리그전처럼 모두 몇 번의 악수가 있겠는가?

2. 문제의 종류

2.1. 일반적인 문제의 종류

① Simon(1973)의 구조화된 수준에 따른 문제의 종류

㉠ 잘 구조화된 문제 조건

· 해결이 적절한지 검증할 명확한 준거가 있어야 한다.

· 최초 상태와 목표 상태가 표상화 될 수 있어야 한다.

· 문제를 변형해서 표상화 할 수 있어야 한다.

· 문제해결을 통하여 얻은 지식을 문제에 대입할 수 있어야 한다.

㉡ 잘 구조화되지 않은 문제조건

· 문제에 정보나 자료를 추가해야 문제가 분명해진다.

· 명확하게 구체화된 목표를 찾아보기 힘들다.

② Paul(1987)

㉠ 단순문제: 하나의 분명한 해답과 해결방법이 있어서 학생이 논리적으로 생각하면 정답에 도달할 수 있도록 구조화된 문제

㉡ 복합문제: 명백한 해결방법이 없을 뿐만 아니라 개인의 가치관이 관련되어 있어 복합적인 논리구조를 띄고 있는 문제, 일상생활의 문제 등

③ Getzel(1988)

㉠ 제1유형의 문제: 해답만 모를 뿐 해결방식을 알고 있는 문제, 해결을 위해서는 기억력이 요구

㉡ 제2유형의 문제: 학생이 해결방법을 모르는 문제, 분석력과 추론능력이 요구

㉢ 제3유형의 문제: 문제 자체가 제시되지 않기 때문에 문제도 학생이 찾아내야 하고, 해결방법도 상상력과 통찰력을 통하여 스스로 찾아내야 되는 문제

2.2. 수학 문제의 종류

① 정형문제: 이미 제시된 알고리즘을 사용하여 해결할 수 있는 문제

② 비정형문제: 문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 구안하여 풀어야 하는 문제

2.3. 영어로 본 문제의 종류

① 질문(question): 단순한 회상과 기억에 의해 해결이 가능한 상황

② 연습 문제(exercise): 이미 학습된 기능이나 알고리즘의 강화를 위한 반복 연습을 요하는 상황

③ 문제(problem): 해결을 위하여 이미 학습된 지식의 분석과 종합을 요하는 상황

2.4. 트래버스의 수학 문제 분류

① 산수문제: 초등학교 수준의 대수문제, 기하문제를 포함하나 문장제로서의 일(work) 문제, 운동(motion) 문제, 나이(age) 문제, 혼합물(mixture) 문제 등이 이 영역에서 중요한 위치를 차지한다.

> 학생 A는 잔디를 4시간에 모두 깎을 수 있고, 학생 B는 5시간 안에 잔디를 깎을 수 있다.
> 두 학생이 함께 잔디를 깎으면 몇 시간에 잔디를 모두 깎을 수 있는가? (일 문제)

② 응용문제(application problem)

㉠ 응용문제는 추상적인 수학 내용을 실생활의 문제 장면에 응용하거나, 물리 · 화학 · 인구문제 · 공업 등에 활용하는 문제들을 말한다.

㉡ 학교에서 공부하는 응용문제는 현실적으로 학생들이 졸업 후에 직장을 가지게 되고, 직장에서 취급하는 문제를 풀기 위해 준비할 수 있는 것이다.

> '곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$의 임계점과 변곡점을 구하고 곡선을 그려라.'라기 보다, 어떤 공장에서 50,000개 이하의 상품에 대하여는 매 100개에 5만원의 계약을 했다. 50,000개가 넘으면 전 주문량의 매 100개에 대해서 할인을 하되, 그 할인료는 50,000개를 넘는 양의 매 100개에 대하여 40원씩 정했다. 공장의 총 매출 수입이 최대가 되는 주문량은 얼마인가?

③ 추상문제(abstract problem)

㉠ 교과서의 예제문제나 연습문제처럼 실생활에 응용성이 있느냐 하는 면과 관계없이 단순 수학 내용만을 포함한 문제이다.

㉡ 논리적 추론 능력이나 수학적인 사고를 길러주는 데 광범위하게 사용된다.

> 두 점 $A(-4,1)$, $B(2,3)$이 주어져 있을 때, 점 $P(x,y)$에 대하여 $PA \simeq PB$인 조건을 만족하는 점 P의 집합을 나타내는 그래프의 방정식을 구하여라.

④ 탐구문제(open-search problem)

㉠ 학생들 스스로 자기 질문을 만들고 주어진 문제를 확장시키는 문제이다.

> 학생 A는 오전 8시 25분에 학교를 향하여 시속 4마일의 속도로 집을 떠났다. 학생 A의 형은 오전 8시 30분에 학생 A가 잊은 것을 전달하기 위하여 같은 길을 따라가서 10분 만에 따라잡았다. 형이 달린 속도를 구하여라.

㉡ 본 문제의 풀이 이후 확장된 문제를 제시하여 해결하는 기회를 제공한다.

> 1. 자동차가 한 시간에 30마일로 남쪽을 향해서 달린다. 두 시간 후에 두 번째 차가 첫 번째 차를 따라잡기 위하여 같은 길로 45마일(1시간) 속도로 달렸다. 몇 시간 후에 따라잡겠는가?
> 2. 두 기차의 속도를 합하면 한 시간당 100마일이다. 빠른 기차는 느린 기차보다 4시간 후에 출발하여 8시간 만에 따라잡았다. 두 기차의 속도를 각각 구하여라.

⑤ 프로젝트(project)

㉠ 학생 스스로 장기간의 준비와 과정을 거쳐 결과물을 얻어내는 문제이다.

㉡ 장기간에 걸쳐 해결되는 문제이므로 일반 수업시간에 다루기 어려우며, 제공되는 문제로는 응용문제가 될 수도 있고, 추상문제가 될 수도 있다.

> 1. 학교에서 건물이 있는 위치만 제외하고 모든 땅을 잔디로 덮으려 한다. 얼마나 비용이 드는지를 계산하여라.
> 2. 테니스 시합을 하는 프로그램을 베이직(Basic) 용어로 작성하여라.
> 3. 오늘 월식이 있었다. 다음 월식이 일어나는 때를 계산하여라.

⑥ 증명문제(proof)

㉠ 중등학교에서 학생 스스로 증명하는 길을 깊이 터득한다는 것은 쉬운 일이 아니므로 증명하는 과정이 교사의 주도에 의하여 제시된다.

㉡ 증명을 하기 위해서는 과거에 이미 증명한 정리들을 종합하여 새로운 사실을 얻어내는 과정이 필요하다.

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고, 개구간 (a,b)에서 미분가능하면
$(f(b)-f(a))/(b-a)=f'(c)$ $(a<c<b)$인 c가 (a,b) 안에 적어도 하나는 존재한다.
[증명] $g(x)=f(b)-f(x)-[f(b)-f(a)/(b-a)]\cdot(b-x)$로 놓으면,
함수 $g(x)$는 $[a,b]$에서 연속이고, (a,b)에서 미분가능하다.
그리고 $g(a)=g(b)=0$. 따라서 롤의 정리에 의하여
$g'(c)=-f(c)+(f(b)-f(a))/(b-a)=0$ $(a<c<b)$
인 c가 (a,b) 안에 적어도 하나 존재한다. 즉,
$(f(b)-f(a))/(b-a)=f'(c)$ $(a<c<b)$.
(우리는 밑줄 친 부분에 대해서 미리 알고 있어야 이 문제를 증명할 수 있다.)

㉢ 증명에는 두 가지 방법이 있다.

· 종합적 증명: 가정에 제시된 조건과 관련된 다른 정보(공리, 정의, 이미 증명된 정리)들을 이용하여 결론에 도달하는 방법

· 분석적 증명: 먼저 결론을 이야기하고 이러한 결론을 얻기 위하여 어떤 조건이 있어야 하는지 추적해 주어진 문제의 가정에 제시된 조건까지 거슬러 올라가는 방법

3. 문제해결 과정 및 전략

3.1. 문제해결의 과정(process)

어떤 주어진 문제가 있을 때, 학습자가 문제를 해결하는 동안에는 문제공간의 특성과는 아무런 관련 없이 일련의 동일한 문제해결과정을 거치게 된다(Gagné, 1985).

1) 듀이(Dewey, 1933)[54]: 문제를 해결하는 과정(=반성적 사고)

① 문제의 인식: 예상되는 문제 상황을 인지하고 그 문제의 난이도 수준을 인식하는 단계
② 문제의 명료화와 정의: 해답을 구하는데 직면하게 되는 난이도의 근거를 파악하고 정의하는 단계
③ 사실의 탐색과 가설설정: 경험적 자료의 관찰, 수집 또는 조작을 통하여 해결 방안을 탐색하는 단계
④ 실험적 검증: 관념 또는 가설을 정교하게 하고 추론에 의한 해결방안의 개발 및 해결방안의 평가와 검증 단계

2) 왈리스(Wallas, 1926)

① 준비기: 해결하고자 하는 문제의 특징을 파악하고 심사숙고하여 선택된 관련 표상의 결합을 의식적으로 시도하는 단계
② 부화기: 의식적인 탐색노력이 포기되고 무의식적인 사고활동이 이루어지는 단계
③ 계시기: 돌연히 해결의 실마리가 떠올라 '아하' 경험을 하는 통찰의 순간이 오는 단계
④ 검증기: 의식적 사고를 통하여 문제를 해결하고 결과를 명확하게 정리하는 단계

3) 버튼(Burton, 1985)

① 도입 단계: 문제를 이해하라.
② 공략 단계: 문제를 푼다.
③ 검토 단계: 풀이를 검토한다.
④ 확장 단계: 문제를 일반화한다.

---

54) '암시-지성적 정리-가설-추리작용-검증' 5단계로 명시하기도 한다.

4) 숀펠드(A. Schoenfeld, 1980)

① 분석단계
· 가능한 한 그림을 그려본다.
· 특수한 사례를 검토해 본다.
· 문제를 단순화시켜 본다.
② 계획단계
· 문제해결의 방안을 구조화해 본다.
③ 탐구단계
· 본질적으로 동등한 문제를 생각해 본다.
· 약간 수정한 문제를 생각해 본다.
· 대폭 수정한 문제를 생각해 본다.
④ 실행단계
· 탐구단계에서 획득한 아이디어에 따라서 문제를 해결해 본다.
⑤ 검증단계
· 해결책이 구체적인 사례에도 합당한지 검토한다.
· 해결책이 보편적인 경우에도 합당한지 검토한다.
· 대안적인 해결방법으로도 결과를 확인해 본다.

5) 폴리아(Polya, 1945)

문제 이해 → 계획 작성 → 계획 실행 → 반성

(1) 문제해결 4단계
① 문제 이해 단계(understanding the problem)
㉠ 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하여 문제를 분석하는 단계
㉡ 목표에 주의를 집중하기/ 문제의 주요부분에 주목하기/ 조건에 주목하여 문제를 조망해 보기/ 그림을 그리고 절절한 기호를 붙이기/ 조건을 분해하여 써보기
② 문제해결 계획 수립 단계(devising a plan)
㉠ 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계

㉡ 관련된 지식을 동원하기/ 유용한 패턴 찾아보기/ 관련된 문제나 정리를 알아보기/ 미지인 것이나 결론이 같거나 유사한 문제를 생각해보기/ 관련된 문제의 풀이 결과와 방법을 활용하기/ 보조 요소를 도입하여 활용하기/ 문제를 달리 진술해 보기/ 정의를 되짚어 보기/ 보다 단순한 문제, 보다 일반적인 문제, 보다 특수한 문제, 유사한 문제 등 관련된 문제를 풀어보기/ 미지인 것과 조건 및 자료를 변형하여 보조 문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해 보기/ 진척이 없을 때 상황을 재평가하기/ 자료, 조건, 핵심적인 개념의 사용 여부 점검하기

③ 계획 실행 단계(carrying out the plan)

㉠ 해결 계획에 따라 실행하는 단계

㉡ 매 단계를 점검하면서 풀어가기

④ 반성 단계(looking back)

㉠ 문제해결과정을 처음부터 검토해 보는 단계

㉡ 풀이결과와 논증과정을 점검하기/ 다른 풀이 방법을 알아보기/ 풀이결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기/ 관련된 새로운 문제를 만들어보기

(2) 문제해결 4단계 적용

[문제] 108에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 할 때, 곱할 수 있는 가장 작은 자연수를 구하여라.

(상황: 이 문제를 풀어야 하는 학생은 중학교 1학년 ‘자연수의 성질’을 배우는 학생이며, 처음으로 이 문제를 접하여 스스로 풀이하는데 실패하였다.)

① 문제 이해 단계

· 조건은? $108\times\square=(\quad)2$

· 찾으려는 것은? □에서 가장 작은 자연수

② 계획 수립 단계

· 108이 너무 큰 수이니 수를 바꾸어보면? $8\times\square=(\quad)2$

· □에 2를 넣으면 4^2이 된다.

· □에 다른 수를 넣어도 $(\ )^2$이 될까? □에 8을 넣으면 8^2이 된다.

· □에 넣을 수가 딱 하나는 아닌 것 같은데? 많은 것 같다.

· $8\times\square=(\quad)2$를 만족하는 □ 중에 어떤 수를 찾아야 하나? 가장 작은 자연수를 찾아야 한다.

- 그렇다면 ㅁ에 2를 넣는다는 것은 어떻게 알았나? 그냥 생각이 났다.
- 8을 어떻게 했으면 좋겠다는 생각은 안 드나? 전혀 안 든다.
- 8×ㅁ=(　　)2은 왼쪽의 8×ㅁ와 오른쪽의 (　)×(　)가 서로 같아야 한다. 생각나는 거 있나? ㅁ가 8이면 오른쪽 (　)에 각각 8을 넣으면 된다.
- 그런데 ㅁ에 들어갈 가장 작은 수가 2였는데? 그렇다면 8을 쪼개야 한다.
- 8을 쪼갠다는 게 뭔가? 8은 2×2×2로 쪼개진다. 소인수분해를 사용해야 한다.
- 수학적으로 설명한다면? 왼쪽은 2×2×2×ㅁ이고 오른쪽은 (　)×(　)이다. 그리고 왼쪽의 수를 하나씩 오른쪽 (　　)에 넣는다. 2×2, 2×ㅁ. 그래서 ㅁ의 값이 2이다.
- 혹시 원래 문제 108에 대해서도 풀 수 있겠나? 108을 소인수분해 한 다음 같은 소인수가 2개씩 있는지 확인하고 ㅁ를 찾으면 된다.
- 이제 문제를 어떻게 해결하면 되는지 계획을 수립한 것 같다. 실행해보자.

③ 실행 단계

- $108\times\square=(\ \ )\times(\ \ )$
  $2\times2\times3\times3\times3\times\square=(2\times3\times3)\times(2\times3\times\square)$

  따라서 ㅁ에 3이 들어가야 한다.

  즉, 108에 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하는 가장 작은 자연수는 3이다.

④ 반성 단계

- 풀이과정을 검토하여 계획이 바르게 실행되었는지 확인해보아라.
- 다른 풀이로 문제를 해결할 수 있는지 조사해보아라.
- 유사한 문제를 직접 만들어 풀어 보아라.

3.2. 문제해결 전략(strategy)

> 문제해결 전략이란 문제해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략으로, '계획수립' 단계에서 결정적으로 이용될 수 있는 수단을 말한다.

1) 한국교육개발원이 제안한 문제해결 전략

① 식만들기　② 그림그리기　③ 규칙성찾기　④ 표만들기　⑤ 거꾸로 풀기
⑥ 예상과 확인　⑦ 수형도 그리기　⑧ 단순화하기

2) 숀펠드가 구분한 문제해결 전략

① 그림을 그리고 적절한 표기를 도입하기 ② 관련된 문제를 탐구하기
③ 문제를 재공식화하고 거꾸로 풀기 ④ 절차를 검사하고 입증하기
⑤ 그림 그리기 ⑥ 귀납적 논의
⑦ 모순법 또는 대우법에 의한 논의 ⑧ 변수가 더 적은 비슷한 문제를 생각하기
⑨ 하위목표(subgoal) 만들기 ⑩ 특수화하기
⑪ 일반성을 가정하기
⑫ 한 양을 제외한 모든 양을 고정된 것으로 생각하기
⑬ 문제를 풀린 것으로 간주하기 ⑭ 보조요소 도입하기 등

3) 폴리아의 발견적 사고 전략

거꾸로 연구하기, 단순화 해보기, 유추하기, 간단하고 쉽고 익숙한 것을 먼저 고려해 보기, 문제를 전체적으로 이해한 다음 세부적인 부분에 주목하기, 문제를 형태별로 분류하기, 패턴 찾아보기, 대칭성에 주목하기, 동치인 문제를 고려하기, 극단적인 경우를 점검해 보기, 차원에 의한 검증을 해 보기

4) 수학 문제해결에서 사용되는 대표적인 문제해결 전략

(1) 그림 그리기

그림을 그려봄으로써 문제를 전체적으로 이해하거나 문제해결에 필요한 수단을 제공받을 수 있으며 심지어 문제의 답을 얻을 수도 있다. 즉, 문제의 이해, 계획의 수립, 실행 과정 모두에서 유용하다.

① 문제 상황을 순서대로 그리기

(예) 상민, 경철, 용규, 남수, 민규, 영식은 500m 달리기를 하기로 했다. 처음 출발할 때 다음과 같이 하기로 약속했다. 이들이 서 있는 순서를 제일 앞에서부터 말하여라.

㉠ 남수는 용규보다 6m 앞에 선다.
㉡ 남수는 민규보다 2m 앞에 서나 영식이보다는 3m 뒤에 선다.
㉢ 상민이는 영식이 보다 11m 뒤에 선다.
㉣ 경철이는 맨 앞의 사람과 맨 뒤에 있는 사람의 꼭 절반 되는 지점에 선다.
⇒ 그림을 그려 순서를 잡을 수 있다.

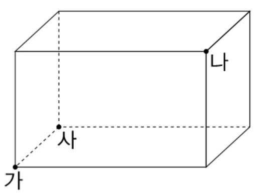
② 그림식(그림을 이용한 식) 그리기

(예) 우리 집에는 하얀 젖소와 검은 젖소 두 종류의 암소를 기른다. 하얀 젖소 세 마리와 검은 젖소 두 마리가 4일 동안에 생산하는 우유와, 하얀 젖소 두 마리와 검은 젖소 네 마리가 3일 동안에 생산하는 우유의 양은 같다. 어떤 종류의 소가 우유를 더 많이 생산하는가?

⇒ 방정식을 배우기 전에 하얀 젖소를 하얀 어떤 도형으로, 검은 젖소를 검은 어떤 도형으로 그려서 문제 상황을 표현하여 해결한다.

③ 수형도 그리기

(예) 다음 직육면체에서 '가'에서 '나'를 거쳐 '사'까지 모서리를 따라 갈 수 있는 길은 모두 몇 가지인가?(단, 같은 꼭짓점을 두 번 지나서는 안 된다.)



(2) 표 만들기

표를 만들어 정리하면 답을 바로 찾을 수도 있고, 일정한 규칙을 발견하여 답을 유도할 수 있어 해결 방법을 모색하기 위한 보조 전략으로 사용된다.

(예) 구슬이 50개 있다. 미연이와 송이가 구슬을 나누어 갖기로 하였다. 미연이가 구슬을 1, 2, 3, … 씩 가질 때마다 송이는 구슬을 몇 개를 갖게 되는가?

(예) 다음 표에는 다양한 입체도형이 소개되어 있다. 각 입체도형에는 꼭짓점, 면, 모서리가 있다. 이들 개수 사이에는 재미있는 공식이 있다. 그 공식을 발견하여라.

입체도형	꼭짓점의 수	면의 수	모서리의 수	규칙(공식)
정사면체 정육면체 정팔면체 정십이면체 정이십면체				

(3) 규칙성 찾기

문제에 주어진 조건이나 관계를 분석하여 어떤 규칙성을 찾아내고 이 규칙을 확대하여 적용하면서 문제를 해결한다.

(예) 수가 다음과 같이 나열될 때, 40번째의 수는?

$2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$, 4, $4\frac{2}{3}$, $5\frac{1}{3}$, 6, $6\frac{2}{3}$, …

(4) 예상하고 확인하기

답을 예상 혹은 어림짐작해보고 그 답이 맞는지 확인해 본다.

① 시행착오: 실제로 행해보고 거기서 나타나는 오류를 극복하여 다시 행하는 일을 반복함으로써 문제를 해결한다.

(예) 840보다 큰 수 중에서 가장 작은 素數를 구하여라.

⇒ 일의 자리 수가 0, 2, 4, 5, 6, 8인 수는 素數가 될 수 없으며, 각 자리 수의 합이 3의 배수가 되는 수도 소수가 될 수 없다. 따라서 841, 847, 853, 857 등을 차례로 조사해 본다.

② 반복적인 예상과 확인

(예) 80원짜리 우표와 60원짜리 엽서를 합하여 14장 사는 비용이 900원이다. 우표와 엽서는 각각 몇 장씩 샀는가?

⇒ 우표를 8장 샀다고 예상하여 비용을 계산해 보고, 우표를 6장 샀다고 예상하여 비용을 계산하면서 비용의 변화를 주목하여 답을 구한다.

(5) 분석하기

분석법이란 문제를 주어진 것과 찾으려는 것으로 구분할 때, 찾으려는 것에서 출발하여 주어진 것으로 사고를 진행하는 전략이다. '거꾸로 풀기, 식 세우기, 문제를 풀린 것으로 간주하기, 간접증명법 등'도 분석법의 일종이다.

① 거꾸로 풀기

(예) 다음에서 처음 수는 얼마인가?

처음 수 → 3을 곱한다 → 20을 더한다 → 2로 나눈다 → 40

⇒ 문제 상황을 역으로 생각하거나 역 연산을 사용한다.

② 식 만들기

(예) 합이 78이고 곱이 1296인 두 수를 구하여라.

⇒ 찾으려는 수를 x, y 등으로 두고 조건에 맞게 식을 세운다.

③ 문제를 풀린 것으로 간주하기

(예) 세 점 A, B, C가 주어졌을 때, A를 통과하며 B와 C사이를 지나면서 B와 C에서 동일한 거리에 있는 직선을 그려라.

⇒ 조건에 맞추어 직선을 먼저 그려놓고 유용한 어떤 것을 찾아본다.

④ 간접증명법

㉠ 귀류법: 명제의 결론을 부정하여 참이라고 인정된 사실이나 그 명제가 가정하고 있는 것에 모순됨을 보임으로써 처음 명제가 참임을 증명한다.

(예) 소수의 열은 무한임을 보여라.

⇒ 소수의 열이 유한이라고 가정하여 명백한 모순을 도출함으로써 소수의 열이 무한임을 증명한다.

㉡ 대우법: 명제의 대우가 참임을 보여 원 명제가 참임을 증명한다.

(예) $\sqrt{7}$ 이 무리수일 때, $2+\sqrt{7}$ 도 무리수임을 보여라.

⇒ $2+\sqrt{7}$ 를 유리수라 가정하여 $\sqrt{7}$ 이 유리수임을 유도한다.

㉢ 분할법: 분할법은 가능한 경우를 여러 개로 나누어 그 일부가 모순이 됨을 보임으로써 그 외의 것이 참임을 보이는 방법이다.

(예) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$ 이 성립하는 삼각형 ABC에서 $\angle C$가 90 ° 임을 증명하여라.

⇒ $\angle C$가 취할 수 있는 값의 범위를 $\angle C=90^\circ$, $\angle C>90^\circ$, $\angle C<90^\circ$의 경우로 나누고 $\angle C>90^\circ$, $\angle C<90^\circ$가 모두 모순이 됨을 보임으로써 $\angle C=90^\circ$가 됨을 보인다.

㉣ 동일법: 어떤 조건을 만족하는 대상이 두 개 있다고 가정하고 그로부터 그 두 대상이 같게 됨을 보이는 방법이다.

(예) 0이 아닌 어떤 실수 a에 대하여 $a\times x=1$이 되는 수 x는 하나뿐임을 증명하여라.

⇒ $a\times\square=1$이 되는 ㅁ가 x 외에 y도 있다고 가정한다.

㉤ 모순법: 어떤 명제가 성립한다고 가정하고 그로부터 모순을 이끌어냄으로써 그 명제가 거짓임을 보이는 방법이다. 또는 답을 구하는 문제에서 조건을 만족하는 해답이 있다고 가정하면 모순이 일어남을 보임으로써 해답이 없다는 것을 보이는 방법이다.

(예) 0에서 9까지의 숫자를 한 번씩만 사용하여 수를 구성하여 그 수들이 합이 100이 되게 하여라.

⇒ 0에서 9까지의 숫자를 한 번씩 사용하여 합이 100이 되게 수를 구성했다고 가정하면, 10의 자리 수의 합이 t일 때 1의 자리수의 합이 $45-t$이고, $10t+(45-t)=100$이 되어 t가 분수가 되는 모순이 나온다.

(6) 문제를 변형하기

① 일반화하기: 하나의 대상을 포함한 집합에 대해 고찰한다.

(예) 하노이 탑 문제

⇒ 원판이 n개 주어졌을 때 필요한 이동의 최소 회수를 $f(n)$으로 두고 규칙 $f(n)=f(n-1)+1+f(n-1)$로부터 $f(n)=2^n-1$을 유도해 문제를 해결할 수 있다.

② 특수화하기: 주어진 대상의 집합에 대한 고찰로부터 그 집합에 포함되는 더 작은 집합 또는 단 하나의 대상에 대해 고찰한다.

㉠ 극단적인 경우 찾기

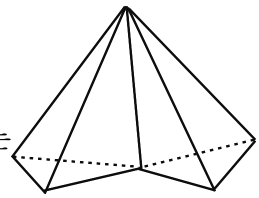
(예) 어떤 삼각형에서 내접원의 반지름을 r, 외접원의 반지름을 R, 가장 긴 높이를 H라고 할 때, $r+R \le H$임을 증명하거나 반증하여라.

⇒ 꼭지각이 180 ° 가 되는 이등변삼각형을 생각하면, $r+R \le H$이고 $R=\infty$가 되므로 이 정리는 성립하지 않는다.

㉡ 반례 찾기

(예) 다면체에서 $V-E+F=2$가 성립하는지 증명하거나 반증하여라.

⇒ 다음의 다면체는 $V-E+F=3$이 되므로 명제를 반박한다.



③ 유추하기: 유사한 대상으로부터 서로 대응되는 부분에 일치하는 관계를 찾는다.

(예) 균질인 사면체의 무게중심을 찾아라.

⇒ 삼각형의 무게중심으로부터 대응되는 관계를 찾아본다.

④ 단순화하기: 수가 너무 크거나 작아서 다루기 힘들 때, 혹은 변수가 많을 때, 그 수를 친숙한 자연수로 바꾸거나 변수의 개수를 줄여서 문제를 푼다. 또는 문제(조건)를 여러 개로 나누어 subproblem을 만들어 푼다.

(예) 방정식 $2^x-2^{3-x}=2$를 풀어라.

⇒ 2^x를 y로 치환하여 간단한 y의 방정식으로 변형한다.

(예) 8×8 바둑판에서 정사각형의 총 개수를 말하여라.

⇒ 다음과 같이 단순문제를 만들어 접근할 수 있다.

㉠ 1×1 바둑판에서 정사각형이 모두 몇 개인가?

㉡ 2×2 바둑판에서 정사각형이 모두 몇 개인가?

㉢ 3×3 바둑판에서 정사각형이 모두 몇 개인가?

(7) 구체적 모델을 선정하기

실제 구체물을 놓고 문제해결의 방법을 생각한다.

(예) 여섯 사람이 다른 다섯 명과 서로 악수를 한다면 몇 번의 악수가 가능한가?

⇒ 직접 여섯 사람이 실제로 악수를 해 본다.

4. 문제해결 행동의 기본요소(A. Schoenfeld, 1985)

숀펠드는 수학적 문제를 해결하기 위해 ‘자원’, ‘발견술’, ‘통제’ 그리고 ‘신념체계’가 필요하다고 강조했다. 즉, 문제를 해결하기 위해서는 기본적인 수학적 지식(자원)이 필요하다. 그리고 문제해결의 기술(발견술)이 필요하다. 이 때 발견술이란 문제를 해결하기 위해 문제 해결자가 스스로에게 던지고 다루는 발문과 권고의 모임을 의미한다. 그리고 이용 가능한 자원이나 발견술을 언제 어떻게 적절하게 사용하는지를 선택하고 활용하는지에 대한 결정 능력(통제)이 필요하며 마지막으로 수학에 대한 문제해결자의 신념(신념체계)이 준비되어 있어야 한다.

자원 **(resource)**	문제를 해결하기 위해 개인이 사용할 수 있는 사실적, 절차적, 명제적인 수학적 지식 · 관련 영역에 관한 직관과 비형식적인 지식 · 사실(facts) · 알고리즘 절차 · 틀에 박힌 비알고리즘적인 절차 · 관련 영역을 다루는 데 필요한 법칙에 대한 이해(명시적 지식)
발견술 **(heuristic)**	효과적인 문제해결을 위한 경험적인 규칙, 생소하고 비표준적인 문제를 해결하기 위한 전략과 기술 · 그림 그리기, 적당한 표기 도입하기 · 관련된 문제 연구하기 · 문제를 재진술하기, 거꾸로 풀기 · 절차를 검증하고 확인하기 (cf) 발견술은 문제에 대한 이해를 깊게 하거나 해결로 이르도록 하는 데 도움을 주지만 완전한 해결을 보장하는 것은 아니다.
통제 **(control)**	문제해결시도 중 자원을 선택하여 취급하고 처리하며, 풀이를 계획하고, 진행 중인 풀이를 점검하며 평가하는 등 자원과 전략의 선택과 수행에 관한 전반적인 결정 능력 · 계획하기 · 모니터하고 평가하기 · 의사결정하기 · 의식적인 메타인지적 결정 (cf) 통제가 결여되면 자원을 낭비하고 능력에 미치는 문제를 쉽게 풀지 못하게 된다.
신념체계 **(belief system)**	개인의 ‘수학적인 세계관’, 수학에 대한 가치관이나 선입관 (예) 수학은 소수의 뛰어난 사람만 할 수 있는 과목이다, 수학 문제의 올바른 풀이는 한 가지밖에 없다 등

5. G. Polya의 문제해결 'How to Solve it?'

5.1. 문제해결 과정 4단계

[네 가지 사고 단계]
우선 우리는 문제를 이해하여야 한다. 곧 구하는 것이 무엇인지를 분명히 알아야 한다. 그리고 여러 가지 사항들이 어떻게 관련되어 있는지, 또한 미지인 것이 자료와 어떻게 연결되어 있는지를 알아내어 풀이에 대한 착상을 하고 계획을 세워야 한다. 그 뒤 우리의 계획을 실행하여야 하며 마지막으로 완성된 풀이를 뒤돌아보고 다시 검토하며 논의하여야 한다.

1) 문제 이해

① 학생은 주어진 문제를 해결하려는 욕구(흥미)를 가져야 한다. 학생에게 흥미가 있는 문제를 선정해야 한다. 너무 어려워도 너무 쉬워도 안 되며 자연스럽고 흥미로워야 하고, 어느 정도 시간을 들여 자연스럽고 재미있게 표현되도록 노력해야 한다.

② 문제를 설명하는 언어적 진술이 이해되어야 한다. 학생들에게 문장을 반복해서 읽도록 요구하여 문제를 유창하게 진술할 수 있도록 해야 한다. 또한 학생들이 문제의 주요 부분, 즉 미지인 것, 자료, 조건 등을 지적할 수 있어야 한다.

- 발문 ㉠ 미지인 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가?
  ㉡ 조건은 만족될 수 있는가? 조건은 미지인 것을 결정하기에 충분한가 또는 불충분한가 또는 과다한가 또는 모순되는가?

③ 학생은 문제의 주요 부분을 주의 깊게 반복하여 여러 측면에서 살펴보아야 한다. 문제와 관련된 그림이 있다면 그림을 그리고, 미지인 것과 자료를 그림에서 지적하도록 해야 한다. 이들 대상에 이름을 붙일 필요가 있다면, 적절한 기호를 붙여야 한다.

- 발문 ㉠ 그림을 그려 보아라. 적절한 기호를 붙여보아라.
  ㉡ 조건을 여러 부분으로 분해하여라. 그것을 써서 나타낼 수 있는가?

2) 계획 작성

① 계획은 일반적인 문제해결의 윤곽을 잡는 단계이다.

② 미지인 것을 얻기 위해서 어떤 계산이나 작도를 해야 할 것인지를 알게 되거나 적어도

그 윤곽을 알게 되었다면 그것으로 계획을 세운 것이 된다.

③ 교사는 학생을 조심스럽게 도와 번쩍이는 생각이 떠오르게 해야 한다. 이 때 학생들의 입장을 이해하려면, 교사 자신이 문제를 풀 때 스스로 겪은 곤란과 성공에 대한 경험을 생각해 보아야 한다.

④ 학생들에게 전에 풀어 본 문제나 전에 증명한 정리 등과 같은 이전에 얻은 수학 지식들 중 현재 해결하는 문제와 관련된 어떤 것을 생각할 수 있도록 유도한다. 그리고 이러한 것들 중 핵심적인 공통점을 주지하도록 안내한다.

- 발문 ㉠ 전에 그 문제를 본 일이 있는가? 그렇지 않으면 약간 다른 형태로 된 같은 문제를 본 일이 있는가?
  - ㉡ 관련된 문제를 알고 있는가? 미지인 것을 살펴보아라! 그리고 친숙한 문제 중 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라.
  - ㉢ 문제를 달리 진술할 수 있을까? 좀 더 다르게 진술할 수 있을까? 정의로 되돌아가 보자.
  - ㉣ 관련된 문제로 전에 풀어 본 일이 있는 문제가 있구나. 그 결과를 활용할 수 있을까? 그 방법을 활용할 수 있을까? 어떤 보조 요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있을까?

④ 학생들이 다른 적절한 접촉점을 찾아보고 당면한 문제의 여러 측면을 조사해 보도록 안내한다. 이 때 문제를 변형하면 어떤 적절한 보조 문제가 될 수도 있다. 문제를 바꿔 보고, 변형시켜 보고, 수정해 보도록 한다. 이 때, 일반화 · 특수화 · 유추의 사용 · 조건의 일부를 떼어내기 등을 사용할 수 있다.

- 발문 ㉠ 문제를 달리 진술할 수 있는가?
  - ㉡ 만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어 보아라.
  - ㉢ 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 보다 특수한 문제는? 유사한 문제는?
  - ㉣ 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버려보아라. 그랬을 때 미지인 것은 어느 정도까지 정해지는가?
  - ㉤ 자료로부터 무언가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까? 미지인 것을 결정하는데 적절한 다른 자료를 생각해 볼 수 있을까?
  - ㉥ 새로운 미지인 것과 새로운 자료가 보다 더 가깝게 되도록 하기 위해서 미지인 것이나 자료 또는 필요하다면 두 가지 다 변형할 수 있을까?

⑤ 학생들이 주어진 문제를 해결하기 위해 노력하는 동안 원래의 문제를 잊지 않도록 주의를 준다.

- 발문 ㉠ 자료는 모두 활용했는가? 조건을 모두 활용했는가?

⑥ 학생이 자신이 세운 계획을 실행할 때까지 잊어버리지 않도록 해야 한다. 따라서 교사의 권위에 의해 문제 풀이의 계획을 세우기보다 교사의 도움을 좀 받아서라도 스스로 연구하여 만족스럽게 최종적인 아이디어를 생각해 낼 수 있도록 해야 한다.

3) 계획 실행

① 계획을 실행하는데 가장 중요한 것은 인내심이다.

② 문제의 계획을 완벽하게 실행할 때까지 학생이 자신이 세운 계획을 잊어버리지 않도록 해야 한다.

- 발문 ㉠ 매 단계를 점검해야 한다.

③ 학생이 각 단계의 정확성을 진정으로 납득하도록 한다.

- 발문 ㉠ 그 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가?

4) 반성

① 완성된 풀이를 검토하고 그 결과와 그 결과에 이르게 된 과정을 재고하고 재검사함으로써, 획득한 지식을 견고하게 하고 문제를 해결하는 능력을 발달시킬 수 있다.

② 학생이 계획을 실행할 때 매 단계를 점검하면서 풀이를 기술하였을지라도 오류는 항상 있을 수 있음을 인식시키고 검증을 하도록 안내한다.

- 발문 ㉠ 결과를 점검할 수 있는가? 논증 과정을 점검할 수 있는가?

③ 문제를 해결했다는 확신을 갖게 하기 위해 결과를 이끌 다른 방법을 찾아보도록 한다.

- 발문 ㉠ 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? 그것을 한눈에 알 수 있는가?

④ 교사는 학생들이 사용한 절차를 재차 활용하거나 획득한 결과를 적용할 수 있는 경우를 상상해 보도록 격려해 주어야 한다.

- 발문 ㉠ 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?

⑤ 학생들이 정직하게 노력해 왔으며 지금까지 잘해 왔다는 의식을 가지고 있으면, 풀이를 검토하는 것이 참으로 흥미 있음을 알게 될 것이다. 풀이를 검토하게 되면 그 밖의 어떤 것이 있을지 열심히 살펴볼 것이며 다음번에도 어떻게 하면 마찬가지로 잘할 수 있을 것인가를 열심히 알아보고자 할 것이다.

⑥ 반성 단계는 모든 문제해결 단계 중에서 가장 중요하다.

㉠ 풀이과정과 결과를 개관하고 음미해 봄으로써 오류를 발견 · 수정하고 문제풀이를 개선 할 수 있다.

㉡ 다른 문제와의 관련성을 조사하고 적용가능성을 생각해 보는 가운데 획득한 지식이 견고히 된다.

㉢ 풀이과정이 단순화, 체계화되므로 그 내적 바탕이 인식되고 사고 양식화되어 문제를 해결하는 능력이 발달된다.

㉣ 공식의 세부적인 의미를 점검해봄으로써 공식의 의미를 '한 눈에' 알 수 있게 된다.

(예) 사다리꼴의 넓이 구하는 공식 $S=\frac{(a+b)h}{2}$를 다음과 같이 해석

ⓐ $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$; 평행사변형과 직사각형 나아가 정사각형의 넓이를 구하는 공식으로 변형

ⓑ $S=\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot h$; 삼각형의 넓이 구하는 공식으로 변형

(예) 등차수열 n의 합의 공식 $1+2+3+\cdot\cdot\cdot+n=\frac{n(n+1)}{2}$를 다음과 같이 해석

ⓐ $n(n+1)\div 2$ ⓑ $(n+1)\cdot\frac{n}{2}$ ⓒ $\frac{n+1}{2}\cdot n$

(예) 이차방정식의 '근의 공식'을 여러 측면에서 해석

ⓐ 대수적 조작으로 항상 풀이가 가능하다.

ⓑ 모든 이차방정식은 복소수의 범위에서 항상 근을 갖는다.

ⓒ 판별식이 0인 경우 근이 중복된 것이므로 근은 항상 2개이다.

ⓓ 이차방정식의 한 근이 복소수이면 나머지 근은 그 켤레 복소수이다.

⑦ 반성은 자신의 사고 과정을 대상으로 하는 인식활동이라는 점에서 메타인지(meta−cognition)적인 사고라고 할 수 있다.

㉠ 메타인지는 자신의 사고 과정에 대한 인지로서, 자신의 사고 과정을 모니터하거나 조절하는 정신적 활동이다.

㉡ 문제해결 과정에서 수행하는 모든 활동을 모니터하고 조절해야 하므로 메타인지는 문제해결의 4단계에 모두 영향을 미친다. 그러나 메타인지와 가장 밀접하게 관련 있는 단계는 반성단계이다. 즉 반성단계에서 이루어지는 '결과와 풀이과정의 점검', '다양한 방법의 모색', '다른 문제에의 일반화', '우아한 해법의 추구' 등은 대표적인 메타인지 활동이다.

[참고] 문제해결 4단계에 대한 폴리아의 조언

: 학생이 예외적으로 번쩍하는 좋은 생각이 떠올라서 준비 단계를 모두 뛰어 넘어 불쑥 해답을 말하게 되는 경우도 있을 수는 있다. 물론 그러한 행운은 매우 바람직하지만, 학생이 아무런 좋은 생각도 없이 이 네 가지 단계 중 어느 것을 빠뜨린다면 매우 바람직스럽지 못하고 불행한 결과가 될 것이다. 가장 최악의 경우는 학생이 문제를 '이해' 하지도 않고, 곧바로 계산이나 작도에 착수하는 일이다. 주된 관련성을 이해하지 않거나, 그 어떤 '계획'도 세우지 않고 세부적인 것을 실행하는 것은 일반적으로 무의미하다. 계획을 실행하면서 매 단계를 점검한다면 많은 오류를 방지할 수 있다. 완성된 풀이를 다시 살펴보고 재검토하지 않게 되면 최상의 효과가 다소 상실될 것이다.

5.2. 문제해결 과정 4단계 적용

[문제] 가로, 세로, 높이가 주어진 직육면체의 대각선을 구하시오.

1) 문제 이해

① 학생들은 피타고라스의 정리와 평면기하에서의 몇 가지 응용문제에 친숙해져 있어야 한다.

② 교사는 문제를 구체적으로 제시함으로써 이 문제를 흥미롭게 만들 수 있다. 예를 들어, 교실의 가로, 세로, 높이를 이용하여 몸짓으로 대각선을 가리키고 칠판에 그림을 그린다.

교사의 발문	학생(들)의 대답
미지인 것은 무엇인가?	직육면체의 대각선의 길이입니다.
자료는 무엇인가?	직육면체의 가로, 세로, 높이입니다.
적절한 기호를 붙여라. 미지인 것을 어떤 문자로 나타낼 것인가?	x입니다.
가로, 세로, 높이는 어떤 문자로 나타낼까?	a, b, c로 나타내지요.
a, b, c와 x를 연결하는 조건은 무엇인가?	x는 가로, 세로, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체의 대각선입니다.
이 문제는 바른 문제인가? 즉 조건은 미지인 것을 결정하기에 충분한가?	네, 그렇습니다. a, b, c를 알면 직육면체를 아는 것입니다. 직육면체가 결정되면, 대각선이 결정됩니다.

③ 위의 대화에서 학생(들)은 문제를 겨우 이해하였고, 문제에 대해 약간의 관심을 보이게 되었다.

2) 계획 작성

① 학생들이 문제를 어느 정도 이해하여야 하는데, 그래도 적극성을 보이지 않는 것 같다면 교사는 학생들과의 문답식 대화를 조심스럽게 다시 시작해야만 한다. 교사는 학생들이 대답이 없을 때, 발문을 약간 수정하여 반복할 준비가 되어 있어야 한다.

② 때때로 당황스러울 정도로 학생들이 침묵할 때에도 교사는 그에 대처할 준비가 되어 있어야 한다.

교사의 발문	학생(들)의 대답
관련된 문제를 알고 있는가?	……
미지인 것을 살펴보아라. 미지인 것이 같은 다른 문제를 알고 있는가?	……
자, 미지인 것은 무엇인가?	직육면체의 대각선입니다.
미지인 것이 같은 다른 문제를 알고 있는가?	아니오, 우리는 아직 직육면체의 대각선에 관한 문제를 풀어 본 적이 없습니다.
미지인 것이 유사한 다른 문제를 알고 있는가?	……
대각선은 선분, 곧 직선의 한 토막이라는 것을 알고 있겠지? 미지인 것이 선분의 길이인 문제를 한 번도 풀어 본 적이 없는가?	물론, 그러한 문제는 풀어 보았습니다. 예를 들면, 직각삼각형의 빗변을 구하는 문제 등입니다.
좋아! 이 문제와 관련된 문제로 전에 풀어 본 적이 있는 문제가 있구나. 그것을 활용할 수 있을까?	……
다행히 여러분은 현재의 문제와 관련된 전에 풀어본 적이 있는 문제를 기억해 낼 수 있었다. 그것을 활용하고 싶은가? 어떤 보조 요소를 도입하면 그것을 활용할 수 있을까?	……
이 그림을 보아라. 여러분이 기억해 낸 문제는 삼각형에 관한 것이었다. 여러분이 그린 그림에 삼각형이 들어 있는가?	……
그림에서 삼각형을 찾아보고자 하는가?	……
그림에서 어떤 종류의 삼각형을 찾으려고 하는가?	……
대각선은 아직 구할 수가 없다. 그러나 여러분은 삼각형의 변은 구할 수가 있다고 말하였다. 이제 여러분은 어떻게 할 것인가?	……
대각선이 삼각형의 한 변이라면, 그것을 구할 수가 있겠는가?	……
내가 보기엔 그 삼각형을 그린 것은 좋은 생각이다. 이제 삼각형을 찾았다. 그러나 미지인 것은 어떤 것인가?	미지인 것은 직각삼각형의 빗변입니다. 피타고라스의 정리를 사용하면 그것을 계산할 수 있습니다.
그것은 다른 두 변의 길이를 알고 있으면 구할 수 있다. 그러나 그것들을 알고 있는가?	한 변은 주어졌습니다. 그것은 c입니다. 그리고 다른 한 변은, 제 생각에, 어렵지 않게 찾을 것 같습니다. 네, 다른 한 변은 또 다른 직각삼각형의 빗변입니다.
매우 훌륭하다! 이제, 여러분은 계획을 수립했다.	

그 결과 마침내 학생은 풀이에 대한 착상을 얻게 되었다. 학생은 빗변이 미지수 x이고 주어진 높이 c와 한 면의 대각선을 나머지 변으로 하는 직각삼각형을 생각한다.

③ 다른 접근 방법을 이용할 수도 있다. 예를 들어, 유추를 통해 해법의 아이디어에 접할 수도 있다.

교사의 발문	학생(들)의 대답
관련된 문제를 알고 있는가? 유사한 문제를 알고 있는가?	……
여러분이 알고 있듯이 제시된 문제는 입체기하의 문제이다. 평면기하에서 이와 유사한 보다 단순한 문제를 생각해 볼 수 있는가?	……
여러분이 알고 있듯이 제시된 문제는 공간에서의 도형에 관한 문제로 직육면체의 대각선에 관한 것이다. 평면에서 도형에 관한 이와 유사한 문제는 어떤 것인가? 그것은 확실히 대각선인데 – 직 …의 대각선과 관계되어야 할 것이다.	직사각형의 대각선과 관계됩니다.
관련된 문제로 전에 풀어본 일이 있는 문제가 있구나. 그것을 활용할 수 있을까?	
어떤 보조 요소를 도입하면 이를 활용할 수 있나?	

3) 계획 실행

① 학생은 빗변이 미지수 x이고 주어진 높이 c와 한 면의 대각선을 나머지 변으로 하는 직각삼각형을 생각하였다. 아마도 학생에게 적절한 기호를 붙이도록 권고해야 할 것이다. 변의 길이가 각각 a, b인 옆면의 대각선으로 된 변을 y로 나타내도록 한다. 그렇게 함으로써 미지인 것이 y인 보조 문제를 도입하는 풀이에 대한 착상을 좀 더 명확하게 알 수 있게 된다.

② 마침내 두 직각삼각형으로부터 차례로

$$x^2 = y^2 + c^2 , \qquad y^2 = a^2 + b^2$$

을 얻게 되고 보조적인 미지수 y를 소거함으로써

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 , \qquad x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

을 얻게 된다.

③ 만일 학생이 문제해결의 세부적인 것을 바르게 실행한다면, '각 단계를 점검해야 한다'는 것을 지적해 줄 수 있다.

교사의 발문	학생(들)의 대답
각 변이 x, y, c인 삼각형은 직각삼각형임을 명확히 알 수 있는가?	네

4) 반성

① ‘결과를 점검할 수 있는가?’라는 질문에 학생들이 ‘네’라고 대답한다면 다음과 같은 여러 가지 질문을 제시할 수 있다.

㉠ 자료는 모두 활용했는가? 주어진 자료 a, b, c가 모두 대각선을 구하는 공식에 나타나 있는가?

㉡ 가로, 세로, 높이는 이 문제에서 같은 역할을 한다. 즉, 이 문제는 a, b, c에 대하여 대칭이다. 여러분이 구한 대각선의 식은 a, b, c에 대해 대칭인가? 그 공식을 a, b, c로 바꾸어도 변하지 않는가?

㉢ 이 문제는 입체기하에 대한 문제이다. 곧 a, b, c를 주어진 세 모서리로 하는 직육면체의 대각선을 구하는 문제이다. 이 문제는 평면기하의 문제, 즉 주어진 a, b를 두 변으로 하는 직사각형의 대각선을 구하는 문제와 유사하다. 우리가 다루고 있는 ‘입체기하’ 문제의 결과는 ‘평면기하’의 문제와 유사한가?

㉣ 만약, 높이 c가 줄어들어 마지막에 0이 되면 직육면체는 직사각형이 된다. 대각선의 공식에서 $c=0$으로 놓이면 직사각형의 대각선을 구하는 올바른 공식이 얻어지는가?

㉤ 높이 c가 늘어나면 대각선도 늘어난다. 방금 구한 공식은 이 점을 나타내고 있는가?

㉥ 직육면체의 세 모서리 a, b, c가 같은 비율로 늘어나면 대각선도 또한 같은 비율로 늘어난다. 방금 구한 공식에서 a, b, c를 각각 $12a$, $12b$, $12c$로 대치하면 대각선의 식도 12가 되어야 한다. 실제로 그러한가?

㉦ a, b, c가 ft 단위로 측정되면 위의 공식은 역시 ft 단위로 측정된 대각선을 나타낸다. 그러나 모든 단위를 inch로 바꾸어도 역시 공식은 변함없이 성립해야 한다. 실제로 그러한가?

② 반성에서 보인 다양한 질문을 통해 이제부터 학생들은 여러 가지 경험적 증거를 통해(많은 검증을 통해) 공식이 주의 깊게 이끌어내졌기 때문에 틀림없는 것이라는 그 확신이 증대됨을 느끼게 된다. 또한 공식의 세부적인 것이 새로운 의미를 가지게 되며 여러 가지 사실과 연결되게 됨을 알게 된다. 따라서 공식은 보다 기억되기 쉬워지며 학생이 얻은 지식은 견고하게 된다.

③ 유사한 문제로 용이하게 전이될 수 있다. 유사한 문제를 몇 가지 경험한 다음에 바탕에 놓여 있는 일반적인 아이디어, 곧 모든 적절한 자료의 사용, 자료의 변경, 대칭성, 유추 등의 아이디어를 감지하게 될 것이다. 학생이 이와 같은 점에 주의를 집중하는 습관을 가지게 되면 그의 문제해결력은 명백히 향상될 것이다.

④ 어려운 문제나 중요한 문제인 경우 '논증 과정을 점검할 수 있는가?'라는 질문을 통해 논증 과정을 한 단계 한 단계 재점검하도록 지도한다. 보통의 경우는 "까다로운" 점만을 골라 재점검하면 충분하다.

(예) 세 변이 x, y, c인 삼각형은 직각삼각형임을 증명할 수 있는가?

⑤ 본 문제와 관련된 몇 가지 보기를 교사와 학생이 다루게 되면, 본질적으로 문제의 추상적인 요소에 구체적인 해석을 가하는 응용문제를 학생들이 쉽게 찾게 되며, 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있게 된다.

㉠ 교실을 예로 들어 구체적인 해석을 하여라.

㉡ 직육면체의 가로, 세로, 높이가 주어졌을 때 한 꼭짓점에서 중심까지의 거리를 구하여라. (문제의 결과를 이용하여 해결할 수도 있고, 적절한 직각삼각형을 도입하여 문제해결에 쓰인 방법을 이용할 수도 있음)

㉢ 직육면체의 네 개의 대각선의 배치와 직육면체의 6개의 면을 밑면으로 하고, 중심이 공통 꼭짓점이고 대각선의 반이 측면의 모서리인 6개의 사각뿔에 대해 논의해보아라.

㉣ 길이가 12야드, 너비가 16야드인 직사각형 모양의 빌딩 옥상 한가운데에 높이가 8야드인 깃대를 세우고자 한다. 이 깃대를 지탱시키기 위해서는 길이가 같은 네 개의 철사줄이 필요하다. 각 철사줄이 깃대의 꼭대기로부터 2야드 아래에 해당되는 부분에서 시작하여 옥상의 네 구석에서 끝나게 하려고 한다. 각 철사줄의 길이는 얼마인가?

㉤ 직육면체의 가로, 세로, 높이가 주어졌을 때, 외접하는 구의 반지름을 구하여라.

㉥ 밑면은 직사각형이고 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 그 중심에 오는 사각뿔이 있다. 높이와 밑면의 각 변이 주어졌을 때, 옆모서리의 길이를 구하여라.

㉦ 공간에 있는 두 점의 직교좌표 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)가 주어졌을 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

⑥ 문제해결 뒤 다른 방법으로 새로운 문제를 이끌어 낼 수 있다.

㉠ 일반화하기: 대각선 한 끝점에서 나온 세 모서리와 이들이 이루는 각이 주어졌을 때, 직육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

㉡ 특수화하기: 한 변이 주어진 정육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

㉢ 유추하기: 모서리의 길이가 주어진 정팔면체의 대각선의 길이를 구하여라/ 모서리의 길이가 주어진 정사면체에 외접하는 구의 반지름을 구하여라/ (구면으로 생각한) 지구 표면상의 두 점의 지리학적인 좌표, 곧 위도와 경도가 주어졌을 때 그 두 점 사이의 구면 거리를 구하여라.

⑦ 교사나 학생 스스로에 의해 제시된 문제로부터, 그 문제의 요소 중 어떤 것을 변수로 봄

으로써 새로운 문제를 이끌어 낼 수 있다.

㉠ 모서리의 길이가 주어진 정육면체에 외접하는 구의 반지름을 구하여라.

㉡ 정육면체 및 그것과 구의 공통 중심이 고정되어 있다고 보고 구의 반지름이 변한다고 하자. 이 반지름이 작으면 구는 정육면체에 포함된다. 반지름이 커짐에 따라 구는 (팽창되고 있는 고무공처럼) 커진다. 어느 순간에, 구는 정육면체의 면과 접하며 조금 후에는 모서리를, 좀 더 후에는 꼭짓점을 지나게 된다. 이 중요한 세 순간에 반지름은 어떤 값을 가지리라고 생각되는가?

⑧ 문제해결자의 전형적인 사고 조작을 유발하는 적절한 질문과 권고의 목록을 소유하고 그것을 '적절히' 사용하여야 하며, 초보자는 질문과 권고에 따라 사고하려고 노력하면서 성공과 실패를 통해 그 진정한 의미를 배울 수 있어야 한다. 단, 교사의 발문은 다음 사항에 근거하여 활용되어야 한다.

㉠ 교사의 초기 발문이나 권고는 간단하고 자연스럽고 일반적이어야 하며 그 목록은 짧은 것이어야 한다. 그리고 학생들의 마음속에 어떤 반응을 일으킬 수 있을 때까지 점차적으로 특수하고 구체적인 발문이나 권고를 해 내려가야 한다.

㉡ 몇 명의 소수 학생을 대상으로 하는 발문이나 권고보다는 함께 생각하고 고민하여 답할 수 있는 발문이나 권고를 한다.

㉢ '관련된 문제를 알고 있는가?'라는 발문대신 '피타고라스의 정리를 적용할 수 있는가?'라는 발문으로 학생들을 도와주고 싶을지 모르지만 이는 옳지 않다. 왜냐하면,

ⓐ 만약 학생이 제시된 문제를 거의 해결할 단계에 와 있다면 이 발문에 함의된 암시를 이해할 수도 있다. 그러나 그렇지 못한 경우라면 이 발문이 무엇을 이끌어내고자 하는지를 전혀 알지 못하여 학생들에게 혼란을 줄 수 있다.

ⓑ 만약 학생이 이 권고를 이해한다고 해도, 문제를 해결하기 위해 학생 스스로 발견해야 하는 비밀을 다 포함하고 있어 학생들이 해야 할 것을 거의 남겨 놓지 않은 상태이다.

ⓒ 이 권고는 당면한 문제만을 해결할 수 있는 특수한 것이므로 학생들이 당면한 문제를 해결하는 데 이용할 수 있다 해도 미래의 문제를 해결하는 데는 거의 도움을 주는 바가 없다.

ⓓ 만약 학생이 이 권고를 이해하였다고 하더라도, 교사가 그와 같은 발문을 하고자 한 생각에 어떻게 도달하게 되었는지를 거의 이해할 수 없으므로 결국 학생 스스로 문제해결에 필요한 질문을 할 수 없게 되고 수학 문제해결이 마치 마술인 양 느껴질 것이다.

5.3. 수학교육과 폴리아의 문제해결 교육론과의 관계

① 수학교육의 주요 목적은 수학적으로 사고하는 능력과 문제해결능력을 개발하는 것이다.

② 수학 학습-지도의 원리는 활동적 학습의 원리, 최선의 동기 유발의 원리 그리고 비약 없는 단계의 원리이다.

㉠ 학습하는 최선의 길은 스스로 발견해내는 것이다.

㉡ 효과적인 학습을 위해 학습자에게 가능한 한 생각할 시간을 충분히 주어 학습자 스스로 발견하도록 하며 이를 돕는 질문과 권고를 통해 산파역을 해야 한다.

㉢ 교사는 모든 비밀을 단번에 누설하지 말고 말하기 전에 추측해 보게 한다.

㉣ 학생들로 하여금 질문하게 하고 대답하게 한다. 아무튼 아무도 묻지 않은 질문에 답하는 것은 피하라.

㉤ 학생의 경험과 관련이 있고 학생에게 의미가 있도록 문제를 선정하고 제시함으로써 학습내용 자체에 대한 지적 호기심을 갖게 하고, 학습 그 자체에서 오는 기쁨과 발견의 희열을 경험하도록 한다.

㉥ 결과를 추측하게 하고 발표하게 하는 것은 학습동기를 유발하고 지속시키는 한 가지 방법이 될 수 있을 것이다.

㉦ 적절한 문제를 선택하도록 노력하고 문제의 제기에 학습자를 참여시키도록 하며, 또한 결과를 추측하고 발표하게 함으로써 학습동기를 유발하고 지속시킬 뿐만 아니라 바람직한 과학적 사고태도를 갖도록 교육한다.

③ 학습은 행동과 지각으로 시작하여 용어와 개념이 형성되고 바람직한 정신적인 태도를 갖게 된다.

④ 효과적인 수학 학습과정은 "탐구 단계 → 형식화 단계 → 동화 단계"로 이루어져야 한다.

㉠ 탐구 단계[55] - 행동과 지각을 통해 직관과 발견이 이루어지는 단계

㉡ 형식화 단계 - 개념, 용어, 정의, 증명이 도입되는 단계

㉢ 동화 단계 - 교재의 내적인 바탕이 인식되어 정신적으로 소화되고 학습자의 정신적인 안목으로 흡수되어 적용과 보다 높은 일반화가 가능해지는 단계

⑤ 학생들에게 제시되는 교과서적인 판에 박힌 문제는 탐구 단계와 동화 단계가 생략되어 있어 주변 세계 및 다른 지식과 관련지을 기회가 빠져있다. 따라서 학생들에게 도전적인 문제를 제공하여 문제를 해결하기 전에 예비적인 탐구 기회를 주고 풀이가 완성되었을 때에 반성적 논의 시간을 주는 것이 필요하다.

---

55) 효과적인 수학 학습을 위해서는 탐구단계가 언어화와 개념형성 단계에 선행하여야 하며, 결국 학습된 자료는 정신적 태도에 합체되어야 한다.

6. 문제해결의 여러 가지 동향

6.1. 문제 제기

1) 수학 문제해결 교육과 문제제기의 위치

① 수학교육은 많은 학생들이 수학을 이해하도록 안내하는 것과 더불어, 과학적 사고방법 이용하기, 수학하는 활동에 친숙하게 하기, 독립적인 창조적 활동과 만들어지고 있는 수학을 맛볼 수 있는 기회 주기 등을 포함하여야 한다.

② 수학교사는 학생들 수준에 맞고 흥미로운 적절한 문제를 선택하여 적절한 방법으로 제시하고 조심성 있고 적절히 도와줌으로써 학생들에게 독자적인 수학적 탐구활동에 가까운 경험을 제공해야 한다. 그러나 문제해결 교육에서는 주어진 문제만을 다룰 것이 아니라 이를 발전적으로 취급하여 새로운 문제를 제기하는 과정을 함께 다루어야 한다.

③ 학생들은 '혼자 고안한' 문제를 풀어보는 수학적인 사고경험을 가져야하며, 어떤 문제를 푸는 데 성공하고 나면 반드시 반성단계에서 미지인 것과 자료, 조건의 역할을 바꾸거나 일반화, 특수화, 유추 등을 통해 또는 응용상황을 고려하여 발전적으로 새로운 문제를 찾아 해결해 보아야 한다.

④ 수학적 지식을 학생 스스로 구성해가도록 해야 한다는 '구성주의 학습 원리'나 수학은 추측과 반박을 통한 발명의 과정임을 강조하는 '준-경험주의 수리철학관'에 따라 학생들은 문제제기를 꾸준히 경험해야 한다.

2) 문제제기의 중요성

① 탐구 지향적인 학습 태도를 길러 준다. 즉, 문제를 제기하는 것은 수학을 창조하는 결정적인 사고단계이며 문제를 제기하고 형식화하는 데 학생들이 직접 참여함으로써 바람직한 과학적 태도를 기르게 된다.

② 문제제기는 문제를 해결하는 수단이 될 수 있다. 즉, 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 제기함으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 원래의 문제를 해결할 수 있는 단서가 생기게 된다.

③ 창의적 능력이나 특별한 수학적 능력의 발현에 도움을 준다. 즉, 새로운 문제를 만들어 봄으로써 원래의 문제를 이전과는 전혀 다른 새로운 관점에서 볼 수 있어 그 의미를 보다 명확하게 이해할 수 있을 뿐 아니라 그로부터 새로운 생각을 하게 된다.

④ 학생들의 수학에 대한 이해 정도를 파악할 수 있는 수단이 된다.

⑤ 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 이용할 수 있는 기회를 제공한다.
⑥ 학력 수준이 낮은 학생들에게도 의미 있는 수학 학습 활동을 제공한다.
⑦ 수학에 대한 긍정적인 성향을 함양시키는 수단이 된다.

3) 문제제기 활용의 예

> 좋은 문제란 주변 세계나 다른 사고분야와 관련된 풍부한 배경을 가진 문제이며, 관련된 여러 가지 문제를 암시하는 문제이다.

① 등주 문제(둘레의 길이가 일정한 평면도형 가운데 넓이가 최대인 도형 구하기)의 예

[교과서 문제] 둘레의 길이가 100m인 평면도형 중 넓이가 최대인 도형의 넓이를 구하여라.

[문제제기로 수정된 문제] 전설적인 미국 서부개척 시대는 땅은 풍부하지만 그 밖의 모든 물자는 매우 부족하던 시절이었다. 당시에 서부로 이주한 한 농부는 매우 넓은 초원을 소유하고 있었지만, 가축을 가둘 울타리를 칠 철망은 100m 밖에 가지고 있지 않았다. 그는 여러 가지 모양을 생각하고 울타리를 두른 땅의 넓이가 몇 ㎡가 될지를 생각하였다. 넓이를 가장 크게 하려고 할 때 여러분이라면 어떤 모양을 택하겠는가?

[학생들의 반응] 정사각형, 가로 세로의 길이가 30m, 20m인 직사각형, 정삼각형, 직각이등변 삼각형, 원 등을 제시한다.

[교사의 제안] 가로 세로의 길이가 40m, 10m인 직사각형, 변의 길이가 42m, 29m, 29m인 이등변삼각형, 변의 길이가 42m, 13m, 32m, 13m인 등변사다리꼴, 정육각형, 반원 등을 고려해 볼 것을 제안한다.

[교사의 과제 제공]

㉠ 넓이가 가장 큰 것과 가장 작은 것을 추측해보아라.

㉡ 넓이를 계산하여 순서대로 나열해보아라.

[학생들의 과제해결]

원 ; 796	정삼각형 ; 481
정육각형 ; 722	등변사다리꼴 42, 13, 32, 13 ; 444
정사각형 ; 625	직각이등변삼각형 ; 430
직사각형 30, 20 ; 600	이등변삼각형 42, 29, 29 ; 420
반원 ; 594	직사각형 40, 10 ; 400

[교사의 유도질문] 나열된 도형과 그 넓이에 주목하고 관찰을 통해 의견을 개진하도록 조심스럽게 유도 질문을 한다.

㉠ 원, 삼각형, 사각형에 주목하여라.

㉡ 삼각형은 한 변이 퇴화된 사각형으로 볼 수 있다.

[학생들의 추측]

둘레가 같은 평면도형 가운데 원은 최대의 넓이를 갖는다.

둘레의 길이가 같은 사각형 가운데 정사각형은 최대의 넓이를 갖는다.

둘레의 길이가 같은 삼각형 가운데 정삼각형은 최대의 넓이를 갖는다.

둘레의 길이가 같은 n각형 가운데 정 n각형은 가장 큰 넓이를 갖는다.

둘레의 길이가 같은 정다각형 가운데 변의 수가 더 많은 다각형의 넓이가 더 크다.

곧, 다각형이 원과 닮을수록 그 넓이가 더 크다.[56)]

② Heron 공식(변의 길이가 a, b, c 인 삼각형의 넓이구하기)

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

㉠ 귀납적 방법으로 증명하기

· 정삼각형($a = b = c$)인 경우 성립하는지 확인하기

· 직각삼각형($a^2 = b^2 + c^2$)인 경우 성립하는지 확인하기

· 이등변삼각형($b = c$)인 경우 성립하는지 확인하기

· 삼각형이 퇴화하여 선분이 된 경우 $s = a(= b = c)$

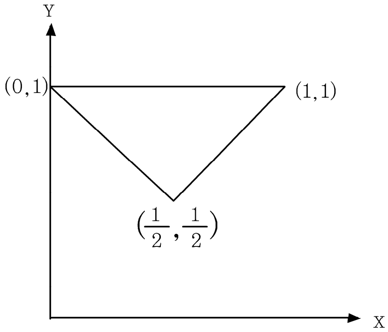
⇒ 어떤 삼각형의 경우에도 헤론의 공식이 성립한다고 강하게 주장할 수 있다.

㉡ 해석기하학적인 방법으로 좌표 평면에 나타냄으로써 문제를 증명하기

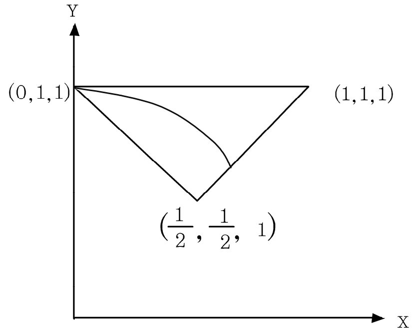
: 삼각형의 세 변의 길이를 $x,\ y,\ z$라고 하고 $0 < x \le y \le z$라고 하자. 삼각형의 모양에만 관심이 있으므로 $z = 1$이라고 가정한다. 그러면 부등식 $x \le y,\ y \le 1,\ x + y > 1$을 얻는다. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ 1$인 삼각형 $(x,\ y,\ 1)$을 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$로 나타내면, 위의 부등식이 나타내는 그림은 (한 변을 제외한) 삼각형 영역이며, 이 영역은 모든 삼각형의 모양 전체를 나타낸다.

56) 이 문제는 둘레의 길이가 일정한 평면도형 가운데 넓이가 최대인 도형을 구하는 등주문제로, 그리스 시대부터 연구된 'Dido 문제' 라고 불리는 유명한 문제이다. 이를 증명한 것은 20세기에 들어와 Schwarz에 의해서이다.

〈$(x,\ y)$로 나타낸 그림〉



〈$(x,\ y,\ 1)$로 나타낸 그림〉



· 정삼각형 $(1,\ 1,\ 1)$은 점 $(1,1)$으로 나타내어진다.

· 직각삼각형 $(x,\ y,\ 1)$은 $x^2+y^2=1$이므로 삼각형 영역 내의 단위원으로 나타내어진다.

· 이등변삼각형은 긴 변이 같은 경우는 $y=1$, 짧은 변이 같은 경우는 $x=y$이므로 삼각형의 두 변으로 나타내어진다.

· 선분으로 퇴화된 삼각형은 $x+y=1$인 경우로 이는 삼각형의 다른 변을 나타낸다.

⇒ Heron의 공식이 삼각형의 경계와 내부의 원호에서 입증되었으므로 나머지 모든 경우에도 성립할 것이라 강하게 주장할 수 있다.

4) 브라운과 월터(Brown& Walter, 1983)의 'What-If-Not' 문제제기 전략

① 'What-if-not(만일 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가)' 전략 단계

㉠ 속성 열거하기: 문제를 구성하고 있는 요소나 속성을 모두 열거하기

㉡ 'What-if-not' 수행하기(속성 부정하기): 전 단계에서 열거한 속성에 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가'라는 의문을 가져보기

㉢ 문제제기 하기: 전 단계에서 생각한 의문을 기초로 새로운 문제 만들기

㉣ 설정된 문제 분석하기: 새로 만든 문제를 분석하거나 해 구하기

② 'What-if-not' 전략 적용: Pythagoras 정리

㉠ 직각삼각형의 각 변에 세운 도형이 '정사각형'이 아니라면 어떻게 될까?

⇒ 각 변에 세운 도형이 반원, 닮은 직각삼각형, 닮은 다각형, 일반적인 닮은 도형일 경우에도 성립함을 보임으로써 Pythagoras 정리를 일반화한다.

㉡ '직각삼각형'이 아닌 경우에는 어떻게 될까?

⇒ 제2코사인 법칙($c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$)으로 일반화한다.

㉢ a, b, c가 특수한 경우의 자연수라면 어떻게 될 것인가?

⇒ Pythagoras 수(예를 들어, m^2-n^2, $2mn$, m^2+n^2)를 구하는 문제가 된다.

㉣ 만약 '제곱'이 아니라면 어떻게 될 것인가?

⇒ 'n이 3 이상인 자연수일 때 $x^n+y^n=z^n$인 양의 정수해는 없다'는 'Fermat의 마지막 정리'를 소개할 수 있다.

6.2. 수학적 모델링

1) 수학적 모델

① 모델이란 다른 어떤 것을 나타내는 데 사용되는 대상이나 개념으로 현실을 이해할 수 있는 형식으로 축소시킨 것이다.

② 수학적 모델이란 수학적 대상(집합, 수, 도형, 함수 등)과 이들 대상을 연관 짓는 표현(방정식, 부등식, 그래프, 변환, 도표 등)이다.

2) 수학적 모델링의 정의와 특징

① 수학적 모델링이란 수학적 모델을 구성하여 실 상황 문제를 해결하는 전체 과정이다.

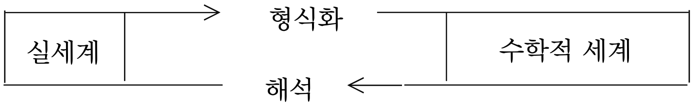
② 수학적 모델링은 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 하므로 일반적인 문제해결과 다르다.

③ 수학적 모델링은 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악하고 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 돕는 활동 과정이다.

④ 수학적 모델링에서 '수학화 활동' 즉, 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 활동, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 조정하는 수학적 구조나 이론을 세우는 활동, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하고 번안하는 활동 등이 중요하다.

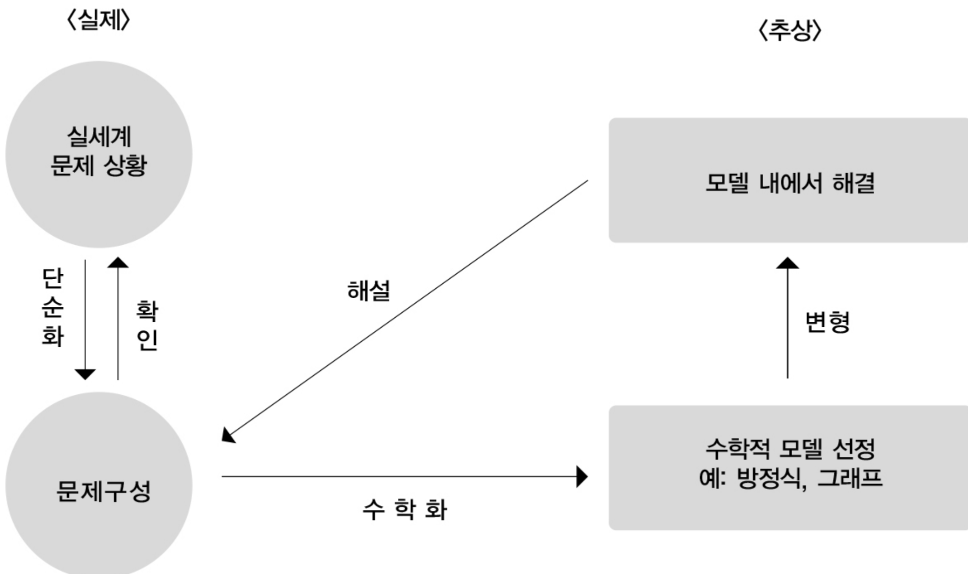
3) 수학적 모델링 과정

① Burghes(1986)의 수학적 모델링 과정: 가장 간단한 모델링 과정



왼쪽 사각형은 비수학적 상황의 문제가 일상 언어로 제시된 실세계를 표현한다. 그 문제를 적절히 표현할 수 있는 중요한 인자를 선택하고, 문제의 특징을 나타내는 변수 사이의 관계를 설정함으로써 문제가 수학적 형태로 바뀐다.

② NCTM이 제시한 모델링 과정



[1단계] 실세계 상황에서 문제 구성(단순화/형식화)

: 실세계의 (어떤 현상을 관찰하여 그 현상에서 나타나는) 문제 상황을 파악하고, 그 문제에 영향을 주는 중요한 요인들을 이해한다.

[2단계] 수학적 모델 설정(수학화)

: 요인들의 관계를 추측하고, 그 관계들을 수학적으로 해석하여 그 현상에 대한 수학적 모델을 세운다.

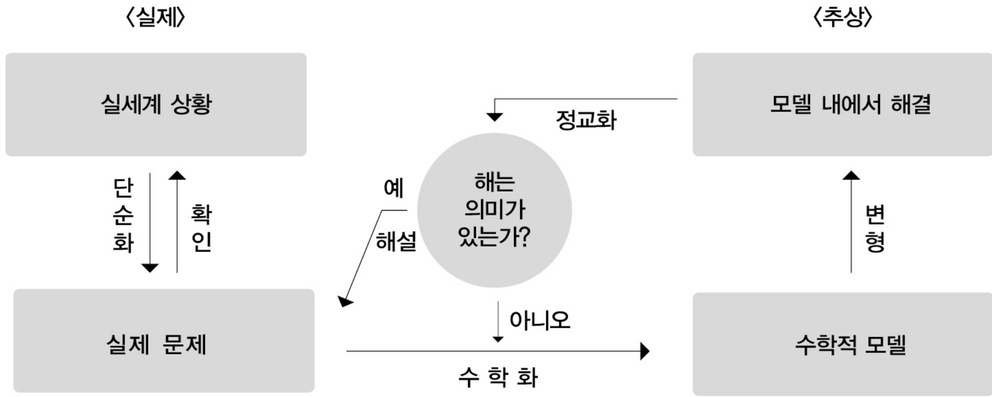
[3단계] 모델 내에서 수학적 결과 및 해 도출(변환/분석)

: 그 모델 내에서 수학적으로 문제를 분석하여 결과를 얻는다.

[4단계] 결론 추측 및 판단 (타당화/적용)

: 본 현상의 상황에 비추어 수학적 결과를 재해석함으로써 최종 결론을 얻는다.

③ 강옥기(2011)의 수학적 모델링 과정



[1단계] 단순화: 실세계 문제 상황으로부터 변화의 요인들을 관찰하고 자료를 수집하여 실제적인 문제를 구성한다.

[2단계] 수학화: 실제적 문제를 수학적 문제 즉 수학적 모델로 변환한다. 이 때 문제에 영향을 주는 가정을 구체적으로 설정한다.

[3단계] 변형&문제해결: 수학적 모델을 변형하여 그 해를 구한다.

[4단계] 정교화: 수학적 모델에서 얻어진 해가 실제 문제에 의미가 있는지 조사해 보고 의미가 만족할 정도가 아니면 수학적 모델 단계로 돌아가서 문제 상황이나 가정 등을 고려하여 정교화 된 새로운 수학적 모델을 구성한다. 의미 있는 해가 나올 때까지 이 과정을 순환한다.

[5단계] 해설: 수학적 해가 의미가 있으면 실제 문제의 해로 해설한다.

[6단계] 적용: 만들어진 수학적 모델을 실세계의 유사한 상황에 적용한다.

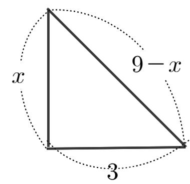
4) 수학적 모델링 활용

- 1단계: 실세계 문제 상황 설정(단순화/형식화)

바람이 강하게 부는 어느 날 곧게 뻗어 있는 대나무가 부러졌다. 이 대나무는 높이가 9m 이고 부러진 끝이 밑둥치로부터 3m 떨어진 곳에 닿았다. 이 때 대나무는 몇 m 높이에서 부러졌는가?

- 2단계: 수학적 모델 설정(수학화)

높이를 x라 놓으면, 다음과 같이 직각삼각형의 그림으로 나타낼 수 있다.



◉ 3단계: 수학적 결과(분석)

직각삼각형의 높이 x를 구하기 위해 피타고라스의 정리를 이용한다. 즉,

$$(9-x)^2 = x^2+9$$
$$81-18x+x^2 = x^2+9$$
$$18x = 72$$
$$x = 4$$

따라서 직각삼각형의 높이 $x=4$이다.

◉ 4단계: 결론, 예측(판단)(적용/타당화)

대나무는 4m 높이에서 부러졌다.

5) 수학적 모델링을 교육과정에 도입해야 하는 이유

① 실세계 상황 및 타교과의 문제를 수학적 모델링 과정으로 해결해보는 경험을 통해, 수학이 실세계 및 타교과에 유용함을 알게 된다.

② 수학적 모델링은 어떠한 수학적 모델을 선정하였느냐에 따라 그 풀이과정과 답이 다양하므로, 수학이 절대적 진리의 모임이고 천재들에 의해 발견된 학문이라는 잘못된 관념을 제거하고 수학에 대한 인식을 새롭게 할 수 있다.

③ 문제를 해결하기 위해 적절한 수학적 모델을 선정하고 자신이 선택한 수학적 모델을 이용해 책임감 있게 모델링 과정을 거치는 경험을 통해, 스스로 판단하고 인식하고 이해하고 분석하고 평가하는 등의 비판적 능력이 신장된다.

④ 수학적 모델링은 실세계 상황과 수학적 상황을 모두 포함하므로, 수학적 능력보다 좀 더 일반적인 능력과 태도들을 개발하는 기회가 된다.

⑤ 현실 상황 속의 문제를 해결하기 위해 수학적 모델링을 활용함으로써, 수학이 자신의 현재, 미래의 삶에 관련성을 갖고 있지 않는다고 인식하는 학생들에게 수학적 활동이 가치 있는 것임을 확신시키는 기회가 된다.

⑥ 수학이 사회에서 광범위하게 사용되고, 그 이용이 점점 빈번해지고 있다. 그러므로 미래 사회의 주역이 되는 학생들이 현재와 미래에서 개인적으로 또는 한 시민으로서 응용과 모델링을 실행할 수 있도록 교육함으로써, 민주 시민으로서의 자질을 향상시킬 수 있다.

[요약] 수학적 모델링 과정을 통하여 학생들은
① 새로운 수학적 개념과 방법을 이해할 수 있다.
② 실생활 또는 다른 교과에서 수학이 응용됨을 알고 그 필요성을 인식하게 된다.
③ 창의적 사고와 문제해결 태도, 활동 및 능력이 신장된다.
④ 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기를 수 있다.
⑤ 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해하게 된다.

6.3. 사고패턴

Polya: 주어진 문제를 끈기 있게 자력으로 해결하려는 정직한 노력을 하고 풀이과정을 반성하여 사고 패턴을 확인하고 이를 활용해 나아가는 여유 있는 건전한 사고 태도가 가장 중요하다.

1) 귀납적(recursive) 패턴

① 어떤 값을 구하려할 때, 선행항의 값을 구한 뒤 귀납적으로 구하려는 값까지 반복 계산하여 결론을 얻어내는 방법이다.

(예) 자연수의 거듭제곱($\sum_{k=1}^{n} 1 = n,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$)으로부터 $\sum_{k=1}^{n} k^2$ 유도

(예) 수열의 귀납적 정의[57)]

② '귀납적 패턴'은 컴퓨터 프로그래밍에서 반복 계산법에 대한 처리과정으로 유용하게 이용되고 있다.

2) 결합하기(Superposition) 패턴(특히, 일차결합(linear combination) 패턴)

(예) 두 직선 $l_1 : ax+by+c=0, l_2 : a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선

$\Rightarrow l_1 + kl_2 = 0$

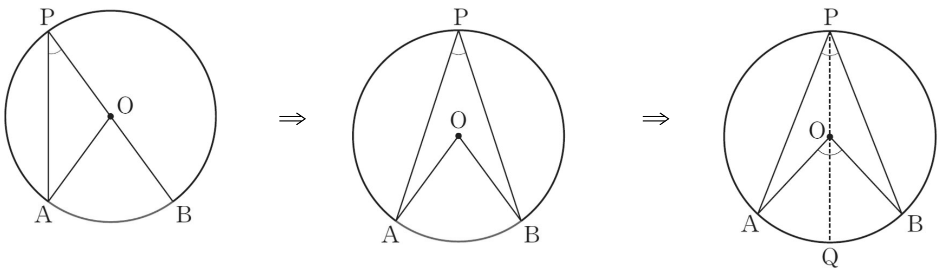
57) 귀납적 패턴의 전형적인 예임

(예)두 원 $O_1 : x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 의 교점을 지나는 원
$O_2 : x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$

$\Rightarrow O_1+kO_2=0$

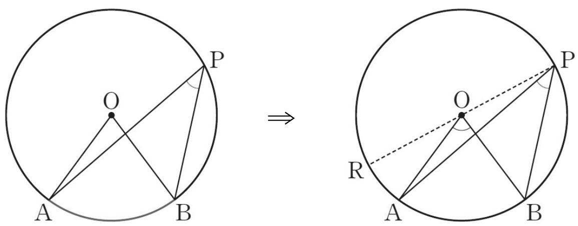
(예) 중심각과 원주각 사이의 관계

❶ ∠APB의 변 위에 중심 O가 있는 경우 ❷ ∠APB 안에 중심 O가 있는 경우



⇘

❸ ∠APB 밖에 중심 O가 있는 경우



⇒ 먼저 주역이 되는 특수한 경우(leading particular case)를 해결한 다음, 그러한 특수한 경우의 해의 일차결합(linear combination)으로 일반적인 해를 얻는 사고 패턴이다.

3) 대칭성 고려하기 패턴

(1) 대칭성과 수학

① 정다각형이 아름다운 것은 자기 대칭인 도형 곧, 자기 도형 아래에서 불변인 도형이기 때문이다.

② Euclid 공간은 합동변환이라는 자기동형 아래에서 불변인 공간이다.

③ 각 복소수에 그 공액복소수를 대응시키는 복소수체의 자기동형은 합과 곱을 보존하므로 모든 대수적 관계를 보존한다. 즉, 복소수 체계는 자기 대칭인 체계이다.

④ 무작위 추출, 이를테면 제비뽑기에서 카드를 치거나 섞는 것은 카드의 모든 치환 아래에서 곧 대칭군 아래에서 사건의 확률이 불변이라는 것을 의미한다.

(2) Pierre Curie의 법칙 "원인 가운데의 대칭성은 결과에도 보존된다."

: 문제를 해결하고자 할 때 자료나 조건의 대칭성에 주목하고 결과를 점검할 때에도 대칭성에 주목하는 사고 전략이다.

(예) $x+y, xy, x+y+z, xy+yz+zx, xyz$ 등과 같이 포함된 문자를 서로 바꾸어도 원래의 식과 같은 식이 될 때 그러한 식을 대칭식이라고 하는데, 대칭식을 인수분해하면 역시 대칭식이 된다.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=$

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=$

$a^3+b^3=$

$a^3+b^3+c^3-3abc=$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ =

(예) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근과 계수와의 관계

(예) 대칭식인 방정식 $2x^3-7x^2y-7xy^2+2y^3=0$에서 (a, b)가 해이면 (b, a)도 해가 된다.

(3) 이유 불충분의 원리(the principle of insufficient reason)

: "구별할 충분한 이유가 없을 때에는 구별할 수 없다."는 것을 의미한다.

(예) "$x+y=1,\ x>0,\ y>0$ 일 때 xy의 최댓값을 구하라."

x, y는 대칭적이므로, xy의 값은 x가 1/2이 아닌 0이나 1에 더 가까운 값을 가질 때 최댓값을 취할 이유가 없다. 따라서 xy는 x=y=1/2일 때 최댓값 1/4이 된다.

(cf) 풀이
x=1/2+e라고 놓으면 y=1/2−e이고 xy=( )( )이므로 xy는 e=0일 때 곧 x=y=1/2일 때 최댓값을 가진다.

(예) 라플라스의 고전적 확률의 배경 '동가능성의 원리'

: 라플라스는 처음으로 확률에 대한 명확한 정의를 내렸는데, 그것이 확률의 고전적 정의이다. 단 라플라스의 정의에는 개개의 경우가 일어날 가능성이 같다는 가정이 암묵적으로 전제되어 있다. 라플라스는 이 가정을 합리화하기 위해 '이유 불충분의 원리'를 도입하였는데 이는 "구별되어야 할 충분한 이유가 없다면 구별을 지을 수 없다"는 것이다. 곧, 주사위를 던질 때나 동전을 던질 때와 같이 어떤 경우가 일어날 가능성이 더 많다고 믿을 이유가 없다면 개개의 경우가 일어날 가능성이 같다고 가정해야 한다는 것이다.

4) 최대 · 최소 문제 패턴

① 음이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 부등식

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (단, } a=b\text{일 때 등호 성립)}$$

이 성립하는데, 이는 합이 일정한 두 수의 곱의 최댓값을 구하는 문제와 직각을 낀 두 변의 합이 일정할 때 넓이가 최대인 직각삼각형을 구하는 문제가 내포되어있다.

(증명1)

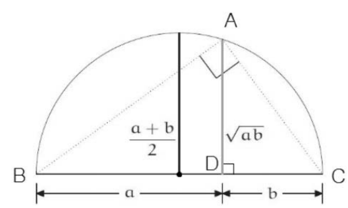
좌변에서 우변을 빼면

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0$$

이므로 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$이다. 그리고 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

(증명2)

· 빨간선
: 원의 반지름
· 파란선
: △ABD는 △CAD와 닮음이므로
BD : DA = AD : DC
이고 정리하면 AD= $\sqrt{ab}$



② 임의의 음이 아닌 실수 $x_1, \cdots, x_n$에 대하여 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$이 성립한다.

'겉넓이가 같은 직육면체 가운데 부피가 가장 큰 것은 정육면체임을 증명'하여라.

[증명] a, b, c를 각각 직육면체의 가로, 세로, 높이라고 하면 그 부피의 겉넓이는 각각

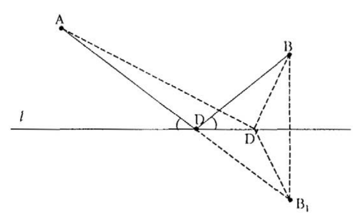
$$V=abc, \quad S=2(ab+bc+ca)$$

이다. S가 고정된다는 것은 ab, bc, ca의 합이 고정됨을 의미한다. 따라서

$$(ab\times bc\times ca)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{ab+bc+ca}{3}, \ (V^2)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{S}{6}$$

이므로 $(V)\leq\left(\frac{S}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$이다. 여기서 등호는 ab=bc=ca일 때 성립하므로 부피는 a=b=c일 때 곧 정육면체일 때 최대가 된다.

③ 1세기경 그리스 수학자 Heron의 초등기하 문제 "평면 위에서 직선 l의 같은 쪽에 두 점 A, B가 주어져 있을 때 A, B로부터의 거리의 합이 최소가 되도록 직선 l 위에 한 점 D를 잡아라."



④ 등주문제

㉠ 둘레의 길이가 주어진 평면 도형 가운데 넓이가 최대인 도형을 구하는 문제이다.

㉡ 2천 5백년전 고대 그리스에서 연구된 가장 오랜 역사를 가진 최대 최소 문제이다.

⇒ 둘레의 길이가 같은 모든 삼각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 정삼각형이며, 둘레의 길이가 같은 직사각형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 정사각형이다. 둘레의 길이가 같은 정다각형 가운데에서는 변의 수가 많은 정다각형일수록 그 넓이가 더 넓으며, 둘레의 길이가 같은 평면 도형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 원이다.

6.4. 메타인지와 문제해결

1) 메타인지

① 수학 문제를 풀다보면 자신의 예측과 풀이가 다르게 진행되는 것 같다거나 어렵다고 느껴 다시 처음부터 천천히 생각하거나 문제해결 과정 중 잘못된 부분이 있는지를 확인하는 경험이 있을 것이다. 이와 같이 '처음부터 다시 한 번 천천히 풀어보자', '문제해결 과정에서 어디가 잘못인지 점검해 보자' 등과 같은 경험을 통해 '잘못된 부분을 찾아 옳게 고치기'라던가 '이해할 수 없었던 부분을 이해할 수 있게 된 경우'를 우리는 '메타인지적 경험을 하였다'고 한다.

② '메타인지'는 자신의 인지과정을 대상으로 인지하는 행위로 '인지에 관한 인지', '사고에 관한 사고(thinking about thinking)', '지식에 관한 지식' 등으로 정의하고 있다. 다시 말해 메타인지는 인지, 사고, 지식에 대한 또 다른 수준의 인지, 사고, 지식인 것이다.

메타인지 = 자신의 인지, 사고, 지식을 점검하고, 제어하는 심적 과정
= 반영적 추상화 과정(Piaget)
= 반성적 지능(Skemp)

③ Schoenfeld(1987)는 메타인지를 'ⓐ 자신의 사고 과정에 대한 지식[58] ⓑ 조종(control) 또는 자동조절(Regulation)[59] ⓒ 신념과 직관'에 관한 범주의 지적 행동이라 하였다.

---

58) 자신의 사고과정을 묘사할 수 있는 능력, 메타기억(자신의 기억에 대해 서술할 수 있는 능력)
: 훌륭한 문제해결자는 자신이 알고 있는 것을 효과적으로 사용하며 자신의 사고 과정을 반성하고 그 반성이 얼마나 정확한지 안다.

59) 해답에 대해 성급하게 시도하기 전에 문제가 무엇에 관한 것인지를 자기 자신이 바르게 이해하고 있는지 확인, 계획하기, 감시하기, 문제를 풀 때 자료를 할당하고, 무엇을 할 것인가를 결정하고 그에 따른 시간을 결정하기

④ 메타인지의 개념은 크게 메타인지적 지식, 메타인지적 기능, 그리고 메타인지적 경험으로 나뉜다. 그 중 메타인지적 기능이 인지작용을 직접적으로 조정하는 것으로 감시(monitor), 평가(evaluation), 제어(control)에 관한 메타기능을 포함한다.

㉠ 감시에 관한 메타기능

인지작용의 진행 상태를 직접적으로 확인하는 기능으로 메타인지적 지식에 비추어 자신의 인지활동의 진행을 감시하는 기능이다.

(예) 전에 해 본 문제인가?, 지금까지의 과정 중 계산은 틀리지 않았는가?

㉡ 평가에 관한 메타기능

인지작용의 결과를 메타지식과 비교하여 직접적으로 평가하는 기능으로 자신의 인지활동 성과를 평가하는 기능이다.

(예) 이 답은 문제의 뜻에 맞는 것 같다.

㉢ 제어에 관한 메타기능

평가에 기초하여 인지작용을 직접적으로 제어하는 기능으로 자기의 인지활동에 지시를 하고 그 후의 활동을 속행, 수정하는 기능이다.

(예) 해 본대로 해라, 답을 확인해 보자 등

2) 수학 문제해결에서 메타인지의 역할

(1) 문제해결과 메타인지

① 1980년 Silver(1980)의 [메타인지: 문제해결에서 잊은 것은?]이라는 논제에서 '메타인지'라는 용어가 수학교육 연구에 처음으로 소개되었다. 이 때 Silver의 연구는 Polya가 수학자로서 내성법에 기초하여 나타낸 수학의 '발견법'을 당시 심리학으로 발전시켜 메타인지 연구의 입장을 살펴보고 문제해결 지도에 힘 있는 방향을 제시했으며 Silver는 아동들 자신의 문제해결과정에 있어 의논 등을 중심으로 한 지도에 의해 '발견법'을 문제해결을 위한 '메타인지적 조언'으로 활성화시키는 가능성을 탐색하였다.

② Schoenfeld는 수학자와 대학생의 수학에 대한 성공과 실패에 결정적인 요인은 '자신이 행하고 있는 것이 무엇인가를 자각한 것'과 '자신의 행동을 어떻게 조정할 것인가' 하는 '메타수준'의 활동의 유무임을 알아내었다.

③ 학생들에게 문제해결에 대한 자신의 행위를 책임지도록 하기 위해 학생 그 자신들의 사고 과정을 검색하고 조정하는 메타인지적 습관을 개발하도록 해야 한다. 특히 교사의 안내 없이도 적절한 사고 활동을 통해 문제를 해결할 수 있어야 한다.

④ 복잡한 문제해결과 관련된 사람의 행위는 유용한 인지자원(알고리즘, 발견, 사실, 인지구조 등)에 의해서가 아니라 자원을 어떻게 선택하고 제어하고 평가하는가에 대한 스스로의 메타인지적 메커니즘에 의한 것이다. 문제에 직면했을 때, 해결자는 해결을 도와주는 다양한 인지 전략을 선택하여 사용하게 되며 이러한 결정은 결국 메타인지가 하는 것이다. 이러한 활동의 결과는 문제 정보가 기호화되는 방법과 다른 정보가 기억에서 상기되는 방법에 커다란 영향을 주게 된다.

(2) 메타인지로서의 수학적인 태도

① 스스로 자신의 문제나 목적 · 내용을 명확히 파악하려는 태도

② 합리적인 행동을 하려는 태도

③ 내용을 간결 · 명확하게 나타내려는 태도

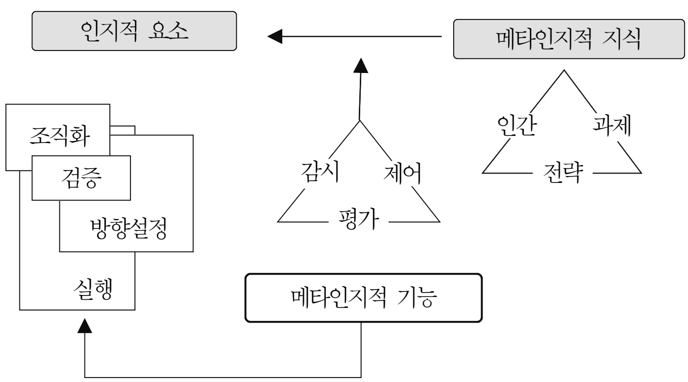
④ 보다 나은 것을 구하려는 태도

· 자신의 사고 경로를 모니터 (monitor) · 사고 과정을 평가	➡	변화가 필요한 부분 판단	➡	판단에 따른 행동 진행(제어)

∴ 자신의 사고과정에 대한 의식적인 모니터 작업과 평가

(3) 문제해결과 메타인지와의 관계

문제해결은 다양한 인지적 지식과 기능을 요구하는 복합적인 과제라 할 수 있다. 이에 성공적인 문제해결을 위해서는 다양한 영역의 수학적 지식은 물론 자신이 소유하고 있는 수학적 지식을 이용하여 문제해결의 과정을 계획, 감시, 제어, 평가하는 등의 메타인지적 기능이 필요하다.



① 문제해결과 관련된 메타인지능력 계발을 위한 질문
㉠ 문제를 이해하기 위해 무엇을 하였는가?
㉡ 필요하지 않은 조건이나 정보를 찾았는가?
㉢ 무엇을 하기 위해 어떻게 결정했는가?
㉣ 문제를 푼 뒤에 네가 구한 정답에 대해 생각해 보았는가?
㉤ 너는 네가 구한 답이 옳다고 어떻게 단정했는가?
② 문제해결 과정에서의 메타인지 활동
㉠ 문제를 풀기 전의 활동: 문제를 풀기 전에 너는 무엇을 해야 하는가?
· 문제를 한 번 이상 읽어 본다.
· 그 문제에 관해서 자신이 구할 수 있는 것 모든 것을 구해 본다.
· 스스로에게 “문제가 무엇을 요구하는지 알고 있는지?”에 대해 질문해 본다.
· 문제를 푸는데 어떤 정보가 필요한지 생각한다.
· 스스로에게 “이 문제와 같은 문제를 풀어 본 적이 있는가?”에 대해 물어본다.
· 스스로에게 “주어진 정보가 문제해결에 필요한 것인가?”에 대해서 생각해 본다.
㉡ 문제를 푸는 동안의 활동: 당신이 문제를 풀 때 무엇을 해야 하는가?
· 풀고 있는 문제를 올바르게 풀고 있는지 수시로 점검해 본다.
· 풀이를 멈추고 자신이 무엇을 하고 있는지, 왜 그렇게 하는지 다시 생각해 본다.
· 계단을 한 칸씩 오르듯이 문제를 차근차근 풀면서, 푸는 과정에서 오류가 없는지를 살핀다.
· 다시 시작해서 다른 방법으로 풀어 본다.
· 스스로에게 “내가 하고 있는 것이 바른 것인가?”를 생각해 본다.
㉢ 문제를 푼 후의 활동: 문제를 풀고 난 뒤에 무엇을 해야 하는가?
· 효율적이고 합리적인 전략을 이용하여 풀었는지 점검한다.
· 내 계산이 모두 맞는지 알아보기 위해 풀이과정을 점검한다.
· 그 문제를 다시 읽어보고, 구한 답이 타당한지 확인한다.
· 이 문제를 풀 수 있는 또 다른 방법은 없는지를 생각한다.
· 문제가 요구하는 것 이외에 더 많이 알 수 있는지 살펴본다.

3) 메타인지를 활용한 수학 수업

학생들의 메타인지적 지식과 기능의 개발과 활용은 보다 성공적인 문제해결을 위해 필수적이다.

(1) 교사의 역할

① 교사는 학생들이 자신의 수학적 지식과 행동을 곰곰이 생각하고 분석하며 보고하도록 요구하는 질문을 하고 과제를 내야 한다.

② 교사는 수행과 관계있는 수학 과제의 여러 측면을 지적하도록 노력해야 한다.

③ 교사가 가르치면서 조절하고 결정하는 행동을 보여줌으로써 학생이 자신의 행동을 조절하는 법을 배우도록 도와야 한다.

(2) 메타인지 개발과 증진을 위한 교수 · 학습 방법

수학 교수 · 학습 활동은 교사와 학생 사이의 상호작용을 통해 이루어지는 바, 교사의 지식과 신념이 학생들의 문제해결에 많은 영향을 끼치게 되므로 교사는 수학 수업을 통해 학생들에게 메타인지의 활성화가 일어나도록 적절한 발문을 하고 상호작용을 통해 교사의 메타인지적 기술이 학생들에게 전이되도록 수업을 조직해야 할 것이다. 교사는 학생을 가르치는 내용뿐 아니라 자신의 태도, 신념, 그리고 수학적 이해의 과정도 함께 전해주어 교사의 메타인지를 보여주어야 한다.

① 학습자에게 효율적으로 문제해결 과정을 훈련시키기 위해서는 교사가 문제해결 과정을 하나의 역할 모델로 보여주고 내면화가 일어나도록 상호작용 교수 · 학습을 한다.

② 문제 해결자 자신의 사고 과정을 반성하는 능력을 기르기 위해 다른 학생의 문제해결과정을 비디오를 통해 보여주고 분석해 보고 유추하여 자기반성의 기회를 갖도록 한다.

③ 자신의 사고를 제어하거나 비판하는 능력을 기르도록 하기 위해 학급전체의 토의과정을 부여하거나 또는 소집단으로 문제를 해결하는 과정에서 의사소통에 의한 협조 체계를 통해 메타인지가 자연스럽게 습관화되도록 한다.

④ 메타인지는 학습자 자신이 스스로 그들의 지식을 구성하기 위한 수단으로 자리 매김할 수 있도록 해야 하며, 메타인지는 넓게 해석하면 자기반성 또는 반영적 추상화와 같은 맥락으로 볼 수 있다.

7. 문제해결력 신장을 위한 수업 환경

1980년대 이후 세계적으로 주목받고 있는 수학교육의 목표인 '문제해결력의 신장'은 더 이상 총론 차원의 교육목표가 아닌 실제적인 학교수학의 초점이 되고 있다. 만약 학생들의 문제해결능력을 신장시키고자 한다면 무엇보다 교사들의 문제해결능력이 신장되고 교사 자신이 성공적인 문제해결 경험을 가져야 할 것이다. 교사들 자신이 좋은 문제해결자가 아니면서 학생들에게 문제해결을 지도하는 것은 불가능하기 때문이다. 교사들은 "문제해결이 강조되게 된 배경, 문제해결에서 사용되는 주요요소, 문제해결을 신장시키는 수업 환경을 어떻게 구축할 것인가?" 등에 정통해 있어야 한다. 즉, 문제해결에서 가장 중요한 요소는 교사인 것이다. 교사 자신이 먼저 문제해결에 대한 바람직한 태도를 지녀야 하며 교사는 학생들이 해결할 만한 문제를 모으고, 문제를 변형하고, 이를 부단하게 풀어 보고, 학생들이 어려움에 부딪혔을 때 어떤 발문을 던져야 할까를 끊임없이 고민해 보아야 한다.

7.1. 문제해결력

1) 여러 심리학에서 해석한 문제해결

① 연합주의: 문제해결은 기존의 반응경향의 시행착오적 적용이다.

② 형태심리학: 문제해결은 문제상황의 요소들을 새로운 방식으로 재구성하는 일이다. 그리고 문제해결과정을 이끌어가는 능력은 통찰력이다.

③ 행동주의: 문제해결은 강화에 의해 학습된다.

④ 인지주의: 문제해결은 지적 도식이나 인지구조의 재구조화를 통한 인지과제의 해결이다.

⑤ Gagné(1977): 문제해결은 이미 배운 원리를 응용하며 여러 가지 새로운 상황에서 당면하는 문제들에 대한 해결방안을 발견하는 것이다.

⑥ Ausubel(1976): 문제해결이란 이전에 배운 규칙을 조합하는 방식을 발견하고 새로운 상황에 적용하는 것을 배우는 과정이다.

⑦ Krulik & Rudnik(1987): 문제해결은 하나의 과정이며, 개인이 이미 배운 지식이나 기능, 이해 등을 친숙하지 않은 상황의 요구를 충족시키기 위해서 사용하는 수단이다.

⑧ Hayes(1989): 문제해결이란 알고 있는 것과 알기를 원하는 것과의 차이를 줄이기 위하여 가장 적절한 방법을 찾는 것이다.

2) 문제해결력의 본질(Gagné)

문제해결력이란?
① 문제를 해결하기 위해 적용하는 문제 이해능력
② 주어진 조건과 구하려는 것 사이의 관계 파악 후 해결 계획을 수립하는 능력
③ 연산능력, 검증능력, 일반화능력
④ 수학의 개념 · 원리 · 법칙을 발견, 이를 이용하여 응용문제를 창의적으로 해결하는 능력

① 문제해결력의 기반이 되는 능력 요인은 지적기능과 인지전략이다.
㉠ 지적기능이란 상징적 기호를 이용하여 문제해결의 절차를 실행할 수 있도록 장기기억에 저장된 능력을 말한다. 규칙들이나 원리들을 적용하며 문제를 해결해가는 일련의 절차와 관련된 '방법적 지식 또는 절차적 지식'의 소유를 의미한다.
㉡ 인지전략은 학습자의 두뇌 속에 조직된 통제과정으로서 학습방법, 사고방법 등과 같이 학생 스스로 개발해 낸 사고 전략을 의미한다. 학습자가 다양한 지적기능을 많이 학습하든가 또는 생산적 사고의 개발을 위한 연습의 기회를 많이 받아야 획득할 수 있게 된다.
② 문제해결력은 지적기능 중 가장 상위차원의 능력요인으로 개념학습과 원리학습이 이루어진 다음에야 문제해결력의 학습이 가능하다.
③ 문제해결력이란 이미 배운 원리를 응용하여 여러 가지의 새로운 상황에서 직면하게 되는 문제들에 대한 해결책을 발견해 내는 능력을 말한다. 다시 말해, 새로운 원리를 형성하기 위해서 기존의 원리를 조합하여 문제해결의 아이디어를 찾아내는 것을 의미한다. 즉, 문제해결에 필요한 고차원적 규칙이나 원리를 발견하는 것을 뜻한다.
④ 문제해결학습을 '복합적 원리학습' 또는 '중다원리학습'이라고도 말한다.

예 밑변과 빗변의 길이가 주어진 직각삼각형이 있을 때, 넓이를 구하는 과제가 주어졌다고 생각하자. 이 때에는 삼각형의 넓이를 계산해 내는 일반원리(여기서는 흔히 말하는 공식을 지칭함)를 기억하고 있어야 할 뿐만 아니라 동시에 피타고라스 정리를 이용해서 직각삼각형의 높이를 구하는 원리도 알아야 한다. 또한 연산법칙도 알아야 하며 제곱근도 구할 수 있어야만 이러한 과제를 해결할 수 있다. 이처럼 여러 가지의 규칙과 원리들을 모두 알아야만 주어진 삼각형의 넓이 구하기 문제를 해결할 수 있다.

3) 문제해결력 강조 시기

① 1970년대 말, 1970년대 미국 수학교육의 기본 사조인 기본으로 돌아가기 운동의 결과에 대한 본격적인 논의가 시작되면서 수학교육자들은 일반적인 철학적 심리학적 논의보

다는 수학 교실에서 바로 적용될 수 있는 실제적인 틀을 찾고 있었다.

② 1980년대 이후의 수학교육자들은 일반적으로 수십 년 전 Polya(1945)가 작성한 4단계 접근방법을 문제해결과정의 기본으로 받아들였다(이해→계획 수립→실행→반성).

4) 우리나라 제6차 교육과정 이후 문제해결력 신장 방안의 변화

(1) 제6차 수학과 교육과정

문제해결력을 개발시키기 위하여 문제의 의식, 문제의 이해, 계획 수립, 계획 실행, 반성 등의 문제해결과정과 그림그리기, 예상과 확인, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화하기, 식 세우기, 논리적 추론, 반례 들기 등의 구체적인 해결 전략을 중요시한다.

(2) 제7차 수학과 교육과정

① 문제해결력을 신장시키기 위하여 문제해결 과정(문제의 이해→ 해결 계획 수립→계획 실행→반성)에서 구체적인 해결 전략(그림그리기, 예산과 확인, 표 만들기, 규칙성 찾기, 단순화하기, 식 세우기, 거꾸로 풀기, 논리적 추론, 반례 들기 등)을 적절히 사용하며, 문제해결의 결과뿐만 아니라 해결 과정과 그 방법도 중시하도록 한다.

② 습득된 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제를 발견하고, 문제해결을 위한 전략을 자주적으로 세워 이를 해결해 나갈 수 있도록 한다.

③ 문제해결은 전 영역에서 정형 문제 및 비정형 문제를 통하여 지속적으로 지도되어야 하며, 여기서 습득된 문제해결 전략이 실생활의 문제해결에 활용될 수 있도록 한다.

(3) 2007 개정 수학과 교육과정

① 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.

② 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.

③ 다양한 방법으로 문제를 창의적으로 해결할 수 있게 한다.

④ 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.

⑤ 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

(4) 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정

① 문제해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.

② 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.

③ 문제해결의 결과뿐만 아니라 문제해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.

④ 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

(5) 2015 개정 수학과 교육과정

① 문제를 해결할 때에는 문제를 이해하고 해결전략을 탐색하며 해결과정을 실행하고 검증 및 반성하는 단계를 거치도록 한다.

② 협력적 문제해결 과제에서는 균형 있는 책임 분담과 상호작용을 통해 동료들과 협력하여 문제를 해결하게 한다.

③ 수학적 모델링 능력을 신장하기 위해 생활 주변이나 사회 및 자연 현상 등 다양한 맥락에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고 이를 일반화하게 한다.

④ 문제해결력을 높이기 위해 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하고 그 과정을 검증하는 문제 만들기 활동을 장려한다.

7.2. 문제해결 수업의 목표

① 문제해결과정을 이해하는 능력을 기른다.

㉠ 문제 내에 있는 질문을 이해하고 필요한 경우 적절한 발문을 제기하는 능력

㉡ 문제에 있는 조건이나 변인을 이해하는 능력

㉢ 문제를 해결하기 위해 필요한 자료나 정보를 선택하거나 찾을 수 있는 능력

㉣ 하위 문제(subproblem)를 제기하며 적절한 문제해결전략을 선택하는 능력

㉤ 문제해결전략을 올바르게 적용하여 문제를 푸는 능력

㉥ 정답을 문제 상황에 맞게 진술하는 능력

㉦ 정답의 합리성을 점검하는 능력

㉧ 결과를 증명하고 해석할 수 있는 능력

㉨ 해를 일반화할 수 있는 능력

② 문제해결과정에 대한 올바른 태도나 신념을 기른다.
  ㉠ 많은 문제는 다양한 풀이 방법이 존재한다는 믿음
  ㉡ 많은 문제는 답이 여러 개 존재할 수 있다는 믿음
  ㉢ 문제해결에 대한 첫 번째 시도를 실패한 경우 다른 방법을 강구하면 반드시 풀린다는 신념
③ 문제를 해결하는 동안의 사고 과정을 모니터하고 평가할 수 있는 능력을 기른다.
  문제를 푸는 동안 자신이 무엇을 하고, 무엇을 해야 하는가에 대한 반성과 그에 따른 적절한 처방을 내리는 능력을 기른다.
④ 협동 학습으로 문제를 푸는 능력을 기른다.
  ㉠ 동료들과 문제를 푸는 가운데 자신의 아이디어를 설득력 있게 설명하고, 다른 사람의 아이디어를 경청하고 절충하는 능력
  ㉡ 프로젝트를 공동으로 기획하고 해법을 찾는 능력

7.3. 문제해결력 신장을 위한 수업의 요소

1) 문제(problem) 상황: 문제해결에서 가장 중요한 요소

① 문제는 수학적 개념이나 기능을 복합적으로 이용할 수 있는 것이어야 한다.
② 문제는 일반화로 이끌 수 있는 것이어야 한다.
③ 문제는 얼른 해답이 떠오르지 않는 것이어야 한다.
④ 문제는 다양한 해를 갖는 것이어야 한다.
⑤ 문제는 학생들에게 재미있고 도전할 만한 것이어야 한다.

2) 교사의 자세

① 문제의 이해단계에서 교사가 해야 할 일
  교사는 학생들에게 문제를 이해할 수 있도록 도와주기 위한 질문을 던져야 한다. 또한 교사는 학생들이 질문을 제기할 수 있도록 학습 분위기를 조성해야 한다. 그리고 교사는 학습자가 스스로 이해한 문제의 내용을 학생 자신의 말로 말해 보도록 한다. 그러면 결국 학생들은 문제에 직면했을 때 스스로 질문을 던질 수 있을 만큼 훈련이 된다.
[문제해결을 시작하는 단계에서의 교수활동]
  ㉠ 교사가 학생들에게 문제를 읽어 주거나 또는 학생들이 문제를 읽어 보도록 한다. 뿐만 아니라, 이해를 못한 단어나 문장에 대하여 토의한다.

㉡ 문제를 이해했는지에 관하여 교사는 학습 전체에서 토의한다.

② 계획의 설정단계에서 교사가 해야 할 일

이 단계에서 교사는 학생들에게 관련된 문제들이나 전에 사용했던 전략 등에 주의를 기울이도록 지도해야 한다. 또한 학생 각자가 사용했던 전략들을 동료 학생들이 같이 활용할 수 있도록 격려해 준다.

③ 계획의 실행단계에서 교사가 해야 할 일

학생들은 자신이 설정한 계획대로 문제를 해결하고자 노력하게 된다. 만약에 선택된 계획이 성공적이지 못할 때 교사는 학생들이 두 번째 단계에서 구안되었던 대안적 방법들을 시도해 보도록 한다. 그리고 학생들이 부정확하게 이해하고 있는 점을 발견하게 되면, 교사는 즉시 고쳐주도록 노력해야 한다.

[문제해결을 실행하는 단계에서의 교수활동]

㉢ 교사는 학생들의 문제해결과정이 어느 단계에 있는지를 관찰하고 질문을 제기한다.

㉣ 필요하다면 문제해결의 암시나 단서를 제공한다.

㉤ 문제해결 방안을 확장시켜 준다.

㉥ 학생들이 찾아낸 해답을 발표시킨다.

④ 검증의 단계에서 교사가 해야 할 일

이 단계는 문제해결과정에서 얻은 지식을 통합시키는 단계이다. 따라서 교사는 학생들에게 문제해결에 사용한 전략을 설명해 보도록 해야 한다. 그리고 여러 학생들이 사용했던 각기 다른 문제해결전략들을 발표시킴으로써 모든 학생들이 다양한 문제해결전략들을 동시에 학습할 수 있도록 해야 한다.

[문제해결을 완료한 단계에서의 교수활동]

㉦ 토론의 기초로서 기존의 문제해결전략들을 활용하면서 해답을 검토해 본다.

㉧ 지금 풀어 본 문제와 전의 문제를 관련시켜 보기도 하고, 문제를 확장시켜서 논의해본다.

㉨ 문제의 특성을 토론해 보기도 하고 도식화해보기도 한다.

7.4. 문제해결력 신장을 위한 수업 환경

(1) 좋은 문제 환경 제시

① 성공적인 문제해결 경험을 제공해 줄 수 있는 쉬운 문제에서부터 시작한다.

② 학생들이 문제해결에 호의적인 반응을 보일 수 있는 재미있는 문제를 제공해야 한다.

③ 학생 자신이 직접 문제를 만들어 동료들에게 풀어 보게 하는 활동을 강조한다.
④ 전략 게임을 도입하도록 한다.

(2) 문제해결 과정 강조

① 문제해결을 위한 수업에서 강조해야 할 과정들
㉠ 문제 내에 있는 발문을 이해하고 필요한 경우 적절한 발문을 제기하는 과정
㉡ 문제에 있는 조건이나 변인을 이해하는 과정
㉢ 문제를 해결하기 위해 필요한 자료나 정보를 선택하거나 찾는 과정
㉣ 하위 문제를 설정하며 적절한 문제해결 전략을 선택하는 과정
㉤ 문제해결 전략을 올바르게 적용하여 문제를 푸는 과정
㉥ 정답을 문제 상황에 맞게 진술하는 과정
㉦ 정답의 합리성을 점검하는 과정
㉧ 결과를 증명하고 해석하는 과정
㉨ 해를 일반화하는 과정
② 교사가 해야 할 교수학적 노력
㉠ 무엇보다 학생들이 직접 문제를 풀어 보는 활동이 강조되어야 한다. 발문을 하거나 학생들이 질문을 한 경우에도 직접 답이나 결정적인 힌트를 제시해서는 안 된다.
㉡ 학생들로 하여금 문제를 잘 읽고 문제에 제시되어 있는 조건을 모두 고려하도록 하며 필요 없는 조건은 없는지, 필요한 정보가 빠져 있지나 않는지 등을 살펴보도록 해야 한다.
㉢ 현재의 문제 풀이 방법이 어려움에 부딪쳤을 때 대안적인 방법을 찾는 활동을 강조해야 한다.
㉣ 컴퓨터 프로그래밍 활동을 권장한다. 이는 우리나라의 교육과정 상 당장 실천하기는 어렵겠지만, 프로그래밍 활동은 문제를 이해하고 계획을 세우며 실행하고 과정을 반성하게 하는데 있어 좋은 환경이 될 수 있다. 특히, 프로그래밍 과정에서 자연스럽게 제기되는 디버깅(debugging) 과정은 오류를 바람직한 교수학적 대상이 되게 한다.
㉤ 문제해결 수업의 초점은 지식과 기능을 종합하는 과정 자체에 한정시켜야 한다. 이를 위해서 문제해결 과정에서 새로운 수학 지식을 학습하는 것은 피해야 하며 복잡한 계산은 가능하면 계산기를 이용할 수 있도록 한다.
㉥ 문제를 풀고 답을 확인한 후에는 문제의 조건을 변화시켜 새로운 문제를 만들어 보는 활동을 하거나 다른 방법으로 문제를 풀어 보는 습관을 기르도록 한다.

(3) 사고 과정을 모니터링하는 초인지(meta-cognition)적 능력 강조

① 자신의 문제해결과정을 요약하여 기술하거나 말로 설명하도록 한다.
② 문제를 해결하는 동안의 자신의 사고과정을 모니터하고 평가할 수 있도록 하는데 역점을 두어야 한다.
③ 문제를 푸는 동안 자신이 무엇을 하고 있고, 무엇을 해야 하는가에 대한 반성과 거기에 따른 적절한 처방을 내리는 능력이 중요하다.
④ 문제해결의 각 단계에서 "왜 그와 같은 결정을 내렸는지"를 부단히 물어보도록 해야 한다.

(4) 협동적으로 사고하고 문제를 푸는 능력 강조

① 동료들과 문제를 푸는 가운데 자신의 아이디어를 설득력 있게 설명하고, 다른 사람의 아이디어를 경청하고 절충하는 능력을 길러 주어야 한다.
② 개인별로 문제를 푸는 활동뿐만 아니라 소집단별로 문제를 푸는 활동도 강조되어야 한다.

(5) 문제해결에 대한 올바른 신념 강조

① 수학 문제는 몇 분 안에 풀 수 있거나 몇 분의 노력으로 풀지 못하면 해결할 수 없다는 신념을 불식시킬 수 있는 탐구문제를 도입해야 한다.
② 많은 문제는 다양한 풀이 방법이 존재하거나 답이 여러 개 존재할 수도 있다는 믿음을 길러주어야 한다.
③ 문제해결에 대한 첫 번째 시도가 실패한 경우에도 다른 방법을 강구하면 반드시 풀 수 있다는 신념도 역시 중요하다. 이를 위해서는 단시간 내에 해결할 수 있는 문제뿐만 아니라 프로젝트와 같이 개인 또는 집단이 장시간에 걸쳐 해결하는 과제도 제시되어야 하며, 적절한 발문을 통해 학생들의 어려움을 해결해 줄 수 있도록 유도해야 한다.
④ 학생들의 아이디어에 대해 교사의 입장에서 면박을 주거나 무시하지 않도록 해야 한다.

7.5. 메타인지 체크리스트 활용

① 메타인지의 습관을 기르게 하는 한 방법으로서, 문제해결 활동이 끝난 직후 학생들에게 메타인지를 사용 하였는지, 어떤 메타인지를 사용 하였는지를 질문하고, 이 질문에 대한 학습 토론을 하게 하는 것은 매우 효과적이다.

② 문제해결이 끝난 후 메타인지를 얼마나 사용하였는지를 주기적으로 메타인지 체크리스트에 스스로 체크해 보게 하는 것이다. 월(Van De Walle, 1998)는 메타인지 체크리스트를 다음과 같이 제시하였다.

메타인지 항목	하지 않았다	한 것 같다	하였다
문제해결 전 문제를 시작하기 전, 당신은 무엇을 하였는가? 1. 문제를 두 번 이상 읽었다. 2. 그 문제에 관해 내가 할 수 있는 모든 것을 찾으려고 노력하였다. 3. 나는 다음을 자문하였다. “문제가 묻고 있는 것을 나는 진실로 이해하는가?” 4. 나는 이 문제의 해결에 필요한 정보를 생각하였다. 5. 나는 다음을 자문하였다. “이와 같은 문제를 이전에 풀어 본 경험이 있는가?” 6. 나는 자문하였다.“이 문제에 필요하지 않은 정보는 있는가?”			
문제해결 중 문제를 해결하는 동안, 당신은 무엇을 하였는가? 7. 내가 한 것에 대하여 반성해 보았다. 8. 내가 무엇을 하고 있는지, 왜 그렇게 하고 있는지를 생각해 보았다. 9. 내가 한 것을 그 순서에 따라 검토해 보았다. 10. 다른 방법으로 다시 시작하였다. 11. 다음과 같이 자문하였다. “내가 하고 있는 것이 답에 가까이 가고 있는가?”			
문제해결 후 문제해결을 끝낸 후, 당신은 무엇을 하였는가? 12. 모든 계산이 맞았는지를 확인하여 보았다. 13. 내가 해결한 것이 좋은 방법인지를 반성하여 보았다. 14. 내가 풀이한 답이 의미가 있는지 확인하기 위해 문제를 다시 보았다. 15. 그 문제의 다른 풀이 방법을 생각해 보았다. 16. 문제가 묻고 있는 것 이상을 찾을 수 있는지 알아보려고 노력하였다.			

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 수학과에서 의미하는 좋은 문제란?

: 좋은 수학 문제란 첫째, 문제 풀이과정에 여러 가지 수학적 개념이나 기능 등을 포함하고 있어야 하며, 둘째, 문제의 해결 과정이 일반화될 수 있는 것이어야 한다.

2. Polya의 문제해결 4단계와 발문은?

문제 이해	→	계획 작성	→	계획 실행	→	반성

㉠ 문제 이해 단계(understanding the problem): 문제를 이해하는 단계로 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 용어의 뜻을 파악하며, 문제를 분석하는 것이 이 단계에 해당한다.

· 미지인 것은 무엇인가? · 주어진 것은 무엇인가? · 자료는 무엇인가?
· 조건은 무엇인가? · 조건은 만족될 수 있는가?
· 조건은 미지의 것을 결정하기에 충분한가, 불충분한가, 과다한가?
· 그림을 그려보아라. · 적절한 기호를 붙여라.
· 조건을 여러 부분으로 분해해 보아라.

㉡ 문제해결 계획 수립 단계(devising a plan): 문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제해결 전략을 이용하게 된다.

· 전에 그 문제를 본 적이 있는가?· 관련된 문제를 알고 있는가?
· 도움이 될 것 같은 어떤 사실이나 정리를 알고 있는가?

㉢ 계획 실행 단계(carrying out the plan): 해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.

· 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라.
· 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가?
· 그것이 옳다는 것을 설명할 수 있는가?

㉣ 반성 단계(looking back): 문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지를 알아보고, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를

생각 해 본다.

· 결과를 점검할 수 있는가? · 풀이과정을 점검할 수 있는가?
· 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가?
· 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가?
· 관련된 문제를 만들 수 있는가?

3. 교사의 바람직한 발문은?

㉠ 학습자들의 학습의욕을 불러일으킬 수 있도록 학급 구성원 모두가 공통적으로 경험하는 것이나 생활 속에서 알고 있는 내용을 발문으로 제시하는 것이 좋다.

㉡ 너무 추상적이거나 막연한 발문은 피하고 직접적이지 않으면서 학생에게 방향을 스스로 떠올리도록 도울 수 있는 상황과 관련이 있는 발문을 해야 한다.

㉢ 묻는 발문에 대한 답이 바로 '예' 혹은 '아니오'로 나타나는 식의 단순한 기억 재생적 발문은 피하고, 가능한 한 학습자의 사고를 자극하는 개방적 발문을 하는 것이 좋다.

㉣ 발문을 한 다음에는 생각할 시간을 주어야 한다. 시간을 주면 학습자들이 질문을 분석하고 종합하는 수준이 향상되어 보다 길고 자세한 답을 할 수 있으며 학업성취가 향상된다.

4. 폴리아의 수학적 발견술을 참고한 라카토스의 논의란?

: 폴리아는 『Induction and Analogy in Mathematics』에서 문제제기 단계와 추측단계, 확인단계를 거쳐 완전히 논의를 마쳤다. 이에 반해, 라카토스는 폴리아가 논의를 마친 확인단계에서 시작하여 추측에 대한 반례를 찾거나 추측을 반박하고 비판적인 증명분석을 통해 추측을 개선하고 개념을 재구성하여야 한다고 논의하고 있다.

(예) 다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 수 사이의 관계

┌ 폴리아: 문제로부터 출발하여 추측을 하고 Cauchy의 증명법으로 확인을 한다.
└ 라카토스: 확인한 부분에 대한 논의로부터 시작하여 수학적 발견의 논리를 논한다.

5. 왈리스(Wallis)의 문제해결 4단계(또는 아다마르의 발견적 사고 과정 4단계)란?

: 푸앵카레가 제시한 무의식 단계를 부화기와 계시기로 구분하고 발견적 사고과정을 4단계로 구분하였다.

① 준비기 - 문제의 여러 가지 특징을 파악하고 표상 결합을 시도하는 단계, 이후 단계를 거치지 않고 이 단계에서 즉각적으로 문제가 해결되는 경우도 있지만, 해결되지 않을 경우에는 의식적 문제해결 활동은 결국 휴지기, 즉 부화기에 들어가게 된다.

② 부화기 - 무의식적 사고 활동이 이루어지는 단계, 지속 기간이 크게 다르다.
③ 계시기 - 아하! 경험(Aha-experience)과 같은 통찰을 한다.
④ 검증기 - 문제가 해결되는 시기다. 해결의 실마리를 확인하고 구체적이고 정확한 진술을 통해 이를 확인하게 된다.

6. 손펠드가 구분한 문제해결을 위한 기본 요소 4가지는?
: 문제해결 행동을 위한 기본 요소는 자원, 발견술, 통제 그리고 신념체계이다. 자원이란 특정 수학적 문제 상황과 관련지을 수 있는 지식이며, 발견술이란 효과적인 문제해결을 위한 경험적인 규칙이다. 통제란 문제해결 시도 중 자원을 선택하고 취급하고 처리하며 풀이를 계획하고 진행 중인 풀이를 점검하며 평가하는 등 문제해결을 위한 전반적인 결정하기이며, 신념체계란 개인의 수학적인 세계관이다.

7. 거꾸로 풀기전략이란?
: 문제의 목표나 증명해야 할 사실로부터 시작하여 무엇을 말할 수 있는가를 생각해 나가면서, 즉 결론으로부터 조건으로 거꾸로 생각해 나아감으로써 문제를 해결하는 전략이다.
7-1. 거꾸로 풀기전략이 필요한 때는?
㉠ 문제 상황의 마지막 결과가 알려져 있다.
㉡ 최초의 조건에서 문제해결로 가는 규칙이 알려져 있다.
㉢ 문제가 요구하는 것은 최초의 조건을 구하는 것이다.
7-2. 거꾸로 풀기전략을 활용할 때 교사는?
: "이러한 상황이 성립하려면 무엇이 성립하여야 하는가?", "이 단계 이전에는 어떻게 되는가?"와 같은 질문을 던져야 한다.

8. 수학적 모델링이란?
㉠ 실세계의 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 내재된 수학적 개념을 파악하고 문제를 해결하는 과정이다.
㉡ 수학적 모델이란 실세계 현상을 수학적 기호나 식, 간단한 문장, 표나 그래프, 수식, 다이어그램, 도형, 구체물, 은유, 시뮬레이션 도구 등으로 수학적 관행에 맞도록 구안된 표현 체계를 의미한다.
㉢ 수학적 모델링 과정을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는데 유용하여 중요한 수학적 아이디어와 문제해결 과정에 강

력한 수단이 된다.
- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해한다.

9. 문제 제기란?

㉠ 주어진 문제를 발전적으로 취급하여 새로운 문제를 제기 또는 만드는 활동이다.

㉡ 학생들은 '혼자 고안한' 문제를 풀어보는 수학적인 사고경험을 가져야하며, 어떤 문제를 푸는 데 성공하고 나면 반드시 반성단계에서 미지인 것과 자료, 조건의 역할을 바꾸거나 일반화, 특수화, 유추 등을 통해 또는 응용상황을 고려하여 발전적으로 새로운 문제를 찾아 해결해 보도록 해야 한다.

㉢ 수학적 지식을 학생 스스로 구성해가도록 해야 한다는 구성주의 학습 원리나 수학은 추측과 반박을 통한 발명의 과정임을 강조하는 준-경험주의 수리철학관과 밀접하게 관련이 있다.

㉣ 문제 제기를 통해 얻는 것은?
- 탐구 지향적인 학습 태도를 길러 준다. 즉, 문제를 제기하는 것은 수학을 창조하는 결정적인 사고단계이며 문제를 제기하고 형식화하는 데 학생들이 직접 참여함으로써 바람직한 과학적 태도를 기르게 된다.
- 문제제기는 문제를 해결하는 수단이 될 수 있다. 즉, 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 제기함으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 원래의 문제를 해결할 수 있는 단서가 생기게 된다.
- 창의적 능력이나 특별한 수학적 능력의 발현에 도움을 준다. 즉, 새로운 문제를 만들어 봄으로써 원래의 문제를 이전과는 전혀 다른 새로운 관점에서 볼 수 있어 그 의미를 보다 명확하게 이해할 수 있을 뿐 아니라 그로부터 새로운 생각을 하게 된다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 정도를 파악할 수 있는 수단이 된다.
- 학생들에게 이미 배운 지식을 종합적으로 이용할 수 있는 기회를 제공한다.
- 학력 수준이 낮은 학생들에게도 의미 있는 수학 학습 활동을 제공한다.
- 수학에 대한 긍정적인 성향을 함양시키는 수단이 된다.

10. 브라운과 월터(Brown& Walter, 1983)가 주장한 문제제기 전략(What-if-not?)이란?

① 'What-if-not(만일 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가)' 전략 단계

㉠ 속성 열거하기: 문제를 구성하고 있는 요소나 속성을 모두 열거해 본다.

㉡ 'What-if-not' 수행하기(속성 부정하기): 전 단계에서 열거한 속성이 '만약 그렇지 않다면 어떻게 될 것인가'라는 의문을 가져 본다.

㉢ 문제제기 하기: 전 단계에서 생각한 의문을 기초로 새로운 문제를 만든다.

㉣ 설정된 문제 분석하기: 새로 만든 문제를 분석하거나 해를 구한다.

② 'What-if-not' 전략 적용

(예) [Pythagoras 정리]

㉠ '직각삼각형의 각 변에 세운 도형이 정사각형이 아니라면 어떻게 될 것인가?'

⇒ 그 도형이 반원, 닮은 직각삼각형, 닮은 다각형, 일반적인 닮은 도형일 경우에도 성립함을 보임으로써 Pythagoras 정리를 일반화한다.

㉡ '직각삼각형이 아닌 경우에는 어떻게 될 것인가?'

⇒ 제2코사인 법칙($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$)으로 일반화시킬 수 있음을 언급한다.

㉢ 'a, b, c가 특수한 경우의 자연수라면 어떻게 될 것인가?'

⇒ Pythagoras 수 ($m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2$)를 구하는 문제를 제기할 수 있다.

㉣ '만약 제곱이 아니라면 어떻게 될 것인가?'

⇒ 'n이 3 이상인 자연수일 때 $x^n + y^n = z^n$인 양의 정수해는 없다'는 'Fermat의 마지막 정리'를 소개할 수도 있다.

05

심리학자

1. 수학 학습 심리학 발달사

- 수학 학습 심리학이란 학생들이 수학적 지식을 어떻게 학습하는지 그 과정을 규명하는 영역이다.
- 많은 교육심리학자, 심리학자 그리고 수학교육학자들에 의해 발달되어 온 학습심리학은 행동주의, 형태심리학, 구조주의 그리고 구성주의로 나눌 수 있다. 특히 학습 심리학 가운데 수학 학습 심리학에 관심을 갖고 연구한 학자로는 스켐프, 베르트하이머, 프로이덴탈 그리고 반힐 등을 들 수 있다.

1.1. 행동주의 심리학(Behaviorism psychology)과 수학 학습

① 행동주의는 관찰가능하고 측정 가능한 외연적 행동(behavior)을 연구의 대상으로 한 심리학이다.

② 대표적인 학자로는 파블로브(Pavlov), 손다이크, 스키너, 거스리(Guthrie,) 홀(Hull) 그리고 가네 등이 있다.

③ 손다이크는 '학습은 상황과 반응 사이의 연결(또는 본드)을 만드는 것'으로 보았으며 연습이 완벽함을 만든다고 강조하면서 효율적인 본드 형성 조건으로 효과의 법칙, 연습의 법칙, 준비성의 법칙을 설명하고 있다.

④ 신행동주의자인 가네는 행동을 유도하기 위해 학습을 8단계의 형태로 구분하였으며 문제해결 학습은 원리학습이 선행되어야 하고, 이를 위해 개념학습이 선행되어야 한다고 소개하였다.

⑤ 행동주의는 겉으로 나타나는 반응을 기준으로 학습 여부를 판단하기 때문에 수학 학습을 설명하기에 충분하지 않으며 상황(S)−반응(R)이라는 간단한 도식을 기본으로 하기 때문에 알고리즘이나 단순한 개념 · 원리를 지도하는 것과 관련해서는 그 적용이 어느 정도 적합할 수 있으나 복잡한 문제해결 등 고차적인 내용의 학습에는 부적절하다는 비판을 받는다.

1.2. 형태주의 심리학(Gestalt psychology)과 수학 학습

① 학습에 대한 인지적 접근은 1900년대 초반 베르트하이머가 시각에 관한 연구에 몰두하면서 형태주의 심리학을 제창한 것에서 그 기원을 찾아볼 수 있다.

② 형태주의 심리학은 행동을 복합적인 전체로 다루지 않고 단순한 요소들, 즉 S−R 연합

의 집합으로 나누어 연구하려는 경향에 반대하면서 '전체는 부분의 합 이상'이라고 주장하였다.

③ 형태주의 심리학에서 가장 중요한 부분은 문제를 해결할 때 '통찰력(insight)'을 사용한다는 것이다.

④ 대표 학자인 쾰러는 손다이크의 시행착오설을 논박하는 과정에서 '통찰학습설'을 주장하였다. 그리고 파이(Phi) 현상[60]을 소개한 베르트하이머는 수학수업을 관찰하면서 의미없는(ugly) 수업의 진행방법을 비판적인 시각으로 관찰하고 통찰을 활용한 학습이 효과적임을 주장하였다.

⑤ 형태주의 심리학은 행동주의 심리학으로 설명이 불가능한 문제해결 등의 고차적인 내용의 학습을 설명하는 것이 가능하다.

1.3. 구조주의 심리학(1960년대)과 수학 학습

① 1957년 구소련의 스프트닉(Sputnik) 인공위성 발사 성공이 도화선이 된 수학교육 현대화 운동(New Math)을 이론적으로 뒷받침한 심리학은 1959년 34명의 과학자, 수학자, 교육학자, 심리학자들의 회의 결과를 정리한 브루너의 저서 『교육의 과정』으로 대표되는 구조주의 심리학이다.

② 수학교육과 관련한 대표적인 학자로는 브루너와 딘즈를 들 수 있다.

③ 브루너는 지식의 구조를 학습자의 수준에 맞게끔 EIS 표현을 활용하여 발견학습을 도구로 가르칠 수 있다고 주장하였다.

④ 딘즈는 브루너와 공동 연구한 결과, 8세 아동에게 대수 블록(Dienes block)을 이용하여 인수분해 방법을 발견하게 하였으며, 구조 교구를 활용하여 수학적 개념의 조기 도입이 가능함을 보여 주었다. 그리고 '자유놀이–게임–공통성탐구–표현–기호화–형식화' 단계와 '역동적 원리, 구성의 원리, 수학적 다양성의 원리, 지각적 다양성의 원리' 활용을 강조하였다.

1.4. 구성주의 심리학과 수학 학습

① 구성주의는 최근에 소개된 이론이지만 인식론의 발달과 함께 계속 진화·형성되어 온 이론으로 1960년대와 1970년대를 거치면서 그 이론적 체계를 갖추게 되었다.

60) 불빛이 일정한 빈도로 켜졌다, 꺼졌다 함에 따라 생기게 되는 가현운동(객관적으로는 움직이지 않는 데도 움직이는 것처럼 느껴지는 심리적 현상)을 경험하는 것이다.

② 구성주의에서는 학생들이 스스로 수학적 개념을 구성한다고 생각한다. 그러므로 교사는 강의하고 설명하거나 자신의 지식을 '전달' 하려는 것보다 학생이 지식을 스스로 구성하고 학습할 수 있도록 환경을 제공해야 한다.

③ 수학 학습과 관련하여 구성주의는 발전 단계별로 조작적 구성주의, 급진적 구성주의 그리고 사회적 구성주의로 구별된다.

④ 조작적 구성주의는 피아제가 소개한 발생학적 인식론(Genetic epistemology)을 말한다. 피아제는 인지발달 4단계에 맞춘 조작 활용을 소개하고 수학과 관련하여 반영적 추상화를 언급하였다.

⑤ 본 글라저스펠트는 피아제의 조작적 구성주의를 기반으로 급진적 구성주의를 주장하였다. 급진적 구성주의에서 지식은 개인이 구성한 개인의 것이며 객관적인 지식이 존재하느냐를 검증하는 수단을 찾을 수 없기 때문에 객관적인 지식이 존재하지 않는다고 보았다.

⑥ 급진적 구성주의는 수학교육자들 사이에 논란의 대상이 되었으며 이를 수정 보완하여 사회적 구성주의가 등장하였다. 급진적 구성주의에서는 주관 독립성을 객관성으로 보는 한편 사회적 구성주의에서는 '공통 주관성'을 객관성으로 보고 있다.

⑦ 구성주의 입장을 취하는 대표적인 학자로 피아제, 비고츠키, 라베(Lave), 로저스(Rogers), 디보노(DeBono), 스켐프 등이 있다.

⑧ 구성주의는 지금도 계속 연구·발전되고 있는 이론이다. 미국의 수학교사협의회(NCTM, 1989; 2000)가 1990년대와 2000년대 초기의 수학교육 방향을 제시한 '규준(Standards)'도 구성주의의 영향을 받았으며 우리나라 제7차 수학과 교육과정과 제7차 개정 수학과 교육과정도 직접적으로 그리고 간접적으로 그 영향을 받았다고 볼 수 있다.

(cf) 그 외로 라카토스, 프로이덴탈과 반힐 그리고 브루소 등이 수학 교수·학습에 있어서 중요한 방향을 소개하고 있다.

2. 행동주의(손다이크, 스키너, 가네) vs 형태주의(베르타이머)

행동주의	인지주의
· 교도학습(guided learning) · 설명학습(expository learning) · 수용학습(reception learning)	· 발견학습
· 행동주의자(behaviorists) · 연합주의 심리학자 · 신행동주의자	· 멘탈리스트(mentalists) · Gestalt 심리학자 · 인지심리학자
· Aristotle, 영국 연합주의자들(Hume, Berkeley, Locke), 미국 연합주의 심리학자들(Thorndike, Watson, Hull, Skinner, Osgood)	· Plato, Kant, Hegel, Dewey, 1930년대 Gestalt 심리학자, Piaget 심리학자들
· 모든 인간은 백지(tabula rasa)로 시작 · 인지적 발달은 경험의 누적적인 결과 · 이해의 궁극적인 원천: 경험 · 학습한다=경험을 백지에 새겨 넣어 가는 것 · 효과적인 학습=가법적이고 선행 학습과 연결되어야 효과적	· 모든 인간은 모든 지식의 바탕이 되는 'basic stuff'를 소유 · 인지적 발달은 'basic stuff'를 명확히 하고 재구성한 결과 · 이해의 궁극적인 원천: 이성 · 학습한다=이성을 반성하고 재조직해 가는 것 · 효과적인 학습=반성과 재구성을 위한 적절한 문제 제공

2.1. 손다이크[61]의 연합설(연결주의, 동일요소설, 시행착오설)

1) 19세기까지의 교육 주안점

① 특정한 교과 내용에 대한 학습이 일반적인 정신능력의 도야를 가능하게 한다는 형식도야이론이 지배적이었다.

② 교육의 목적은 정신도야에 있으며, 교과는 구체적인 내용보다도 사고형식의 특성 때문에 정신도야의 기회를 제공해준다.

③ 반복적인 연습을 통해 도야된 일반적인 정신 능력은 그 능력이 요구되는 모든 내용에 전이된다(= '훈련의 전이'를 전제로 하는 이론).

④ 수학교과는 논리적 추론 능력과 의지력 등을 도야하는 주요한 교과이므로 학교에서 주요하게 다루어져야 한다.

---

61) Edward. L. Thorndike, 1874~1949

2) 손다이크의 학습 이론

① 형식도야 이론은 옳지 않으며 '동일 요소설'이 중요하다.

② 학습은 유기체에 의하여 만들어진 자극−반응 bonds의 형성이며 수학은 이러한 bonds들이 연결된 결과물이다(=연결주의, connectionism).

③ 모든 bonds는 여러 법칙 즉, 연습의 법칙, 효과의 법칙, 준비의 법칙에 의해 시행착오를 거듭하면서 선택되어 통합되고 패턴화 되어 진다.

(예) 인수분해에서 만들어진 알고리즘은 높은 질의 본드인데 이 본드는 곱셈 공식의 활용, 두 수의 분해 등과 같은 여러 가지 본드들이 발전된 것이다.

④ 유기체가 성장함에 따라 얻어진 본드들이 복잡하게 구성되어 있으면 있을수록 수학을 배우는 잠재력이 그만큼 커진다.

⑤ 여러 가지 하위 능력을 종합하고 조직함으로써 전체능력이 형성된다.

⑥ 복잡한 계산은 bonds의 조직화된 협력체이므로 그것들이 조직화된 통합된 힘으로 함께 작용하도록 연습을 시켜야 한다.

⑦ 수학 지식과 기능의 완전한 습득을 목표로 할 때 그 활용이 유익하다.

3) 학습 법칙

시행착오의 과정에서 우연적으로 성공하여 만족스러운 행동은 강화되고 불만족스럽거나 실패한 행동은 약화된다. 이때 선택된 성공적인 반응행동은 빈번히 반복되고(연습의 법칙), 또 성공에 따라 만족을 느끼며(효과의 법칙) 이렇게 성공적인 행동양식은 결합이 더욱 강화되어 새로운 행동을 획득하게 된다. (cf) 시행착오는 맹목적인 반응이 아니라 어떤 목표를 지향한 접근과 수정의 의도적 과정이며, 성공적인 반응이 반응의 주체 속에 체제화 되어 가고 안정된 흔적체계를 형성하여 가는 과정이다.

① 학습의 가능성을 보여준 실험

㉠ 고양이 상자실험: 숨겨진 기계장치를 밟으면 문이 열려 밖에 있는 먹이를 먹을 수 있게 한 실험이다.

㉡ 쥐의 미로실험: 미로를 만들어 출발점에서 출구까지 어떻게 찾아가는가를 관찰하여 성공할 때까지의 쥐의 행동과 소요되는 시간에 대한 실험이다.

② 학습의 법칙

㉠ 연습의 법칙(law of exercise)(=사용의 법칙, 빈도의 법칙, 반복의 법칙)

ⓐ 올바른 bond가 형성되었으면 곧바로 반복 훈련하여 그 bond를 강화시켜 주어야 후에 이와 유사한 학습이 연결되었을 때 큰 성취감을 가지게 되어 bond의 작용을 발전시키게 된다.

ⓑ 연습의 빈도(계속성)가 높을수록 자극과 반응의 결합이 강해진다.

(예) 이차방정식을 푸는 학습에서 방정식이 제시될 때마다 근의 공식을 알맞게 사용하도록 강조하는 것을 자주 하면 할수록 본드는 강하게 된다. 그리고 후에 근의 공식을 사용하는 장면이 올 때는 유창하게 근의 공식을 활용하게 된다.

ⓛ 효과의 법칙(law of effect)(=만족의 법칙, 강화의 법칙)

ⓐ bond를 강화하기 위해 연습을 하는 중에 학습자가 만족한 상태인가 괴로움이 따르는 상태인가에 따라 그 bond는 강화되거나 약해진다.

(예) 일차방정식의 풀이에서 해의 뜻을 배웠을 때 교사가 문장제 문제를 주고 식을 세워 답을 구하라고 했다면 학생으로서는 괴로움이 따르게 되고 쉽게 학습을 포기할 수도 있다. 그러나 쉬운 문제를 제시했다면 보다 좋은 학습이 이루어질 수 있다.

ⓑ 성공에 대한 보상은 학습을 보증하는 가장 좋은 요인이 된다.

ⓒ 학교에서 학습을 할 때 학생들이 흥미와 즐거움을 느끼도록 해야 한다.(=동기유발)

(예) 학교 수학에서 가장 중요한 것은 학생들의 첫 번째 학습 경험이다. 따라서 교사는 학생들이 문제를 풀었을 때 성공적으로 풀게 되어 결과에 만족할 수 있도록 칭찬과 용기를 북돋아 주어야 한다.

ⓓ ‘효과의 법칙’의 적용 절차

산술을 구성하는 여러 가지 능력을 분석한다.
→ 하위 능력을 구성하고 있는 구체적인 자극-반응의 bonds를 명확히 분석하여 선정한다.
→ 용이한 것부터 차례로 계열적 조직화를 시도하여 매우 세분화된 자극-반응 bonds의 목록을 작성한다.
→ ‘효과의 법칙’에 따른 연습으로 그러한 bonds를 차례로 형성시킨다.

ⓒ 준비의 법칙 (law of readiness)

ⓐ 하나의 bond가 행동할 준비가 되어 있을 때 만족한 행동이 뒤 따른다. 그러나 bond가 행동할 준비가 되어 있지 않을 때 행동이 만들어졌다면 괴로움이 뒤 따른다.

(예) 도함수의 뜻을 배울 때 학생들이 이 개념을 배울 준비가 되어있지 않으면 학생들은 싫증을 낸다. 즉, 함수의 극한의 뜻이 무엇인가를 정확히 이해하지 못하면 도함

수를 배울 수 없다. 또, 준비가 되어 있지 않은 상태에서 배웠다 해도 이후의 도함수의 여러 정리, 응용 등에서는 학습의 효과가 감소된다.

ⓑ 준비란 학습과제에 알맞은 성숙과 학습을 말한다(지식, 기능, 태도 등). 따라서 학습자의 성숙과 발달의 정도에 따라서 학습의 기초가 결정된다.

4) 수학 학습-지도 방법

① 학생들에게 계산의 부정확성은 그 구성 bonds가 약함을 뜻하므로 기본적인 계산에 포함된 bonds는 현재보다 더욱 강력하게 형성되어야 한다.

② 곤란, 곧 일시적 실패나 기존 bonds의 부적절함이 사고와 학습에 본질적이고 필요한 자극이 된다고 보는 것은 잘못이다. 곤란은 그 자체로 아무 도움도 되지 않으며, 가끔씩이라도 경험하는 괴로운 실패의 경험은 사고와 학습을 방해한다.

③ 산술 교육의 초기는 구체물을 사용하되 기본 계산이 익숙해진 이후에는 가능한 한 빨리 추상적인 아이디어와 일반적인 원리로 나아갈 수 있도록 지도해야 한다.

④ 산술학습 시 학생들이 문제의식을 갖고 산술의 필요성을 느끼며 그 진가를 인식하도록 한다. 따라서 연습 문제는 아동에게 흥미로운 실제적인 문제 상황, 산술을 실제적으로 적용하여 해결할 수 있는 생활 속에서 일어나는 문제여야 한다.

⑤ 산술의 연역적인 설명은 귀납적인 확인으로 대치하거나 절차가 마스터된 훨씬 이후에 습관을 종합하고 이론적으로 설명하는 수단으로 학습해야 한다.

⑥ 추론적 사고 또한 연습의 법칙으로 설명될 수 있으며 훈련을 통해 단련된다.

⑦ 산술지도 시, 산술 능력을 분석하여 지적인 습관의 개발을 위해 형성시켜야 할 bonds나 connections를 선택하고 그들을 형성하는 최선의 순서와 수단을 발견하는 것이 중요하다.

[정리]
㉠ 아동들은 귀납 추론에 의해 계산 방법을 이해한다.
㉡ 수와 양적인 상황에 대한 정돈되고 합리적인 사고체계로 발달할 수 있는 적절한 connections의 형성이 중요하다.
㉢ 생활과 관련된 실제적인 상황에서 요구되는 bonds를 형성시켜야 한다.

5) 손다이크 이론에 대한 비판

① 수학을 수많은 connections이나 사실로 분해함으로써 관련 없는 사실이나 절차의 집

합으로 보게 한다고 비판을 받고 있다.

② 의미나 관련성의 이해 또는 개념 · 원리 · 법칙의 발견 및 문제해결보다는 분리된 개별적 사실의 암기를 강조하고 연습에 의한 습관화를 중시한다고 비판을 받고 있다.

③ Brownell(형태심리학자)과 Moser의 연구

㉠ 약 1300명의 초등학교 3학년 아동을 대상으로 자연수 뺄셈에 대한 '받아 내리는 방법'과 '같은 수를 더하는 방법' 두 경우에 대하여 의미 있는 설명을 통한 수업과 기계적인 절차로 가르친 수업을 진행한 후 비교하였다.

㉡ 결과: 6주 후

· 기계적인 방법으로 지도 받은 학생들보다 의미 있는 방법으로 지도를 받은 학생들의 결과가 우수하게 나왔다.

· '받아 내리기 방법'이 '같은 수를 더하는 방법'보다 높은 점수를 보였다.

④ Brownell: 수학적인 사고를 증진시키고 바르게 적용할 수 있게 하기 위해서 자동적인 반응보다는 계산의 바탕이 되는 원리에 주목해야 한다. 그리고 연습만으로는 의미의 이해에 이르게 할 수 없으며 연습은 이해를 증진시킬 수 있을 때에만 가치가 있다.

2.2. 스키너[62]의 작동적 조건화설과 프로그램 학습

1) 작동적 조건화설

(1) 개념

① 외부의 자극에 의해서가 아니라 유기체의 의도적 · 자발적인 행동(조작적 행동)과 이에 따르는 보상에 의해 조건형성이 이루어진다.

② 유기체의 자발적인 행동이 자극의 기능을 하고, 보상에 의하여 강화가 이루어진다.

③ 작동이란 유기체가 자발적 행동을 통하여 환경에 스스로 작용함으로써 어떤 결과를 생성해 내는 것이다.

(2) 비둘기 상자 실험 및 쥐 실험

① 굶긴 비둘기를 상자에 넣는다.

② 실험자는 사전에 비둘기의 행동을 어떻게 변화시킬 것인지 계획했다가 그런 행동의 일

62) Burrhus Frederic Skinner, 1904~1990: 행동주의자
① 실험 심리학적 방법에 의해 인간 행동의 원리와 법칙을 탐구하고 이의 교육적 응용을 시도하였다.
② 인간의 행동은 외적인 조건, 곧 자극과 강화의 통제 방법에 의해 어떤 형태로든 조정되고 형성될 수 있다고 본 극단적인 환경론자이다.

부가 되는 반응을 보일 때 콩(강화)을 준다.(=강화제공)

③ 실험결과

㉠ 유기체가 스스로 발산해서 보여주게 되는 능동적 반응에 강화를 제공함으로써 강화가 간접적으로 자극의 역할을 하게 되어 행동이 증강된다.

· 유기체의 행동은 환경에 스스로 작용한 결과이다.
· 먼저 반응을 하고 그 다음에 강화가 주어진다.
· 자율적 학습 즉, 유기체의 능동적 반응이 강화를 가져온다.

㉡ 강화가 행동변화의 핵심적인 요소이다.

㉢ 변별자극에 따라 반응을 조절한다.

(3) 강화 이론(reinforcement theory)

① 강화란 어떤 행동을 촉발시키는 역할을 하는 매개체이다.

② 행동 조종에서 반응의 만족스러운 결과는 그 강도를 증대시키고 불만족스러운 결과는 반응의 강도를 약화시킨다는 손다이크의 '효과의 법칙'을 확장시켜 정리한 이론이다.

③ 인간은 처음에 발생된 작동으로부터 선별적인 강화에 의해 바라는 마지막 행동에 도달하게끔 학습 된다. 따라서 강화는 작동학습의 가장 중요한 요소이며 반응이 증강되는 방식은 학습의 질을 결정하는 것과 연결된다.

④ 강화를 이용하면 유기체의 어떤 행동도 형성될 수 있으며, 형성된 행동을 유지할 수 있다. 따라서 강화의 효과를 잘 분석하고 강화 기술을 적절히 고안하면 유기체의 행동을 원하는 대로 조절하고, 통제할 수 있으며, 경쟁과 협동 등의 사회적 행동, 문제해결, 자기 통제, 성격 형성 등도 가능하다.

⑤ 강화의 종류

㉠ 정적 강화(적극적 강화): 어떤 자극에 대하여 쾌감을 주어 그 반응을 촉발하는 것이다.

㉡ 부적 강화(소극적 강화): 불쾌자극을 제거해줌으로써 그 반응이 일어날 확률을 증가시키는 것이다.

㉢ 제 1유형의 벌: 불쾌자극을 제시하는 것이다.

㉣ 제 2유형의 벌: 쾌자극을 제거하는 것이다.

분류	쾌	불쾌
제시	정적 강화 예 상, 칭찬	제1유형의 벌 예 벌, 때림 등
제거	제2유형의 벌 예 친구 못 만나게 함	부적 강화 예 화장실 청소 면제

⑥ 여러 가지 강화계획

㉠ 강화를 조절함으로써 행동을 통제할 수 있다.

㉡ 바람직한 강화계획

· 초기: 계속적 강화

· 후기: 단속적(간헐적, 부분) 강화

㉢ 강화계획의 유형 ┌ 계속적 강화: 꾸준하게 계속적으로 제공되는 강화
└ 간헐적 강화: 시간과 비율이 달리 제공되는 강화

ⓐ 고정간격 강화(fixed interval reinforcement)

· 매월 17일에 봉급이 나온다.

· 고정된 시간간격을 두고 강화를 제공한다.

· 일정 시간이 경과하지 않으면 정반응을 해도 강화물이 나오지 않도록 계획된 것이다.

· 간격시간이 길수록 반응빈도는 낮아진다.

ⓑ 변동간격 강화(variable interval reinforcement)

· 낚시꾼이 고기를 잡을 때 평균 5마리는 잡히나 언제 잡힐지 모른다.

· 강화와 강화 사이에 시간이 변한다.

· 형성된 조건반응은 소거에 대한 저항이 강하다.

ⓒ 고정비율 강화(fixed ratio reinforcement)

· 성과급제 등

· 일정한 수의 반응에 따라 고정비율로 주어지는 강화이다.

ⓓ 변동비율 강화(variable ratio reinforcement)

· 도박행동, 해녀의 잠수 등

· 슬롯머신 게임을 하는 사람(가끔 이득을 보기에 쉬지 않고 게임을 한다.)

· 일정한 수의 반응을 한 뒤에 강화가 주어지지만 강화와 강화간의 반응수가 어떤 평균수에 따라 변동한다.

㉣ 고정간격 강화와 고정비율 강화의 경우 강화 제공 후 한번 쉬는 특성을 보였다. 그러나 변동간격 강화와 변동비율 강화의 경우 쉬는 일은 일어나지 않았다.

(예) 10문제 씩 푼 다음 평가를 받는 아동은 다시 10문제를 풀기 시작하기 전에 얼마 동안 쉰다.

(예) 교사가 순회하면서 무작위로 완성된 풀이를 평가하게 되는 아동은 쉬지 않고 계속 푼다.

ⓜ 간헐적 강화 스케줄로 개발된 조건화된 반응은 연속적 강화로 개발된 반응보다 소멸이 훨씬 적다.

(예) 전에 매번 작동한 라이터가 작동되지 않는다면 쉽게 포기하나 이따금씩 작동한 라이터를 키려는 데는 더욱 끈질긴 시도를 한다.

⑦ 다양한 강화 패턴으로 복잡한 일련의 강화 스케줄을 구성하여 자극을 조종함으로써 복잡한 행동을 수행하고 이를 유지하게 할 수 있다.

㉠ 학습 속도를 증대시키는 데는 계속적 강화가 효과적이다.

㉡ 단속적 강화, 특히 변동비율 강화가 학습된 행동의 소거를 가장 느리게 한다.

㉢ 고정비율 강화 스케줄이 고정간격 강화보다 반응속도를 높이고 지속적이 되게 한다.

㉣ 일반적으로, 학습 초기에는 계속적 강화로 제공하고 나중에는 단속적 강화를 제공하는 것이 바람직하다.

(4) 전통적인 수학교육에 대한 스키너의 입장

① 강화의 횟수가 너무 부족하다.

② 학생의 반응과 교사의 강화 자극 사이에 시간적 간격이 너무 크다.

③ 부적인 강화가 주로 사용된다.

④ 최종 행위에 점진적으로 접근해 갈 수 있는 강화 스케줄을 적절히 포함한 프로그램이 결여되어 있다.

2) 프로그램 학습-지도 방법

(1) 프로그램 학습-지도 방법의 원리

① 강화의 양은 거의 중요하지 않으며, 약간의 강화라도 현명하게 사용되면 행동을 조종하는 데 매우 효과적일 수 있다(가장 중요한 원리).

② 유기체는 인간의 조정 능력을 벗어나는 미세한 강화에 의해서 영향을 받는다. 따라서 기계 장치와 전자 장치와 같은 학습 기계가 사용되어야 한다.

③ 프로그램 학습-지도 방법의 원리

㉠ 소규모 단계의 원리: 학습목표를 그 달성 여부가 명확하고 관찰 가능한 행동적 목표로 진술한 다음 목표에 이르는 과정을 많은 소규모 단계(small steps)로 나누어 계획된 순서대로 각 단계를 차례로 통과하도록 한다.
㉡ 즉시 확인의 원리: 문항을 아주 단순하게 구성하고 학생의 반응 결과에 대한 지식을 즉각적으로 제공한다.
㉢ 학습 개별화의 원리: 개별 학습이 가능하도록 흔히 발생되는 오류 유형에 따른 준비 학습 문제나 심화 학습 문제를 제공한다.
㉣ 적극적 반응의 원리
㉤ 개별적 검증의 원리

(2) 프로그램을 사용하는 학습법에 대한 반대 의견
아동을 단순한 동물로 취급하여 중요한 인간의 지적인 성취를 부당하게 기계적으로 분해하고 있다고 본다.

3) 행동주의 이론 적용 시 유의점

① 교육은 관찰 가능한 행동의 변화이다. 따라서 교수목표는 그 달성 여부가 관찰 가능한 실행적인 용어로 상세화 되어 진술되어야 하며, 가르침을 받은 학생은 그 이전에는 할 수 없었던 무엇인가를 할 수 있어야 한다. 그러므로 각 수업과 관련하여 과제 분석이 필요하다.
② 기존 지식의 습득과 계산 기능의 개발을 강조하는 측면에서는 적합해 보이지만, 이해와 사고 교육, 문제해결 교육을 지향하는 학교 수학의 본질적인 부분을 소홀히 하기 쉽다.
③ 개별 학생의 수준에 따라 '기본적인 지식의 습득 및 기능의 숙달'과 '탐구 및 재발명 활동'이 균형을 이루도록 프로그램 학습이 제작되어야 한다.
④ 주어진 학습과제에서 학습자의 출발점 행동이 확인되어야 한다.
⑤ 학습과제는 하위과제에서 상위과제로 점진적으로 제시되어야 한다.
⑥ 학습자의 특성에 따라 다양한 강화방법을 구안해야 한다.
⑦ 외형적으로 표현되는 행동은 계속 반복 학습되어야 한다.
⑧ 학습자의 학습동기를 유발시켜야 한다.

2.3. 가네[63]의 과제 분석과 인지학습 8유형

가네의 신행동주의 이론에 따르면, 학습은 가법적이고, 앞에서 학습한 것과 연결이 되도록 한다(=백지설, 경험주의). 특히 모든 지식의 원천은 경험이므로 적절히 조직되고 설명식으로 제시되는 경험을 제공했을 때, 학습이 가장 잘 이루어진다. 따라서 가네에게 있어서의 기본적인 문제는 '무엇이 학습되는가?'이다.

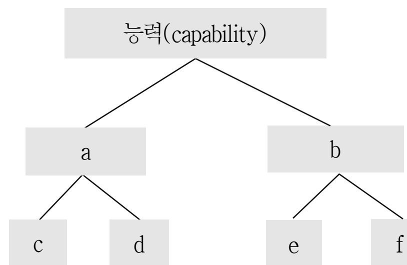
1) 과제 분석

(1) 과제 분석[64]

① '당신은 학습자가 무엇을 할 수 있기를 바라는가?'라는 질문을 통해 그러한 능력(특정한 조건 아래서 특정한 기능을 수행하는 능력)을 구체적이고 행동적으로 기술해야 한다.

② 과제 분석이란 하나의 학습과제를 구성하고 있는 많은 하위 학습요소들을 분석하고, 이를 위계적인 관계로 조직해 놓는 활동이다.

③ 선행 요소가 되는 하위 행동을 확인하고 다시 그 하위 행동을 확인하여 학습자가 이미 소유한 능력에 이를 때까지 계속한다. 즉, 상위 단계의 행동은 하위 단계의 행동의 형성을 전제로 한다.



④ 행동 요소의 선후 · 좌우 관계를 분석하여 학습 위계 구조를 작성한다. 이 때, 학습 위계 구조는 다양하게 작성될 수 있다.

⑤ 학습 위계 구조를 적용하기 위해서는 예비 검사를 통해 학생의 현재 수준을 확인해야 한다.

---

63) Robert Mills Gagné, 1916~2002

64) 수학 교수에서의 학습 위계란
첫째, 하위 과제는 상위 과제에 포함되거나 중요한 요소가 되며
둘째, 특정한 위계에서 확인된 각각의 하위 기능들은 다른 위계에서도 역할을 하고
셋째, 위계에 의하여 만든 진단 검사는 학생 개개인의 개별학습에도 유용하게 사용될 수 있다.

⑥ 학습 위계 구조는 다음에 이어질 지도 자료의 작성에 도움이 되고 프로그램 학습을 계획하고 설계하는데 필요하다.

(2) 과제 분석의 필요성

① 학생들에게 어떠한 행동(지적 또는 기능적 변화)을 육성시키게 될 것인지에 대한 목표 수립이 분명해진다.

② 학습활동의 계열성이나 위계성에 따라서 학생들의 선수학습요소를 파악할 수 있다.

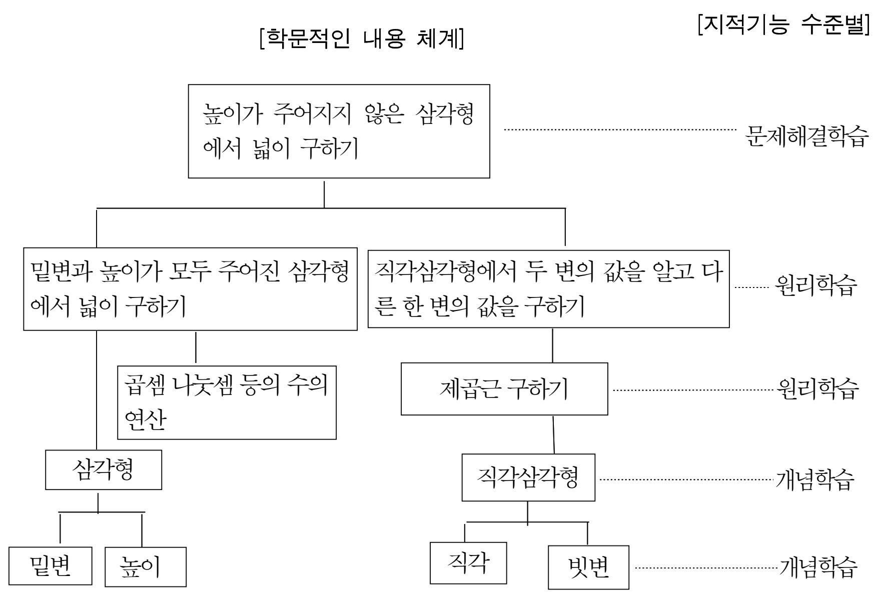
③ 학습활동을 어떠한 순서로 전개해야 효율적인지를 알 수 있다.

④ 학습위계구조에 따라서 학습활동을 촉진시킬 수 있는 학습보조 자료의 제작이 구체화될 수 있고, 학습보조 자료를 적절한 시기에 활용할 수 있다.

⑤ 학생들의 능력수준에 비추어 필수적으로 전개해야 하는 학습활동을 취사선택할 수 있다.

⑥ 학습활동의 결과 또는 숙달수준을 평가할 수 있는 준거를 마련할 수 있다.

(예) ‘직각’과 ‘빗변’을 모르게 되면 ‘직각삼각형’을 학습할 수 없고, 직각삼각형의 개념을 모르면 결국 문제해결 학습능력을 기를 수 없다.



2) 인지 학습의 조건

학습과정에서는 선행 학습, 학습 동기, 자아 개념 등의 학습자의 내적 조건과 학습목표, 그리고 강화, 인접성, 연습 등의 외적 조건 그리고 학습결과 곧 능력의 획득과 파지 및 전이 등을 고려해야 한다. 여기서 학습에 중대한 영향을 미치는 것은 외적 조건이다.

3) 인지 학습 8유형

신호 학습 → 자극-반응학습 → 연합 학습 → 언어적 연합 학습 → 다중 식별 → 개념 학습 → 규칙 학습 → 문제해결학습

하위학습(단순한 것) → 상위학습(복잡한 것)

> * 문제해결능력을 달성하기 위해 먼저 어떤 규칙을 알아야 하며, 이러한 규칙을 이해하기 위해서는 어떤 개념을 알아야 한다. 그리고 그를 위한 선행조건은 어떤 단순한 연상이나 사실의 명확한 식별이다. 그리하여 조건반응에 이르기까지 분석을 계속할 수 있다.

(1) 신호학습(signal learning): 어떤 신호나 자극에 대해 무의식적인 반사적 반응을 보이는 것

① 예

㉠ Pavlov의 무조건 조건화설

㉡ 어려서부터 수학이 어려웠고 수학선생님이 무서웠기에 성인이 되어서도 수학을 생각하면 공포감을 느끼게 된다. → 극복방법: 성공적인 경험의 기회 마련 필요

㉢ 양파 껍질을 벗기면서 눈물을 흘린 사람은 양파를 보기만 해도 같은 느낌을 갖는다.

㉣ 어릴 때, 물에 대한 공포나 고소공포와 같은 비자발적인 공포가 생긴다.

② 특징

㉠ 신호학습은 누구에게나 일어날 수 있고 산만한 행동을 포함하고 있으며 감정적인 학습과 같은 비자발적인 성격을 갖는다.

㉡ 빠른 심장박동, 혈관 수축 등을 일으킬 수 있는 공포반응은 신호와 연결하기 쉽게 학습된다.

㉢ 공을 차거나 이름을 쓰는 것과 같은 자발적인 반응은 신호학습으로는 학습되지 않는다.

(2) 자극-반응학습(stimulus-response learning): 학습자가 식별된 자극에 대하여 어떤 정확한 반응을 보이는 것

① 신호학습과의 차이점

신호학습은 보편적인 정서 반응에서 보이는 학습이므로 비자발적인 성격을 갖지만 자극–반응학습은 자발적인 반응을 보이며 제한적이고 정확한 성격을 갖고 있다. 또한 근육 운동 시 효과적인 학습이다.

② 조건

㉠ 자극에 대해 옳은 반응을 보이면 이를 연습시켜 명확하고 정확한 반응이 되도록 해야 한다.

㉡ 자극을 동일시하여 이 자극에 대해 하나의 반응만을 보이도록 해야 한다.

㉢ 옳은 반응에 대해서만 적절한 보상이나 강화를 제공한다.

③ 예

㉠ 숫자 읽기, 기본 계산하기, 도형의 이름 대기와 같은 수학적 기호와 용어를 배우는 첫 단계의 학습을 의미한다.

㉡ '발'이란 소리에 개가 발을 들어 올린다.

(3) 연쇄학습(Chaining): 연쇄란 이전에 학습된 자극–반응 학습 두 개(또는 그 이상)를 차례로 모두 연결시키는 것으로 거의 비교적 단순한 신체적 반응의 연쇄적 연합에 의해 일어나는 학습

① 조건

㉠ 바른 반응에 대한 보상과 연습이 필요하다.

㉡ 연쇄학습을 위해 이를 구성하는 모든 단위 연합들이 이미 학습되어 있어야 한다.

㉢ 연쇄는 다음에 따라오는 것과 함께 각각의 연결에 인접해야 한다.

② 예

㉠ 옷을 입거나 연필을 깎거나 글씨를 쓰는 학습을 의미한다.

㉡ 아라비아 숫자 쓰기, 도형 그리기 등의 학습을 의미한다.

㉢ 아이가 이름에 의해 특정한 물체를 부르도록 학습하는 것이 이에 속한다.

㉣ 수학 학습 지도 현장에서 수학 교구나 기구 사용 절차와 이를 통한 개념 획득 과정이 가능한 예이다.

(4) 언어적 연합학습: 단어나 언어로 주어지는 자극에 의해 언어적 반응이 일어남으로써 언어와 언어가 연합되어 일어나는 학습

① 조건

㉠ 언어의 단어들에 대한 필수 불가결한 이미지가 이전에 학습되었어야 한다.

㉡ 언어 단어에 관한 다른 반응들이 전에 학습되었어야 한다.
㉢ 언어 단어와 이미지 사이를 연결해주는 "coding connection"이 전에 학습되었어야 한다.
㉣ 연쇄는 순서에 따라 연속적으로 진행되어야 한다.

② 예
㉠ 의미에 상관하지 않고 시를 암기한다.
㉡ 의미에 상관하지 않고 구구단을 암기한다.
㉢ 그림을 이용해 새로운 수학 용어를 학습한다.

(5) 다중식별(변별학습, multiple discrimination): 일련의 연합들 중 연합과 연합을 구분하고 각각의 연합에 따라 다르게 반응할 때 일어나는 학습

① 조건
㉠ 각각의 동질적인 특성과 각각의 구별되는 자극을 연결하는 개별적인 연쇄들이 선행적으로 학습되어져야 한다.
㉡ 계속 보유하고 있음을 확인하기 위해, 방해를 줄여야 한다.

② 예
㉠ 숫자 3, 6, 2, 1, 8, 5를 작은 순서대로 나열하기, 연산 기호 +, −, ×, ÷나 관계 기호 〈, =, 〉 식별하기 등의 학습을 의미한다.
㉡ 학생들은 식물 · 동물 · 화학 원소 · 암석 등을 구별하고 그것들을 개별적인 이름들로 올바르게 부른다.
㉢ 어린아이가 색깔 · 모양 · 공통적인 물체 · 문자와 단어 · 숫자와 연산 기호 등을 학습한다.

(6) 개념학습(concept learning): 서로 다른 자극에 대한 공통된 반응을 학습하는 것, 일반적으로 개념은 여러 가지 대상에서 공통된 성질을 인식함으로써 학습하는 것을 의미

① 조건
㉠ 다양한 자극 상황을 구별할 수 있는 능력이 선행되어야 한다.
㉡ 다양하고, 서로 다른 자극 상황을 식별함으로써 새로운 개념 학습이 단계적으로 이루어진다.

② 예
㉠ 삼각형에서 밑변과 높이를 구분하고 설명한다.
㉡ 피타고라스 정리에 필요한 빗면을 찾고 빗면이 다른 두 면과 어떻게 다른지를 이야기할 수 있다.

(7) 원리학습(규칙학습, rule learning): 둘 이상의 개념의 연쇄를 의미

① 조건

㉠ 연결된 개념들이 사전에 학습되어져야 한다. 즉, 벌써 연쇄된 개념들을 이해하고 있어야 한다.

㉡ 교사는 중요한 개념과 선행규칙을 상기시키고, 학습할 규칙이 적용되는 상황을 제시하며, 규칙을 예로 나타내게 하거나 예를 구성하게 하고, 학습자로 하여금 규칙을 형식화하게 해야 한다.

㉢ 학습자에게 규칙의 근거를 언급할 수 있는 기회, 학습된 규칙을 새로운 예에 적용하는 연습의 기회를 주어야 한다.

② 예

㉠ 삼각형의 넓이 공식 및 피타고라스 정리와 같은 수학적인 원리나 법칙, 공식 등을 바르게 인식한다.

㉡ 소금의 화학식이 NaCl이고 나트륨과 염소에 대한 개념을 알고 있은 후 "소금은 나트륨과 염소로 구성되어 있다"는 원리를 안다.

(8) 문제해결(problem solving): 이미 알고 있는 원리들을 새로운 원리들로 결합하는 과정을 의미, 이전에 배웠던 원리들을 결합하는 새로운 원리들을 생각해내는 과정

① 조건

㉠ 학습자는 그가 도달하기 전에 그 해가 될 수 있는 대답들의 필수적인 특성들을 확인할 수 있어야 한다.

㉡ 이전에 배웠던 관계있는 원리들을 회상해야 한다.

㉢ 회상된 원리들이 결합되어서 새로운 원리들이 출현하고 알게 된다.

㉣ 반복적인 연습보다는 많은 시간이 걸려 해결하여 갑작스럽게 그 해에 도착하는 통찰이 필요하다.

② 예

㉠ 운전자가 도로에 대한 자신만의 지도를 만든다.

㉡ 새로운 약속이 생겨서 점심 스케줄을 다시 세운다.

㉢ 가정주부가 가격 차이에 기초하여 어떤 물품을 선택한다.

㉣ 물리학이나 수학에서 알고 있는 원리들을 이용해 주어진 문제를 해결하거나 새로운 원리를 찾는다.

[참고] 실제 학습-지도는 가네가 제시하는 학습 유형의 순서대로 이루어지지 않는 경우가 많다고 한다.
(예) 그림을 보고 바른 네모꼴이라고 답할 수 있으면서도 바른 네모꼴을 바르게 그리지 못하는 아동
(예) 개념을 도입하고 나서 그 용어와 기호를 도입하는 교사

2.4. 베르타이머[65]의 통찰을 이용한 학습

1) Gestalt(형태) 심리학

(1) 배경

① 후설(Husserl)의 현상학[66]을 출발점으로 한다.

② 연합주의[67], 연결주의, 구조주의, 기능주의, 행동주의에 내포되어 있는 기계적인 모형에 반대하였고 의식의 활동성과 지각의 전체성을 강조하였다. 즉, 사고는 연결주의적인 것이 아니라 윤곽적이며 '의미를 갖게 하는 것'이다.

③ 대표적인 인물로 막스 베르타이머, 쿠르트 코프카, 볼프강 쾰러, 쿠르트 레빈 등이다.

(2) 특징

'Gestalt'란 형태, 윤곽(configuration), 형식(form), 모형(pattern), 구조(structure) 등으로 해석 가능하다.

① 학습은 지각의 산물이며 지각에 의해 결정된다.

② 한 체계의 전체 구조가 부분들의 단순한 산술적 총합이 아니라 그 이상의 것이며, 부분들은 그것들과 전체 구조와의 관계에 의해서만 의미를 갖게 된다(전체론, holism)는 입장을 취하고 있다. 즉, 전체가 부분의 성격을 결정한다(관계적 결정의 원리(principle of relational determination)).

③ 과거에 겪었던 개별적 경험의 흔적이 미래의 경험에 영향을 미친다(흔적설).

④ 인지심리학의 기원이 되는 심리학이다.

65) Max Wertheimer, 1880~1943

66) 현상학자
㉠ 모든 진리의 궁극적인 근원은 주관과 인식 작용에 존재한다.
㉡ 경험을 체계의 구성요소(원자적 부분)로 분석하지 않고 전체적인 것으로 파악하였다.

67) 의식 내용을 원자적 요소로 나누어 분석하고 그것들이 연합되는 법칙을 밝히려 노력하였다.

2) 베르타이머의 연구

(1) 파이(phi) 현상(=가현운동)

> 불연속적인 시각 자극이 연속 운동 지각을 가져올 수 있다. 지각 대상은 실제 자극에 일-대-일로 반응하지 않고 전체 즉, 그것을 구성하는 요소의 총합이 아닌 전체로 조직화한다.

① 1912년『형태에 관한 실험적 연구』라는 논문에서 소개한 가현운동(apparent movement)을 통해 운동지각이 종래의 요소적 입장으로는 설명될 수 없음을 실증하였다. 이 실험의 결과와 논문은 형태주의 심리학의 출발점이 되었다.

② 파이 현상(정지한 물체에서 운동에 대한 지각): 두 빛이 짧은 간격으로 어두운 방에 작은 구멍으로부터 비추면 이 운동이 한 빛으로 보인다.

실험

> 암실에서 a, b 두 개의 선분을 보여주고, 이 두 선분을 적당한 간격(약 0.006초)으로 보여주면 a 선분이 점선과 같은 방향으로 움직이는 것처럼 보인다.

③ 실제로 운동이 없는 데도 불구하고, 마치 운동이 있는 것처럼 보인다. 이는 운동이 요소를 초월한 전체적 성질을 가지고 있으며, 하나의 형태(Gestalt)를 이루고 있음을 의미한다.

(2) 지각의 법칙[68]

> 인간에게는 대상의 형태를 무리지어 지각하려는 심리가 있으며, 구체적이고 전체적인 특성을 갖는 법칙에 따라 지각의 성격이 규정된다.

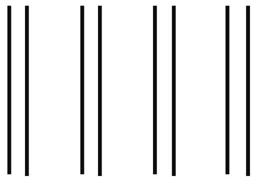
① 유사성(similarity)의 원리: 유사한 것끼리 묶어 지각

○ ○ ○ ○ ○ ○
× × × × × ×
○ ○ ○ ○ ○ ○
× × × × × ×
○ ○ ○ ○ ○ ○
× × × × × ×
○ ○ ○ ○ ○ ○
× × × × × ×

○ 또는 ×로 구성된 가로줄이 교대로 배열된 것처럼 지각됨

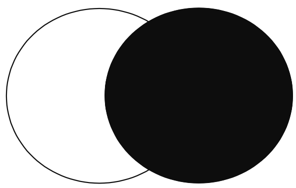
68) 『인지심리학과 그 응용』, 앤더슨 저, 이영애 번역. p.58~59

② 근접성(proximity)의 원리: 가까운 것끼리 묶어 지각



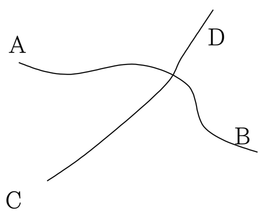
8개의 분리된 선분이 아닌 네 쌍의 선분을 지각하게 됨

③ 폐쇄와 좋은 형태의 원리: 좋은 형태끼리 묶어 지각



가려진 원이 여러 형태를 취할 수 있음에도 불구하고, 한 원이 다른 원에 의해 가려졌다고 지각함

④ 좋은 연속성(good continuation)의 원리: 좋게 연속된 것으로 묶어 지각



A에서 B로 가는 선분은 급하게 선회하는 A에서 D선분보다 더 좋은 연속을 나타냄

(3) 생산적 사고(Productive Thinking)

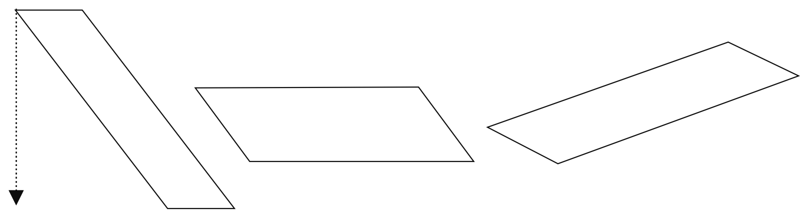
① 1945년에 출판된 책 『생산적 사고』에 의하면, 문제는 항상 어떤 것이 명백하지 못할 때, 서로 걸맞지 않을 때, 갭을 가질 때 발생하게 되며 명료하지 못할 때 이를 해결하기 위해 마음의 동요가 일게 되고 모든 것이 함께 묶여 의미를 갖게 될 때 문제는 해결될 수 있다.

② 기계적 암기를 위주로 하는 학습은 학습자가 사실과 법칙을 이해하지 않고 배우기 때문에 쉽게 잊어버리며, 따라서 기계적 암기학습의 전이도 상당히 제한적이다. 반면에 형태주의의 원리를 기초로 사고하면, 제시된 것들의 관계와 의미를 재구조화 하여 생산적 사고를 유도할 수 있다.

③ 수학 학습에 대한 견해 – 『생산적 사고』 중 “The Area of Parallelogram[69]” 내용의 일부

69) ① 평행사변형을 직사각형으로 변형하면 (밑변)×(높이) 공식을 적용할 수 있는데, 학생들이 평행사변형과 직사각형의 관련성을 이해하지 못했다.
② 베르트하이머의 생산적 사고는 공식의 맹목적인 적용이나 시행착오를 의미하는 것이 아니다.
③ 학생들이 평행사변형의 넓이를 구하는 데 어려움을 겪는 것은 평행사변형의 넓이를 구하는 방법에 관한 구조적 이해, 즉 ‘통찰’이 결여되었기 때문이다.
④ 베르트하이머는 생산적인 사고 과정을 분리, 분류, 조직화 등의 사고 조작을 통해 문제의 ‘내적인 구조적 관련성’을 파악해 가는 것으로 간주하였다.

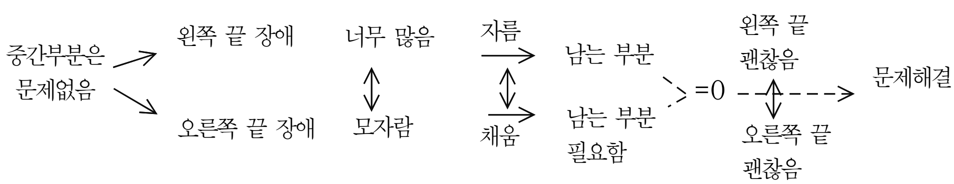
: 일반적인 학급의 교사라면 삼각형의 높이에 대하여 윗변의 왼쪽 꼭짓점에서 밑변에 수직인 직선(수선)을 긋는 방법을 보여준다. 그 다음 넓이를 구하기 위해 수직선의 길이를 측정하여 밑변의 길이에 곱하게 한다. 이 표준적인 알고리즘을 사용하여 아동들은 많은 연습문제를 훌륭하게 계산하게 되고 교사도 학생들의 문제해결에 만족한 반응을 보인다. 그러나 다음과 같은 평행사변형을 제공하고 넓이를 구하라고 하면 교실은 혼란스러워진다.



제일 왼쪽의 평행사변형은 좀 전의 교사가 제시한 평행사변형을 거꾸로 세운 것에 불과하지만, 윗변의 꼭짓점에서 내린 수선의 발이 밑변 밖에 존재하므로 선생님이 가르쳐준 표준적인 공식을 적용할 수 없어 학생들에게 부담을 주게 된 것이다. 학생들은 '이 문제는 배우지 않았습니다. 따라서 틀린 문제입니다', '평행사변형의 높이×밑변의 알고리즘이 적용될 수 없습니다' 또는 '포기하겠습니다'라는 반응을 보였다.

이와 같은 학생들의 반응은 학생들이 알고리즘의 기초가 되는 구조적인 원리를 이해하지 못한 채 의미 없는 기계적 학습을 했기 때문이다. 결국 문제해결 방법은 맹목적인 알고리즘을 이용해서가 아닌 문제의 구조에 대한 진정한 이해를 통해 얻어야 한다. …

학생들이 여러 가지 평행사변형의 넓이 구하기에 대한 접근 방법을 시도하는 중에 평행사변형의 중간 부분은 별 문제없이 꽉 채워져 있는데 반해 왼쪽 끝 부분과 오른쪽 끝 부분이 문제가 됨을 알게 된다. 그리고 왼쪽 끝 부분의 남는 부분과 오른쪽 끝 부분에 필요한 부분이 서로 같음을 알게 되고 너무 많은 부분을 잘라 모자라는 부분에 채움으로써 문제를 해결한다.



이러한 과정을 통해 학생들은 직사각형과 평행사변형이 같게 될 수 있다는 전체적인 Good Gestalt를 형성하게 되고 왜 왼쪽과 오른쪽의 끝 부분을 고려해야 하는지를 인식하게 된다.

3) 통찰을 이용한 교수·학습 방법

① 학생의 학습과정을 몇 개의 조작이나 단계에 의한 문제해결 과정의 합으로 보거나 따라하기 식의 시행착오로 보는 것은 옳지 못하다.
② 교사는 학생들 스스로 시도할 수 있는 다양한 방법의 접근을 제시해주어야 한다.
③ 학생들은 문제해결에 필요한 전체적인 Good Gestalt를 형성하도록 스스로 노력해야 한다.
④ 교사는 학생들을 당혹스럽게 만들 수 있는 문제를 제시함으로써 인지적 갈등 상황을 유발하는 역할을 하며 학생은 인지적 갈등 상황을 해결하기 위해 여러 방면으로 고찰하면서 진정한 수학적 활동을 경험해야 한다.

3. 인지주의(소크라테스, 듀이, 피아제, 비고츠키, 스켐프, 딘즈, 브루너, 오수벨)

인간은 사고하는 존재이며, 인간의 내부에서 일어나는 능동적인 사고 과정과 인간 내부의 인지 구조가 중요하다. 따라서 인지주의에서 결과보다는 과정을 중시하며 정보가 뇌 속에 어떠한 과정을 통해 저장이 되는지를 연구한다.

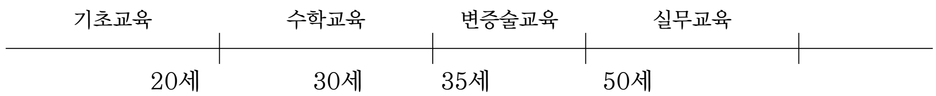
① 소크라테스의 산파법
② 듀이의 『수의 심리학과 그 산술 교수법에의 적용』에 따른 진보주의
③ 반영적 추상화의 수학 학습을 소개한 피아제의 조작적 구성주의
④ 잠재적 발달수준(ZPD)을 고려한 비고츠키의 사회적 구성주의
⑤ 관계적 이해를 강조한 스켐프의 스키마 학습
⑥ 아동에 의한 수학의 구성을 주장한 딘즈의 활동주의
⑦ EIS 표현을 통한 브루너의 발견학습
⑧ 선행조직자를 활용한 오수벨의 유의미 수용학습

3.1. 소크라테스[70]의 산파법(대화법)

1) 소크라테스의 수학 교수·학습관

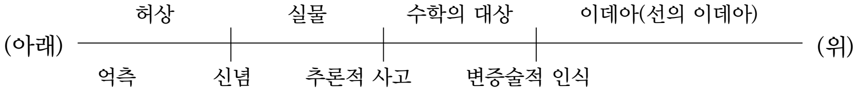
① 수학은 영혼이 순수하게 지성 자체를 이용하여 진리로 향하지 않을 수 없게 하는 학문이며 철인(哲人)의 교육을 위해 반드시 필요한 학문이다.

㉠ 철학자 군주가 될 사람은 수학적 학문을 배운 다음에 변증술을 학습해야 한다.



㉡ 수학교육은 〈선분의 비유〉에서 수학적 사유가 놓인 위치에 상응하며, 〈동굴의 비유〉에서는 하늘의 별과 달을 바라보는 단계이고, 이데아로 나아가는 단계에서는 학문에서 아름다움을 느끼는 단계이다.

ⓐ 〈선분의 비유〉



70) Socrates, B.C 469~399

ⓑ 〈동굴의 비유〉 그림자 → 실물 → 별과 달 → 태양

ⓒ 〈아름다움의 이데아로 나아가는 네 단계〉

육체의 아름다움 → 제도의 아름다움 → 학문의 아름다움 → 아름다움의 이데아

② 수학적 개념에 대한 정의와 논의는 덕, 용기, 정의(正義) 등의 개념과 비교해볼 때 개인의 이기심으로부터 자유로워질 수 있기 때문에 대화로써 진리 추구의 본질적인 과정을 실현할 수 있는 대상이다.

③ 수학을 지도할 때에는 '의견'의 도출, 논박을 통한 무지의 자각과 탐구의욕의 유발, 지식의 상기를 돕는 조산(助産) 과정을 거치는 산파법을 이용해야 한다.

④ 교사는 지식을 '가르쳐 주거나' 설명해 주는 역할을 하기보다, 단지 질문만을 하여 아동의 영혼에 내재된 '지식'을 상기하도록 도와주는 산파여야 한다.

2) 소크라테스와 메논(Menon)의 사동과의 대화

① 메논이 소크라테스에게 '덕은 가르쳐질 수 있느냐?'고 물었고 이에 소크라테스는 자신이 무지자이므로 자신이 질문을 할 테니 답을 하라고 메논에게 요청한다. 결국 메논은 소크라테스의 집요한 반박으로 무지를 자각하게 되며 소크라테스가 같은 무지자로서 덕에 대한 탐구를 함께 하자고 메논에게 제안한다. 메논은 그 당시 소피스트들의 '탐구불가능설'[71]을 소크라테스에게 제기한다. 이에 소크라테스는 영혼불멸설(靈魂不滅設), 지식의 선재성(先在性), 탐구와 학습에 대한 '상기설(想起設)'을 제기하여 인간은 새로운 지식을 탐구하면서 학습할 수 있으며, 자신이 배우는 지식과 다른 사람이 배우는 지식이 같은 것이라 한다.

㉠ 영혼불멸설: 인간의 영혼은 새로운 육체를 빌어 거듭 태어나는 불멸의 존재이다.

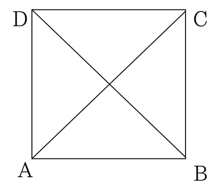
㉡ 지식의 선재성: 인간은 태어날 때 모든 지식을 잠재적인 상태로 가지고 태어난다.

㉢ 상기설: 인간은 모든 지식을 잠재적인 상태로 가지고 태어나면서 가변적이고 불안정한 '의견'을 가지게 되는데, 이를 논박하여 무지를 자각시킴으로써 탐구를 유발시켜 진정한 '지식'을 마치 산파가 아기를 받아내듯이 상기시켜 받아낼 수 있다.

② 플라톤의 대화편 「메논」에는 주어진 정사각형의 넓이의 두 배가 되는 넓이를 갖는 정사각형을 구하는 수학문제 풀이의 발견을 안내하는, 소크라테스와 메논의 사동과의 유명한 문답식 대화가 포함되어 있다.

71) 탐구불가능설: 모든 지식은 알든가 모르든가 둘 중의 하나이며, 알고 있는 사람은 탐구할 필요가 없으며, 알고 있지 못한 사람은 자신이 어떤 지식을 알게 되었다고 하더라도 그것이 원래 찾으려고 했던 것인지 알 수 없으므로 학습자가 스스로 새로운 것의 탐구와 발견을 하는 것은 불필요하거나 불가능하다. 즉 지식은 그것을 알고 있는 다른 사람이 가르쳐주어야 한다. 그러나 그것을 알고 있는 사람은 다른 사람으로부터 가르침을 받아서 알게 되므로 학습의 기원은 설명할 수 없다.

…



소크라테스: 내 말에 대답해 줘. 넌 이런 정사각형을 알고 있지?

사　　동: 네, 알고 있습니다.

소크라테스: 이 정사각형에서 이 네 변이 같다는 것도 아느냐?

사　　동: 네, 그렇습니다.

소크라테스: 그리고 이 정사각형의 한복판을 지나도록 그은 선은 서로 같겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 이와 같은 정사각형으로 이것보다 큰 변을 가진 것과 이것보다 작은 변을 가진 것이 있겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 만일 이 변의 길이($\overline{AB}$)가 2피트, 이 변($\overline{AD}$)이 2피트라면 전체 넓이는 몇 평방피트겠니? 이렇게 생각해 봐. 이 변은 2피트, 그리고 이 변은 단지 1피트라면 전체 넓이는 2평방피트가 되겠지?

사　　동: 네.

소크라테스: 그런데 이 변은 이 변과 같이 2피트이므로 그것의 2배가 되겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그러니 2의 2배의 평방피트가 되겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그럼, 2의 2배의 평방피트는 얼마나 되나? 계산해서 말해 보아라.

사　　동: 4평방피트입니다.

소크라테스: 또 하나 묻겠다. 이와 똑같은 것으로 넓이가 이것의 2배가 되는 정사각형이 있을 수 있겠지? 그러니까 이 정사각형처럼 같은 변을 가진 것 말이다.

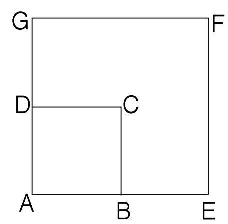
사　　동: 네, 그렇습니다.

소크라테스: 그건 넓이가 몇 평방피트이냐?

사　　동: 8평방피트입니다.

소크라테스: 그러면 그 정사각형의 각 변은 몇 피트냐? 이것은 2피트이었지? 넓이가 이것의 2갑절인 정사각형의 한 변의 길이는 얼마이겠느냐?

사　　동: 그 두 갑절입니다.



소크라테스: 얘야, 너는 넓이가 2배인 정사각형은 변의 길이가 2배가 되어야 한다고 생각하지? 이 변은 길고 이 변은 짧은 그런 사각형이 아니라, 네 변이 모두 같은 정사각형, 그리고 넓이가 이것의 2인 정사각형을 이야기하고 있다는 것을 생각해 봐. 그래도 아직 변의 길이가 2배로 되어야 한다고 생각하니?

사　　동: 물론입니다.

소크라테스: 여기(AB)에 이만큼(BE) 덧붙이면 이것(AE)은 이것(AB)의 2배가 되겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 이런 변 4개로 되는 정사각형의 넓이가 8평방피트가 된단 말이지?

사　　동: 네.

소크라테스: 그럼, 이 변 위에 같은 4개의 변을 그려보자. 이것이 넓이가 8평방피트짜리 정사각형이란 말이지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그런데 이 속에는 정사각형이 네 개가 있고 각각의 넓이는 4평방피트가 아니냐?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그럼 몇 평방피트가 되느냐? 이것의 4배가 아니냐?

사　　동: 그건 그렇습니다.

소크라테스: 그런데 4배와 2배는 다르지 않느냐?

사　　동: 다릅니다.

소크라테스: 그러니까 얘야. 변의 길이가 2배가 되면 넓이는 2배로 되는 것이 아니라 4배로 되는 것이다.

사　　동: 그렇군요.

소크라테스: 4평방피트의 4배는 16평방피트가 아니냐?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 넓이가 8평방피트인 정사각형의 변은 몇 피트이겠느냐? 네가 생각한 것은 넓이가 4배인 정사각형이 아니냐?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 넓이가 4평방피트인 정사각형은 변의 길이가 이것의 절반이지?

사　　동: 네, 그렇습니다.

소크라테스: 좋아, 그러면 넓이가 8평방피트인 정사각형은 이것의 두 갑절이고 이것의 절반이겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그러면 그 정사각형의 변은 이것보다 길고 이것보다 짧지?

사　　동: 그렇게 생각됩니다.

소크라테스: 그래 그래. 네가 생각하고 있는 그대로 대답하면 돼. 이 변의 길이는 2피트이고 이 변의 길이는 4피트이지?

사　　동: 그렇습니다.

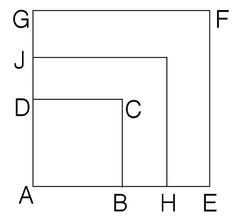
소크라테스: 넓이가 8평방피트인 정사각형의 한 변의 길이는 2피트보다 길고 4피트보다 짧겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그럼 그 변의 길이는 얼마일까 생각해 봐.

사　　동: 3피트라고 생각합니다.

소크라테스: 자. 이 변(AB)의 반을 덧붙이면 3피트가 되겠지? 이것(AB)이 2피트, 이것(BH)이 1피트, 그리고 이쪽도 마찬가지로 이것(AD)이 2피트, 이것(DJ)이 1피트, 이것이 네가 말한 정사각형이지?



사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그렇지만 이 변이 3피트, 이 변도 3피트이면 전체의 넓이는 3×3 평방 피트가 되지 않겠느냐?

사　　동: 분명히 그렇습니다.

소크라테스: 3×3 평방 피트는 얼마이냐?

사　　동: 9평방 피트입니다.

소크라테스: 그런데 우리가 구하고자 하는 것은 넓이가 얼마인 정사각형이냐?

사　　동: 8평방 피트입니다.

소크라테스: 그렇다면 한 변의 길이가 3피트인 정사각형은 넓이가 8평방 피트인 정사각형은 아니지?

사　　동: 아닙니다.

소크라테스: 그럼 그 변의 길이는 얼마이겠느냐? 분명히 말해 봐. 잘 생각해 보고 그 변을 그림으로 나타내 보아라.

사　　동: 정말이지 모르겠습니다.

소크라테스: …. 얘야. 여기에 넓이가 4평방 피트인 정사각형이 있지?

사　　동: 네.

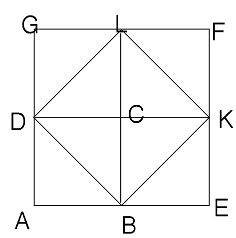
소크라테스: 이것($ABCD$)과 같은 이것($BEKC$)을 첨가할 수 있겠지?

사　　동: 네.

소크라테스: 그리고 이와 같은 이것($CLGD$)을 세 번째로 첨가할 수 있지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 이 각($\angle KCL$)에 이것($KFLC$)을 끼워 넣어도 좋지 않겠나?



사　　동: 그렇지요.

소크라테스: 그렇게 하면 이 4개는 같은 정사각형이 되겠지?

사　　동: 그렇습니다.

소크라테스: 그럼 어떤가. 이것($AEFG$) 전체는 이것($ABCD$)의 몇 갑절이 되나?

사　　동: 4갑절이 됩니다.

소크라테스: 그런데 앞의 문제에서는 2갑절이 되어야 했지? 기억하고 있나?

사　　동: 네.
소크라테스: 한 모서리와 다른 모서리를 이은 이 선(DB, BK, KL, LD)은 각각 정사각형을 둘로 나누고 있지 않느냐?
사　　동: 그렇습니다.
소크라테스: 이들 네 개의 선은 모두 길이가 같고 또 하나의 정사각형을 이루지 않느냐?
사　　동: 그렇습니다.
소크라테스: 그럼 생각해 보아라. 이 정사각형의 넓이는 얼마인가?
사　　동: 모르겠습니다.
소크라테스: 정사각형이 넷이고, 모서리를 연결하는 선은 네 개의 정사각형을 각각 반으로 나누고 있지 않느냐?
사　　동: 그렇습니다.
소크라테스: 이런 것(BCD)이 이($BKLD$) 속에는 몇이나 있지?
사　　동: 넷이요.
소크라테스: 이것($ABCD$) 속에는 몇 개 있느냐?
사　　동: 둘이요.
소크라테스: 넷은 둘의 몇 배이냐?
사　　동: 두 배입니다.
소크라테스: 그럼 이 정사각형($BKLD$)의 넓이는 몇 평방 피트이냐?
사　　동: 8평방 피트입니다.
소크라테스: 그 변은 어느 것이냐?
사　　동: 이것(DB)입니다.
소크라테스: 넓이가 4평방 피트인 정사각형의 한 모서리와 다른 모서리를 연결한 선 말이지?
사　　동: 그렇습니다.
소크라테스: 학자들은 그것을 대각선이라고 부른다. 그러면 메논의 사동아, 너는 넓이가 2배가 되는 정사각형은 그 대각선으로 된 정사각형임을 인정한단 말이냐?
사　　동: 그렇습니다.

3) 지식 교육 방법 및 수학 학습-지도 방법

① 소크라테스는 노예 소년에게 질문만하고 아무것도 가르치려 하지 않았지만 노예 소년은 한 번도 배운 일이 없는 기하학적 지식을 '알게' 된다. 즉, 소크라테스식의 지도는 학교 교육을 받은 일이 없는 노예 소년이라도 수학을 탐구하여 배울 수 있음을 보여준다.

② 처음에 학생은 자신이 무지함을 교사의 질문에 답을 하면서 스스로 자각하게 되고, 알고

자 하는 강한 동기가 발생하며, 교사의 계속적인 적절한 질문과 교사의 안내에 따라 결국에는 올바르게 답하게 된다.

교사의 질문 ➡ 학생의 자신 있는 (틀린) 대답 ➡ 교사의 반박 ➡ 학생은 자신의 무지를 자각하고 당혹해함 ➡ 학생의 알고자 하는 강한 동기 유발 ➡ 교사의 질문 ➡ 학생의 올바른 답 상기

③ "지식교육이란" 학생에게 모르는 지식을 '가르치는' 것이 아니라, 대화를 통하여 학습자가 소유한 부정확한 '의견'을 논박하여 무지를 자각시킨 다음 소위 망각된 '지식'을 상기해 내도록 도와주는 조산(助産)과정이다.

④ 교사는 소크라테스식의 대화법을 수업시간에 이용하기 위해 우선 가르칠 내용과 관련하여 철저하게 사고를 한 다음(사고실험) 학생에게 차례로 질문을 하고 학생은 주로 '네/아니오'라고 대답하는 정교한 학습–지도 방법을 이용해야 한다.

교사	학생
· 학생이 발견할 핵심적인 내용을 거의 제시 · 학생에게 확인만 함 (네/아니오) · 너무 친절하게 상기를 도와줌	· 교사의 질문에 '네/아니오'로만 대답 · 학생 자신의 능동적인 진리탐구가 적음 · 학생 스스로 탐구해 발견해내고 있는 것은 아님

따라서 소크라테스의 방법에서 교사의 '지적인 권위'는 엄존하며 수업의 주도권도 교사 쪽에 있다.

⑤ 가장 효과적인 수학 학습–지도 방법은 학생들에게 질문을 던져 학생들 자신의 의견을 개진하도록 한 다음 그것을 논박하여 무지와 곤혹감을 야기 시켜 알고자 하는 마음을 유발하도록 안내하고 결국 대화를 통해 원리를 발견시키는 방법이다(=부정적 수업).

> 어떤 지식을 모르고 있는 것처럼 보이는 사람에게도 그 내면에는 그에 대한 올바른 지식이 내재하고 있다. 하지만 명료한 상태로 있는 것이 아니라 마치 꿈결에서처럼 아련하고 어렴풋하게 존재하고 있으며, 이를 대화를 통해 명료히 드러낼 수 있다. 학습은 그러한 망각된 지식을 상기하는 과정으로, 그것을 돕는 것이 교육이요 교사의 임무이다.

⑥ 교사가 산파의 역할을 잘 수행하기 위해서는 가르칠 내용에 대해 잘 알고 있어야 하나, 가르칠 내용이 어떤 상식적 견해에 대비되는 학문적 견해인지를 알고 있어야 한다. 또한 가르칠 내용에 담겨 있는 질문이 무엇인가를 잘 알아야 한다.

4) 사고실험(思考實驗)

① 교사가 지도에 앞서 상상 속에서 강의하고 학생들과 대화하고 토론을 하며 수업을 진행시키는 과정이다.
② ‘사고실험’에 의한 수업에서 아동의 사고활동을 무엇보다 중시하지만 수업의 주도권은 교사에게 있다.

3.2. 듀이[72]의 산술교육-측정활동으로부터 수 구성

듀이는 흔히, 실용주의 철학과 진보주의 교육의 대표자이며 20세기 미국이 낳은 최대의 교육학자라고 불리어진다. 특히, 듀이의 주요 저서인 『민주주의와 교육』은 현대 교육학의 가장 중요한 문헌으로서 현대 교육학에서 논의되고 있는 대부분의 주제들이 그 속에 취급되어 있다. 듀이의 문제해결 중심 학습방법은 현대 수학교육의 문제해결 중심 교육의 사상적 배경과 방법적 지침이 되고 있다고도 볼 수 있다. 또한 듀이는 그 이전까지의 ‘활동주의’ 교육사상의 집결체인 동시에 현대 활동주의 교육사상의 모체라고 말해지기도 한다. 뿐만 아니라 듀이는 근래에 힘 있게 등장하고 있는 수학교육철학인 구성주의의 사상적 근원으로서 논의에 등장하기도 한다.

1) 교육철학

① 진보주의 교육(The Progressive Education) 운동: 20세기 초반에 듀이의 교육 사상에 따른 혁신적 교육운동으로 아동 중심의 활동주의 교육, ‘생활 단원(life unit)’ 학습, 문제 교수법(problem method) 등이 강조되고, 지역 사회 학교 운동이 일어났다.
② 교육은 인간이 삶을 영위하는데 필수적인 조건이며, 삶의 사회적 연속성을 유지, 발전시켜 나가는 수단이다.
③ 교육은 계속적인 경험의 재구성을 통한 성장 활동이다. 따라서 교육과정은 활동을 통한 경험의 재구성 과정으로 볼 수 있다.
④ 어떤 이론의 가치는 실제에 비추어 정당화될 때 가능한 것이다. 특히 수학의 발생 또는 기원 역시도 ‘실제적 용도’ 때문에 만들어진 것이다. 따라서 수학교육과정은 현실 사회의 문제해결에 필요한 생활 경험으로 이루어져야 한다.

72) John Dewey(1859~1952), 실용주의 · 도구주의 철학에 입각한 경험중심 교육사상의 대표자, 미국이 낳은 20세기 최대의 교육학자

수학을 공부해야 하는 이유

: 수가 공부꺼리인 것은 그것이 이미 수학이라는 학문 분야를 이루고 있기 때문이 아니라, 그것이 우리의 행위가 이루어지는 세상의 성질과 관계를 나타내기 때문이며 우리의 목적 달성 여부를 결정하는 요인이 되기 때문이다. … 공부가 효과적인 것으로 되려면 학생이 다루는 수학적 지식이 자기에게 관심이 있는 활동의 결실을 얻는 데에 중요한 역할을 한다는 것을 알아야 한다. 즉, 우리가 수학을 공부해야 하는 이유는 수학이 우리의 목적 달성에 도움이 되는 수단이기 때문이다.

2) 산술교육론 『수의 심리학과 산술교수법에의 적용』[73)]

① 수학이란 사회적 삶의 현실과의 관련 속에서 제기되는 문제해결을 위한 도구로써 구성된 것이다.

② 수란 생활의 필요에서 비롯된 측정이라는 인간 활동의 소산이다.

③ 수의 교육은 측정 활동을 통해서 수 발생의 과정을 아동에게 경험시키는 형태로 진행되어야 한다. 즉, 수 관념은 먼저 모호한 전체를 인식하고 그것을 부분으로 나누고 그것을 다시 종합하는, '분별'과 '관계'라는 구성적인 정신 활동을 그 본질로 한다. 따라서 수의 지도는 먼저 모호한 전체를 인식하고 그것을 구별하고 추상하고 그룹 짓는 정신 활동을 자극하는 방식으로 이루어져야 한다.

3) 수 지도

① 수 지도

㉠ 수[74)]: 측정하고자하는 전체량과 단위량의 비이다.

㉡ 수 지도: 측정해야 할 막연한 전체량을 도입하고 그것을 측정하기 위해 단위를 선택하고 전체량과 단위와의 비로써 수가 구성되도록 한다. 즉, 분석을 통하여 단위를 선택하고 종합을 통해 전체량과 단위와의 비로써 수를 구성하도록 지도한다.

ⓐ 분석: 대상을 서로 다른 몇 개의 개별적인 단위로 분석하는 것

ⓑ 종합: 단위의 유사성의 인식으로 대상을 하나의 전체로 보는 것

㉢ 변별과 관계 짓기, 분석과 종합이라는 심적 활동의 산물, 사물을 단지 사물이 아니라 전체의 부분으로, 목적을 위한 수단으로 다룰 때에 비로소 수는 발생한다.

---

73) '활동을 중시하는 경험의 재구성으로서의 교육', '심리와 사회에 기반하는 교육'이 무엇인가를 수라는 주제를 중심으로 구체적으로 설명하고 있다.

74) 수: · 다수 (multiplicity) – 6은 어떤 단위의 6배
· 단일체 (unity) – 5×6에서 6은 다른 수를 구성하는 한 단위

② 단위는 고정된 것이 아니라 상대적인 것이며 양의 분석을 위해 인간이 만든 결과물이다.
(예) 6이란 단위가 1이면 6으로, 단위가 2이면 3 그리고 단위가 3이면 2로 표현된다.

③ 듀이의 입장을 충분히 반영한 수와 산술교육에 적합한 교구는 퀴즈네어(cuisenaire) 색막대이다.

4) 결론

① 듀이가 강조한 '합리적인' 산술 교수법이란 '막연한 전체(vague unity) → 단위(unity) → 확정된 전체(defined unity)'의 순서를 따른다.

② 산술은 생활에서 출발하여야 하며 생활 가운데에서 문제해결을 위해 구성되어야 한다. 따라서 산술교재는 도입문제로 시작해야 한다.

③ 듀이는 학교 수학이 현실 문제 상황의 분석을 통한 구성활동에 의해 실용적인 도구적 지식으로 학습되기를 기대했다.

④ 듀이의 지식론은 실용주의적 지식관으로 결국 수학은 과학이라 할 수 있다. 즉 수학은 과학적 개념과 마찬가지로 경험적 탐구활동에서 기인하며 수 관념의 심리적 구성활동이 강조되어야 한다.

3.3. 피아제[75]의 반영적 추상화를 이용한 학습

> 피아제는 스위스 출신의 심리학자로서 유치원과 초등학교 수준의 아동을 대상으로 인지발달과정에 대하여 연구하였다. 그는 심리학을 공부하기 전에 생물학을 공부한 바 있는데, 생물체의 진화론에 관심을 가졌으며, 이것이 그의 인지심리학 연구에 많은 영향을 미쳐 아동의 인지능력이 생물체의 진화과정과 같이 어떤 단계를 따라 발달한다고 보고 그 단계를 밝혔다. 또한 인간의 인지능력은 환경과 균형을 이루기 위해 본능적으로 작용(균형이론)하며 환경과 균형을 이루기 위해 발생, 발달한다고 보았다. 그리고 지식의 습득도 교사에 의하여 전달되는 것이 아니라 학생 스스로가 동화와 조절의 인지활동을 통해 구성한다고 보았다. (조작적 구성주의)

1) 발생적 인식론

① 피아제는 생물학적인 발생적 인식론자이면서 발달심리학자[76]로 아동들의 지능발달을

75) Jean Piaget, 1896~1980

76) 피아제 심리학의 기본 가정은 '모든 인간은 모든 지식의 바탕이 되는 기본적인 소양을 가지고 있으며 이를 명확히 하고 재구성하기 위해서는 적절한 문제에 부딪혀야 한다'이며 이러한 가정은 멀리 플라톤에서부터 찾아볼 수 있다. 즉, 플라톤에서 칸트(Kant)와 헤겔(Hegel)을 거쳐 듀이(Dewey) 그리고 형태심리학자(Gestalt Psychologist)로 이어져 피아제와 브루너(Bruner) 심리학으로 연결된다.

생물학적 성장과 발달의 한 특수한 사례로 인식하고 그에 따라 지능발달 과정을 생물학적 법칙과 이론에 의해 설명하였다.

생물학적인 환경에의 적응기능과 조직기능 ≈ 지적인 지식에의 적응기능과 조직기능

② 인간은 성장하는 동안 지적 환경의 요구를 인지구조에 수용(동화)하거나 변형(조절)하여 그 환경에 적응함으로써 지식을 습득한다. 따라서 아동이 인지발달 과정을 결정하는 주체이다.

③ 합리적 사고와 지식의 본질은 내면화된 가역적 행동 즉, 조작(=operation)이며 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지구조를 쉠(schèmes)이라 부른다.

㉠ 젖을 빠는 schèmes, 쥐는 schèmes, 던지는 schèmes, 순서 짓고 배열하는 schèmes, 수를 세고 대응시키는 schèmes, 더하고 빼는 schèmes, 모든 대수적 · 기하학적 · 해석학적 조작의 schèmes 등 인간의 모든 행동과 조작을 가능하게 하는 인지적 작인이 되는 것이 schèmes이다.

㉡ 행동과 조작의 schémes은 적응상황에서 일반화되거나 분화되고 다른 schèmes과 조정되면서 보다 가동적이고 일반적인 구조로 재구성되어간다. 따라서 schèmes의 끊임없는 재구성 과정이 인지발달이요 학습이다.

④ 인지발달은 개인에 따라 사회 · 문화적 환경에 따라 상당한 개인차가 있을 수 있지만, 감각 · 운동 단계, 전조작 단계, 구체적 조작단계, 형식적 조작단계인 정해진 과정에 따라 일어난다.

2) 인지기능과 인지발달 4단계

(1) 인지기능: 조직기능 + 적응기능

내적기능 – 조직기능 외적기능 – 적응기능 ┬ 동화: 기존의 인지구조에 의한 대상의 해석 곧 인지구조의 일반화 └ 조절: 동화가 불가능할 때 인지구조의 분화와 조정

① 조직기능(organization)

㉠ 비교적 오랜 기간 동안 인지발달의 계속성을 유지시키는 원인이 되는 기능이다.

㉡ schèmes과 인지구조를 통합해 전체성을 구성하는 과정이다.

② 적응기능(adaptation)

㉠ 아동이 학습 환경에서 겪는 경험에 의해 그의 인지구조가 변화 · 발달하는 평형화

(equilibration) 과정을 의미한다.

· 아동들이 인지적 동화와 조절을 통해 자신들의 인지구조를 변화시키는 과정이다.

· 인지구조의 변화를 통해 현실적 상황에 순응하는 계속적이고 자기 통제적인 과정이다.

㉡ 동화(assimilation)

· 이미 학습된 지식과 기능을 이용해, 주어진 환경에 순응하는 과정이다.

· 주어진 정보는 이해되기 전에 현재의 인지구조에 적절하게 조절되는 과정을 거친 다음 인지구조에 통합된다.

(예) 자연수의 덧셈을 배운 어린이는 정수의 덧셈을 배울 때 이미 내적으로 형성되어 있는 schèmes(자연수의 덧셈)에 맞추려고 한다.

· schèmes과 인지구조에 양적 변화를 가져다주는 원인이다.

㉢ 조절(accommodation)

· 동화와는 반대로 정보를 통합하기 위해 주어진 정보에 맞추어 기존의 인지구조를 구조적으로 변화시키는 과정이다. 따라서 새로운 사태에 조절한다 함은 이전의 구조가 분화해서 새로운 구조를 만들어 내는 것이다.

· schèmes이나 인지구조에 질적 변화를 일으키는 원인이자 과정이다.

· 일반적 구조를 특정 사례에 적용하게 된다.

(예) 자연수의 사칙계산에 숙달한 학생은 정수의 사칙계산으로 조절한다.

(2) 인지발달(지능발달) 4단계

가. 인지발달 단계 형성의 준거

· 다음 단계로의 인지발달은 지능의 비약적 도약이나 인지구조의 질적 대전환이 수반된다.

· 아동은 반드시 감각운동 단계, 전조작 단계, 구체적 조작 단계, 형식적 조작 단계와 같은 보편적 순서에 따라 발달단계를 거친다.

· 특정 단계는 여러 개의 schèmes과 다양한 인지구조로 구성되어 있다.

나. 인지발달 단계

감각운동 단계	➡	전조작 단계	➡	구체적 조작 단계	➡	형식적 조작 단계
~ 2세		2세 ~ 7세		8세 ~ 10, 11세		11, 12세 ~

[1] 감각운동 단계(Sensory-motor Stage): 출생 후부터 약 2세까지

① 가시적 행동으로 나타나는 신체적 행동만을 수행한다.
② 반사적 행동만을 보이며, 인지구조는 반사적 행동에 수반되는 감각적 반응과 신체적 운동을 통해 발달한다.
③ 모든 행위는 타고난 행동으로부터 지적 활동으로 변한다. 즉, 반사적 · 자기중심적 · 비조직적 인지내용으로부터 도구적 환경의 요구에 적응하면서 대체로 조직화된 인지구조를 갖게 된다.
④ 지능발달 순서
㉠ 감각운동 schèmes에 의해 반사적 행동만을 일으킨다(반사적 활동). … 약 1개월
㉡ 습관적 활동이 일어난다(처음으로 일차 순환반응을 나타냄). … 1~4개월
: 아동의 행동은 비목적적이며 행위 그 자체를 위한 반복적 활동을 통해 하나의 습관적이고 조직적 행동으로 형성된다.
㉢ 개별적 활동이 통합 조정된 복합적 행동을 보이기 시작한다(조정활동). … 4~8개월
: 최초로 사물의 항존성을 인식한다.
㉣ 자신의 활동을 새로운 상황에 적용하거나 일반화시킨다. … 8~12개월
: 이차 순환반응을 조정하게 되고 처음으로 사물을 자신의 의지대로 조작(지적 활동)한다.
㉤ 자신의 활동을 탐색하고 분화시킨다. … 12~18개월
: 삼차 순환반응이 발달하고, 새로운 문제해결을 위한 새로운 형태를 창안할 수 있게 되며, 어떤 목적을 달성하기 위해 활동 schèmse을 체계적으로 응용하는 지적활동을 보이기 시작한다.
㉥ 자신의 행동을 정신적으로 표상화 하게 된다. … 18~24개월
: 정신적 표상화를 통해 적응을 위한 지적 활동이 가능해진다.
⑤ 아동의 특징
㉠ 육체적 정신적 활동을 schèmes으로 구성하기 시작한다. 즉, 출생부터 2세까지의 어린이들은 본능적으로 빨기, 쥐기, 울기 등의 schèmes을 배운다.
㉡ 감각과 운동을 조직하는 것을 배운다.
㉢ 물리적 대상에게 이름을 붙이는 것을 배운다.
㉣ 시야에서 사라진 물체는 없어진 것이 아님을 배운다.
(예) 이 단계의 마지막 부분에 있는 아이들은 아버지가 출근을 위해 문 밖으로 나가고 없어도 저녁이면 다시 돌아온다는 것을 이해한다.

[2] 전조작 단계(Preoperational Stage): 2세부터 약 7세까지

① 감각에 의존하는 행동은 벗어났으나 행동이 직관적이며 아직까지 가역적 사고가 결핍되어 있어 조작 활동이 일어나지 않는다.

② 인지구조의 통제에 따른 완전한 내적 사고활동이 부족하다.

③ 지능발달 순서

㉠ 전개념적 사고 단계 … 2~4세

: 아동의 사고가 부호, 기호, 정신적 영상 등으로 표상화되기 시작하여 표상화된 사고에 의해 언어가 급속도로 발달한다.

㉡ 직관적 사고 단계 … 4~7세

: 논리적 방법으로 주어진 문제를 해석하고 설명하기 시작한다. 그러나 귀납적 추론이나 연역적 추론과 같은 완전한 논리를 추리할 수 없기 때문에 직관적으로 문제를 해결하는 경우가 일반적이다.

④ 아동의 특징

㉠ 모방을 잘하며, 모든 사물을 자기중심적으로 바라본다. 따라서 자기와 외부세계를 구분하지 못한다.

㉡ 사실과 환상을 구별하지 못한다. 따라서 어린이들의 거짓말은 도덕성의 결핍에 의해서가 아니라 현실과 그들의 상상적 세계를 구별하지 못하기 때문에 일어나는 경우가 많다.

㉢ 자기의 생각을 다른 사람들도 다 같이 가지고 있다고 믿는다.

㉣ 무생물도 생명체와 같이 감각을 갖고 있다고 믿는다(항존성 인식).

㉤ 하나와 다수 사이를 구별하지 못한다. 예를 들면, 많은 백화점 앞에 산타할아버지가 하나씩 있어도 산타할아버지는 한 사람이라고 생각하며 이상하게 생각하지 않는다.

㉥ 가역적으로 사고하는 것에 대해 어려움을 느끼며, 어떤 행동을 재현하는데 어려워한다.

㉦ 가역적 사고를 할 수 없기 때문에 사물들 사이의 포함관계를 제대로 인식하지 못한다.

㉧ 한 대상이나 상황에 대한 두 가지 측면을 동시에 생각할 수 없다.

㉨ 귀납추론(구체에서 일반을 이끄는 추론)과 연역추론(일반에서 구체를 이끄는 추론)은 불가능하며 구체적 사실에서부터 구체적 사실로의 추론만 가능하다.

㉩ 두 현상이 거의 동시에 일어날 때 인과관계를 이해하거나 말할 수는 있지만, 어느 정도 시간적 간격을 두고 일어나는 현상들 사이의 인과관계를 인식하지는 못한다.

㉪ 자기의 믿음에 대한 이유를 제시할 수 있다.

㉫ 동적인 개념을 습득하기 시작한다.

[3] 구체적 조작 단계(Concrete Operational Stage): 7세에서 12, 13세에 걸쳐 지속, 그러나 그 이후까지도 지속되는 경우 존재

① 직관적 사고를 벗어나 논리적 사고 형태인 가역적 사고와 같은 조작적 지능을 보이기 시작한다. 따라서 논리적으로 추론할 수 있는 능력을 갖추게 된다. 그러나 직접 경험할 수 있는 구체적 대상에 한정되어 있다. 이 때, 가역성은 전도(inversion)나 부정(negation)과 상반(reciprocity) 두 가지 형식 중 하나로 나타난다.

㉠ 전도나 부정: 이미 수행된 조작을 취소하는 것, 조작과 그 역조작의 결과는 영 조작, 곧 항등 조작이다.

㉡ 상반: 차이를 보정해주는 것, 조작과 상반 조작의 결과는 평형이 된다.

② 구체적 조작단계의 말기에 도달되어야 사물들의 상대적 위치나 특정 공간 내 사물들의 정확한 거리와 순서를 깨달을 수 있게 된다.

③ 아동의 특징

㉠ 자기중심적 행동이 급격히 줄며, 혼자 노는 대신 다른 아이들과 어울려 놀기를 좋아한다.

㉡ 여러 가지 특성이 있는 대상들을 구체적인 특성에 따라 집합과 부분집합으로 분류할 수 있으며, 한 대상의 여러 가지 특성을 동시에 생각할 수 있다.

㉢ 농담을 이해하기 시작한다. 하지만, 격언의 설명을 이해하는데 어려움을 느끼며 격언에 숨어 있는 뜻을 잘 이해하지는 못한다.

㉣ 여러 가지 보존 개념을 형성한다(아래 나열에 따라)

· 물질량의 보존: 물질의 양은 분할이나 변형과 관계없이 변하지 않는다.
· 수의 보존: 원소의 개수는 배열과 관계없이 변하지 않는다.
· 길이의 보존: 물체의 길이는 이동과 분할 혹은 변형과 관계없이 변하지 않는다.
· 넓이의 보존: 면의 넓이는 분할 혹은 변형과 관계없이 변하지 않는다.
· 무게의 보존: 물질의 무게는 분할이나 변형과 관계없이 변하지 않는다.
· 부피의 보존: 물체의 부피는 분할이나 변형과 관계없이 변하지 않는다.

㉤ 연산과 절차를 역순으로 할 수 있다.

㉥ 다른 사람의 견해를 이해하기 시작하며, 이 단계의 말기에서는 구체적인 예를 통하여 귀납추론과 연역추론을 하기 시작한다.

㉦ 역연산, 대입, 집합의 합집합과 교집합 구하기, 구체물을 크기 순서로 배열하기 등과 같은 계산을 수행할 수 있다. 그러나 이 연산들을 언어로 설명하거나 제시할 수 없다.

㉧ 판단과 논리적 추론 능력이 부족하다. 예를 들면, "영희는 순희보다 크다. 영희는 정희보다 작다. 세 사람 중 누가 제일 작은가?"같은 문제를 잘 해결하지 못한다.

㉨ 크기가 다른 한 묶음의 막대를 크기의 순서로 배열할 수 있다.

㉩ 정의를 잘 이해하지 못하며, 몇 개의 구체적 사실로부터 일반화를 할 수 없다. 예를 들면, 2+3=3+2, 8+11=11+8을 이해하면서도 이로부터 일반화된 교환법칙 $a+b=b+a$를 이끌어내지 못한다.

㉪ 변수를 포함한 수학적 기호 조작을 어려워하며, 대수를 의미의 이해를 통해서 보다는 공식의 암기에 의해 학습한다. 예를 들면, $(x+y)^2=x^2+y^2$, $\frac{a+b}{a}=b$, $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$라고 생각하는 경향이 있다.

㉫ 구체물 자료를 조작하여 여러 가지 모양을 창의적으로 구성할 수 있다.

㉬ 사물을 실제적으로 다루지 않고 개념 사이의 관계를 내면적으로 취급할 수 있다. 즉 개념적 표상과 그 관계를 다룰 수 있어 문제를 내면적으로 시행착오를 통하거나 가설의 검증을 통하여 해결할 수 있으며 새로운 아이디어를 이해하고 이미 획득된 개념과 관련지을 수 있다. 그러나 이러한 조작은 당시의 혹은 전에 행하여진 구체적인 대상의 취급과 직접 관련되며, 구체적 대상 없이 언어적 명제만을 다루는 형식적 수준에는 이르지 못한다.

⑤ 아동의 조작

㉠ 논리-수학적 조작: 불연속적 속성에 대한 지적 활동

㉡ 공간적 조작: 기하학처럼 사물들 사이의 관계보다 사물 내의 연속적 관계와 그 속성을 취급하는 활동

[4] 형식적 조작단계(Formal Operational Stage): 11, 12세 이상

① 자신의 사고내용과 과정을 생각하는 것이 가능하다. 즉, 조작 자체를 반성하는 반영적 추상화가 가능하다.

② 가설-연역적 추론이 가능하다. 즉, 추상적 사고가 가능하기 때문에 어떠한 형식의 가정이나 가설도 받아들일 수 있어, 어떤 문제에 직면할 때 가설을 설정하고 결론을 유도해 낼 수 있다.

(cf) 수학적 추론 과정으로서의 귀납추론과 유비추론 또한 형식적 조작단계에서부터 가능하다.

③ 아동의 특징

㉠ 구체적인 조작에 의존하지 않고 정신적 추상을 표현하거나 설명할 수 있다.

㉡ 많은 견해를 동시에 생각할 수 있다.

㉢ 자신의 활동을 객관적으로 평가할 수 있으며, 자신의 사고 과정을 반성할 수 있다.

㉣ 정리를 만들고, 가설을 세우고, 여러 가지 가설을 시험할 수 있다.

ⓜ 적절한 상황에서 정의, 법칙, 공식 등을 이해하고 사용할 수 있다.
ⓑ 귀납적 사고, 연역적 사고, 함의적 사고(만일 …이면 …이다.) 등을 할 수 있다.
ⓢ 순열과 조합, 명제, 상관관계, 확률 등의 복잡한 개념을 이해하고 응용할 수 있다.
ⓞ 무한대(무한히 큰 수)와 무한소(무한히 작은 수)의 개념을 인식할 수 있다.

3) 조작적 구성주의와 반영적 추상화

(1) '조작적 구성주의' 수학인식론

① 조작은 일종의 내면화된 행위로 가역성(可逆性)이 있는 것이고 항상 다른 조작과 연결되어 있으므로 결과적으로 전체적 구조의 한 부분으로 작용하여 이러한 구조가 지식의 기초를 이루게 된다.

② 논리-수학적 개념은 대상으로부터의 단순추상(경험적 추상화)에 의한 정적인 이미지가 아니라, 생물학적 유기체의 구조를 출발점으로 하여, 감각 · 운동적 구조를 거쳐, 행동의 일반적 조정(regulation)으로부터 '반영적 추상화(reflective abstraction)'[77]에 의해서 구성된 조작과 그것을 바탕으로 구성된 보다 고차원의 조작이다.

(예) 군의 심리적 발생: 형식적 조작기의 인간의 사고 양식은 군을 이룸

③ 조작적 schèmes은 논리-수학적 개념이며 수학의 본질이다. 즉 수학적 구조, 개념, 증명방법, 알고리즘, 명제, 정리 등 모든 것이 조작적 schèmes이다.

㉠ 논리-대수적 조작: 순수한 조작적 schème
㉡ 기하학적 조작: 표상적 schema(스키마)를 수반하는 조작적 schème
㉢ 함수 조작: 인과율과의 관련성이 강한 조작적 schème

④ 수학의 역사적 발생의 메커니즘과 개인에 있어서의 수학의 심리적 발생의 메커니즘 사이에는 평행선이 있으나 그 발생의 순서는 역이다. 왜냐하면 심리적으로 최초에 구성된 것은 논리적 · 반성적 분석에서는 최후에 나타나기 때문이다.[78]

(예1) 기하의 역사적 발달순서: Euclid적 성질 → 사영적 성질 → 위상적 성질
아동의 공간 표상 발달순서: 위상적 성질 → 사영적 성질 → Euclid적 성질

(예2) 함수개념의 역사적 발달순서: 비례관계 → 변수 → 특수한 대응관계
아동의 함수개념의 발달순서: 특수한 대응 관계 → 변수 → 비례관계

---

77) 행동이나 조작의 일반적 조정에 의한 추상화를 의미한다.

78) '행동과 조작의 schèmes'의 무의식 속에 깊이 묻혀있어 아주 당연한 것으로 여겨지는 것일수록 그것을 의식적으로 수학적 사고에 반영하는 데 오랜 시간이 걸린다.

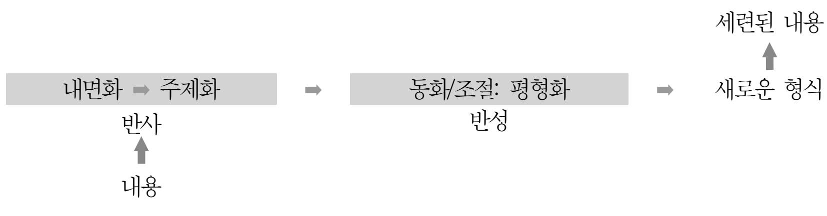
(2) 반영적 추상화

① 경험적 추상화와 반영적 추상화

경험적 추상화 (empirical abstraction)	의사경험적 추상화 (pseudo-empirical abstraction)	반영적 추상화 (reflective abstraction)
· 외부 대상이 갖는 성질들로부터 일반화된 지식을 이끌어내는 추상화	· 아동의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 추상화	· 활동(과 조작)에 대한 일반적 조정(regulation)으로부터 이루어지는 추상화
· 감각론적 · 경험론적인 사고방식을 나타내는 용어	· 내적인 구성을 나타내는 용어(단, 자신이 확인할 수 있는 구성 결과에 근거)	· 내적인 구성을 나타내는 용어
· 어린 아동이 큰 사과는 작은 사과보다 무겁다는 것을 발견하였다면(=물리적 경험) 그러한 성질은 아동이 작용하기 전에도 사과가 갖고 있던 성질이며, 아동이 그 성질을 단지 경험한데 불과하다. · 경험으로부터 무게의 개념을 추상하였다.	· 사과를 어떤 모양으로 늘어놓고 어떤 순서로 세어 보아도 개수가 같다는 것을 발견하였는데(=논리-수학적 경험) 이 때 사과를 통해 확인할 수 있어야만 그 구성을 실행할 수 있다. · 사과를 이용한 경험으로부터 집합의 원소의 순서와는 관계없는 원소의 개수라고 하는 개념을 추상하였지만 사과를 통해 확인할 수 있어야 한다.	· 사과를 어떤 모양으로 늘어놓고 어떤 순서로 세어 보아도 개수가 같다는 것을 발견하였다면(=논리-수학적 경험) 그러한 성질은 사과 자체와는 무관한 것으로서 아동은 자신의 활동과 그 결과에 대한 경험을 한 것이다. · 경험으로부터 집합의 원소의 순서와는 관계없는, 원소의 개수라고 하는 개념을 추상하였다.

(cf) 의사 경험적 추상화: 전조작적 수준의 아동이나 구체적 조작 수준의 아동은 자신이 확인할 수 있는 구성 결과에 근거하지 않고는 구성을 실행할 수가 없다. 이 경우에 그 결과의 확인이 대상에 행해진다고 하는 점에서는 경험적 추상화와 관련된 것처럼 보이지만 확인된 성질은 주체의 활동에 의해서 그 대상에 도입된 것이다.

② 반영적 추상화와 그의 메커니즘



㉠ 반영적 추상화는 반사와 반성이라는 두 가지 상보적인 과정의 나선적 교대에 의하여 진행된다.

반사(reflechissement)	반성(reflexion)
· 전 단계에서 얻은 것을 보다 상위의 단계로 옮겨 놓는 과정 · 내면화 과정(일련의 행동을 의식하여 표상함)과 주제화 과정(이전 단계의 행동이나 조작을 사고의 대상으로 인식함)으로 구성[79]	· 전 단계에서 이전된 것을 새로운 면에서 재구성하거나 혹은 거기에 이미 놓여져 있는 것과 전 단계의 요소와 관련짓는 과정 · 동화/조절을 통해 균형화를 이루려 함

㉡ 반성에 의하여 구성적으로 창조된 새로운 형식은 다음 단계의 반사과정에서 보다 세련된 내용으로 기능하여 결과적으로 끊임없는 반사와 반성의 순환이 이루어진다.

㉢ 반영적 추상화는 이전의 구성결과인 조작을 단지 바꾸어 놓는 식으로 새로운 조작을 구성하는 것이 아니라, 이전의 구성을 특별한 경우로 통합하면서 그것을 뛰어넘은 재구성을 한다.

③ 반영적 추상화의 예시

㉠ 구체적인 세기를 통한 덧셈 활동이 덧셈 알고리즘으로 공식화되는 과정

㉡ x를 $2x$로 대응시키는 활동이 함수 $y=2x$의 그래프 전체로 대상화(encapsulation) 되는 과정

㉢ 다양한 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분이 밑변의 길이의 반이 되고 밑변과 평행하다는 점을 확인하여 '삼각형의 중점연결정리'에 대한 가설을 설정하는 활동

㉣ 원 모양으로 배열되어 있는 공깃돌을 시계 방향으로, 시계 반대 방향으로 각각 세어 본 후 결과가 같음을 확인하여 '세는 순서에 관계없이 개수는 일정하다.'고 인식하는 활동

④ 반영적 추상화에 의한 수학적 지식 획득

㉠ 수학적 지식 획득은 반영적 추상화의 반사와 반성에 의해서 가능하다. 이 때, 반사된 내용은 반성에 의한 새로운 형식의 구성에 이르러 일시적으로 균형 상태가 되지만 곧바로 불균형에 빠지게 되어 보다 높은 균형을 위하여 반사와 반성이 계속 되풀이된다.

㉡ 균형이론: 새로운 사태에 당면하면 주체가 가지고 있는 schèmes과 그 사태 사이에 어떤 불일치가 포함되어 이 불일치를 해소하기 위해 동화와 조절기능이 작용하며 schèmes에 변화가 일어나 새로운 schèms이 구성되고 일시적인 균형이 확립된다. 따라서 탐구활동에의 동기를 유발하는 요인은 불균형이며 이를 균형화 함으로써 학습의 진행과 함께 점차 증대되는 방향으로 나아가게 된다(탐구학습 제공).

㉢ 피아제: "…우리는 나선적인 과정을 주장하고 있다. (관찰할 수 있는) 내용의 모든 반

---

79) 내면화의 예: 아동에게 빨간 칩과 노란 칩들을 마음대로 늘어놓게 했을 때, 빨간 칩만을 계속 늘어놓던 아동이 "이제는 노란 칩을 놓는다"라는 말을 했다면, 이는 아동이 빨간 칩을 놓고 있던 자신의 행동을 의식하기 시작한 것이며, 그 행동을 표상한 것이다.
주제화의 예: 덧셈을 하고 난 뒤 덧셈에 대해 반성하기 위해서는 덧셈의 과정을 새로운 사고의 대상으로 보며 '어? 왜 더하면 자꾸 커지지?'하면서 의문을 갖는 것이다.

사는 어떤 형식(반성)의 개재를 전제로 하며, 또한 이전된 내용은 반사에 의한 새로운 형식의 구성을 강요한다. 따라서 반사 → 반성 → 반사, 그리고 (혹은) 내용 → 형식 → 보다 세련된 내용 → 새로운 형식 등과 같이 끊임없는 교대가 행해진다. 그리고 (이 과정은) 절대적인 시작도 없고 끝도 없이 계속되어 개념영역은 점차 증대되어 간다…"

(3) 조작적 구성주의에 따른 수학과 학습-지도 원리

① 전-교육과정(pre-curriculum) 원리: 피아제의 공동연구자인 Inhelder 여사가 주장

㉠ 전조작 단계에 있는 초등학교 입학 전 아동에게는 수학적 개념의 지도가 아닌 논리적, 수학적 경험이 필요하다.

㉡ 논리적, 수학적 경험이란 기본적인 입체도형이나 평면도형을 손으로 조작하여 창의적으로 여러 가지 모양을 만들거나 분류하기, 순서적으로 배열하기 등과 같은 논리적이고 수학적인 사고 활동을 경험하게 하는 것이다.

㉢ 다음 단계에서의 수학적 개념의 이해와 계산 기능 등에 중요한 영향을 미치며, 유치원 교육에서 논리적, 수학적 경험을 중시한다.

② 활동적 학습원리

㉠ 수학적 개념을 추상적으로 지도하기 전에 구체적인 조작 활동이 선행되어야 한다.

㉡ 아동의 조작 활동을 촉진시키기 위해서는 도전감을 주는 적절한 문제와 활동자료를 제시해야 한다.

㉢ 학생의 활동을 촉진하기 위하여 교사는 탐구적인 질문을 제시하며 학생들은 소집단을 형성하여 토론과 탐구활동을 할 수 있게 하여야 한다.

㉣ 학생들의 자발적인 학습 활동을 촉진하기 위해서는 적절한 활동 자료가 절대적으로 필요하다.

㉤ 퀴즈네어 색막대, 딘즈의 대수블록과 성질판, 가테그노의 기하판 등과 최근에는 컴퓨터와 계산기를 이용하는 많은 활동자료들을 적극 활용해야 한다.

③ 통합의 원리

㉠ 아동에게 새로운 개념을 학습하게 할 경우 개념을 단편적이고 고립적으로 이해하게 하는 것으로 그치게 할 것이 아니라 아동이 가지고 있는 기존의 개념과 관련을 지어서 학습하게 한다.

㉡ 아동이 학습한 새로운 개념은 기존의 개념들과 밀접한 관계를 가지게 한다.

④ 조작적 원리

㉠ 조작(operation)은 사고의 기본적인 요소로 실제적인 행동이 내면화된 가역적인 행동이다. 따라서 사고는 이전의 행동이나 조작을 바탕으로 탐구활동을 통하여 구성된다.

㉡ 교육은 아동 자신에 의한 조작의 구성을 제일의 목표로 한다.

㉢ 학습의 결과는 같은 행동을 반복적으로 할 수 있을 뿐만 아니라 그 역순도 생각할 수 있어야 한다.

(예) 덧셈을 지도할 때 뺄셈의 개념을 탐구해 보게 하며, 어떤 명제의 참, 거짓을 생각할 때 그 역의 참, 거짓도 탐구해 보게 하는 것이 바람직하다.

⑤ 발달단계에의 순응

㉠ 아동의 인지 발달은 누구나 피아제가 제시한 인지 발달의 네 단계를 거친다.

㉡ 아동의 학습은 인지발달의 단계에 맞게 이루어져야 하며, 조기학습이나 지연학습을 할 필요가 없다.

㉢ 각 단계에 맞는 학습활동이 학습의 효과를 높이며, 조기학습을 한다고 해도 정상적으로 학습한 아동에 비하여 장기적으로 볼 때에는 별 차이가 없다.

4) 수학교육에 주는 시사점

① 학습은 조작의 바탕이 되는 여러 가지 활동을 중심으로 구성되어야 한다. 즉, 학생들은 여러 활동의 내면화로부터 반영적 추상화를 통하여 보다 고차적인 내용을 학습해 나가도록 해야 한다(활동적 학습).

② 학습자에게 구체물을 다루는 경험을 충분히 제공할 필요가 있다. 특히 초등학교 저학년에서부터 수학 학습의 기초가 되는 구체물의 조작을 충분히 제공하여 장래 학습의 토대가 될 수 있도록 해 주는 것이 필요하다(구체적 조작의 강조).

③ 학습자가 인지적 불균형을 느낄 수 있는 다소 복잡한 갈등 상황을 제공해야 한다. 왜냐하면 학습자의 인지발달이나 개념의 발달은 인지적 불균형의 해소를 위한 동화와 조절의 균형화 과정에 바탕으로 두므로 이를 위하여 일시적 균형 상태에 있는 학습자의 현재 수준보다 조금 더 복잡한 상황(갈등을 포함한 상황)을 경험하게 하여 보다 높은 수준의 균형을 위한 동기를 부여해야 한다(갈등 상황 제공).

④ 학습자의 반성적 사고를 촉진하기 위한 교사의 의식적 노력이 필요하다. 만약 학생들의 반성을 강조하지 않을 때 학생들은 자신이 했던 활동과 수업의 결과로 제시되는 최종 지식의 관련을 인지하기 힘들 수도 있으며 활동의 효과를 반감시킬 수 있다(반성적 사고의 촉진).

⑤ 인지 발달 단계의 연령 구분은 학습자마다 다를 수 있으며, 동일한 조건에서 학습을 수행하더라도 학습 속도는 학습자마다 다양할 수 있으므로 교사는 학생을 정확하게 진단해야 한다. 이 때, 임상적 인터뷰 방법을 활용하여 학생의 기본적 인지과정을 관찰, 유도한다.

⑥ 교사는 사회적 상호작용을 위하여 비슷한 수준의 학습자들로 구성된 소집단 활동을 강조해야 한다.

⑦ 학습은 아동의 발달단계의 특징에 따른 한계를 넘어서 이루어질 수 없으며, 동화·조절에 의한 schèmes의 내적인 구성과정과 조화된 지도 방법만이 바람직하다. 따라서 무리한 조기 교육이나 학습의 촉진은 아동의 자기구성을 불가능하게 한다.

⑧ 수학적 개념의 발달은 아동의 실제적인 행동의 조정을 바탕으로 한 반영적 추상화에 의한 연속적인 구성과정이므로, 조작기의 문턱에 와 있는 유치원과 초등학교 입학 초기의 아동의 수학교육에서는 구체물을 다루고 아동 자신의 행동과 그 조정의 결과를 경험하는 '논리-수학적 경험'을 강조함으로써 그 기초를 다져야 한다.
⑨ 발달 초기부터 '자연스런' 조작적 schèmes을 갖고 사고할 수 있도록 아동의 자발적이면서 무의식적인 행동과 조작의 구조를 반성의 대상으로 할 수 있는 발견적 교수법, 소집단 활동 및 적절한 대화를 통한 의식화 방법, 직관 교수법 등을 적극적으로 활용한다.
⑩ 사고와 앎의 본질은 내면화된 가역적 행동인 조작이므로 수학 학습은 학습자의 활동을 통하여 이루어져야 하며, 수학 학습이 활동을 통한 조작의 내적인 구성과정이므로 교육방법은 학습자의 활동을 전제로 해야 한다.
⑪ 균형적 발달을 위해 수직적 발달이 서서히 일어나도록 해야 한다.

3.4. 비고츠키[80)]의 수학 학습 심리학

> 스위스의 피아제와 미국의 스키너가 활발히 활동을 할 무렵 러시아에서는 비고츠키가 심리학자로 활약하였다. 비고츠키의 이론을 '사회 문화적 접근'의 구성주의로 규정한다.

1) 고등정신기능과 근접발달영역(ZPD)

(1) 고등정신기능

① 모든 인간의 독특한 고등정신활동의 형태들은 사회적이고 문화적인 상황들에서 시작되었고, 그 구성원들에 의해서 공유되고 있다.
② 고등정신기능의 사회적 기원에서 '개인간 정신 기능(inter-psychological functioning)'이 상당히 중요하며, 개인간 정신 기능의 형태가 '개인내 정신 기능(intra-psychological functioning)'에 강력한 영향을 준다. 이처럼 개인간 정신 기능이 개인내 정신 기능으로 변화하는 과정이 '내면화'이다.
③ 내면화가 되었다는 것은 고등정신 기능이 진정한 내적 정신 기능으로 아동 내에서 작용함을 의미한다. 그리고 아동내의 고등정신 기능의 발생은 바로 다른 사람들과의 상호작용에서 비롯된 것이다.
④ 개인간 심리 기능과 개인내 심리 기능 사이의 관계가 이루어지는 곳이 근접발달영역이다.

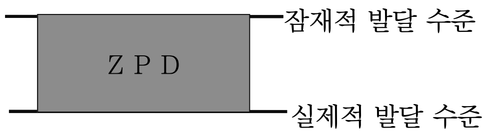
80) Lev Semyonovich Vygotshy, 1896~1934

(2) 근접발달영역(The Zone of Proximal Development)

① 근접발달영역이란 실제적 발달 수준과 잠재적 발달 수준간의 간격을 의미한다.

㉠ 실제적 발달 수준(actual development level)이란 학생이 다른 사람의 도움 없이 독립적으로 문제를 해결할 수 있는 수준이다.

㉡ 잠재적 발달 수준(potential development level)이란 좀 더 지식이 풍부한 교사, 성인 또는 유능한 또래의 도움을 얻어 문제를 해결할 수 있는 수준이다.



② 근접발달영역의 하한선은 학생이 혼자서 과제를 수행할 수 있는 실제적 발달 수준이고, 상한선은 다른 사람의 도움을 받아 수행할 수 있는 잠재적 발달 수준이다.

③ 학습은 사회적 상호작용을 통해서 이루어져야 하며, 좀 더 효과적인 학습을 위해서는 근접발달영역 내에서의 사회적 상호작용이 중요하다. 또한 모든 학생은 적절한 도움을 받으면 스스로 할 수 있는 것 이상을 할 수 있다.

④ 근접발달영역은 고정적인 것이 아니라 학생이 더 높은 수준의 사고와 지식을 달성함에 따라 역동적으로 변화한다. 어제의 잠재적 발달 수준이 내일의 실제적 발달 수준이 되고, 그에 따라 근접발달영역이 새로운 근접발달영역으로 나아가면서 한 단계 더 높은 수준으로 발달하게 되는 것이다.

⑤ 학생이 더 어려운 과제를 수행하게 될 때, 새로운 수준의 근접발달영역으로 변화하여 교사나 타인의 새로운 도움과 지원을 필요로 하게 된다. 이러한 변화는 학생이 지식, 기술, 전략, 훈육, 행위의 습득을 위해 노력하는 동안 계속해서 반복적으로 나타나게 된다.

⑥ 교육의 역할은 바로 아동에게 그의 근접발달영역에 있는 경험들을 제공함으로써 아동의 발달을 촉진시키는 것이다. 교사들이 아동에게 그들이 도움 없이도 혼자서 해결할 수 있는 문제들만 계속해서 제시하거나 아동들이 독자적으로 숙달하기에는 너무 거리가 먼 경험들을 계속 제공할 때, 그들은 발달을 구체화하는 교수를 지향하는 데 실패한다. 대신에 교사들이 아동의 잠재적 발달 수준에 맞게 선택되어진 공동 인지 활동들에서 어린이들과 함께 협력하고 그렇게 함으로써 아동의 실제적 발달을 촉진시켜야한다.

2) 근접발달영역에서의 발달과 학습

① 학습은 발달을 주도한다.

> 어린이의 발달에 있어서 모방과 교수는 주된 역할을 한다. 이들은 뚜렷하게 인간 정신의 특성을 발휘하게 하며 어린이를 새로운 발달 관계로 이끌어 준다. … 아동이 오늘 다른 사람과 협력해서 할 수 있는 일은 내일에는 혼자서 할 수 있다. 그러므로 올바른 유형의 교수는 … 성숙함보다는 성숙 중에 있는 기능들에 목표를 두어야 한다. … 교수는 과거 지향적이 아니라 미래 지향적이어야만 한다.

② 안내받는 참여(guided participation)를 통한 발달과 학습이 이루어져야 한다. 안내받는 참여에서 교사와 학습자는 주어진 과제를 상호작용하면서 공동으로 작업하며, 이러한 활동은 학습자들이 그 사회의 구성원으로서 기능과 가치를 습득하고 학습하는 것을 지원해준다(B. Rogoff).

③ 모든 교육은 그 아동에 비해 보다 유능한 타자, 즉 부모나 교사, 더 능력있는 또래가 돕는 것으로부터 출발한다. 그러나 아동의 수행 능력(performance capacity)이 발달함에 따라 자기 조절 능력이 점차 증가하여 타인의 도움을 덜 필요로 하게 된다.

④ 달프와 갤리모어(Tharp & Gallomore)는 안내받는 참여를 통한 근접발달영역에서의 인지발달 과정을 4단계로 분석했다. 이 과정은 사회적 조절과 자기 조절, 즉 타인의 도움과 자신의 도움간의 관계에 초점을 맞춘 것이며 선형적 과정이 아닌 순환적 과정으로 되어있다.

[1단계] 더 유능한 타인의 도움을 받아 과제를 수행하는 단계

학생이 독립적으로 과제를 수행할 수 없기 때문에 좀 더 능력 있는 교사나 동료의 도움을 받아 모방하는 단계이다. 이 때 필요한 도움의 양과 종류는 학생의 연령, 현재 수행도, 과제의 성격에 따라 다르다. 이 단계에서 학생은 부모, 교사 혹은 유능한 동료 등과 대화, 질문, 피드백 등의 상호작용을 통해 해야 할 과제에 대하여 이해하며 과제를 수행한다. 이 단계에서 교사는 학생이 과제를 수행하도록 안내하고 도움을 제공하거나, 전이를 위한 새로운 기회를 제공하며 학생이 과제 수행의 책임을 갖도록 한다.

[2단계] 학생 스스로 과제를 수행하는 단계

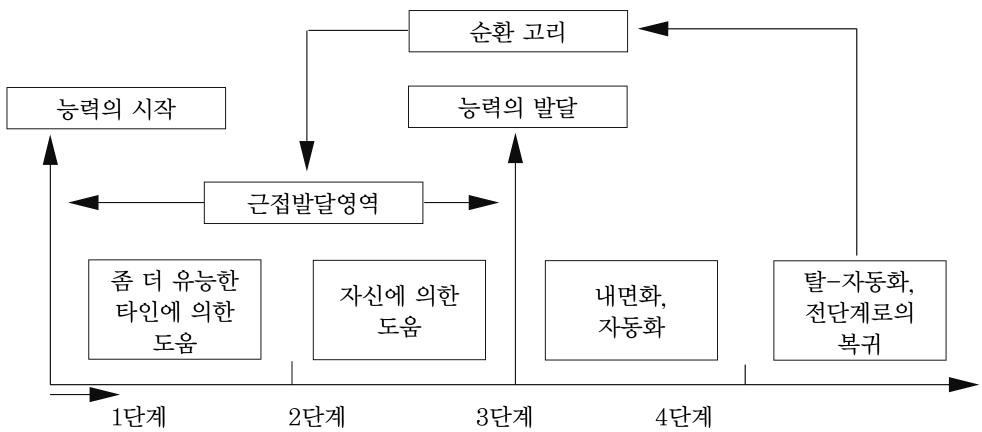
1단계에서 학생이 타인의 도움을 받아 과제를 수행했다면 이 단계에서는 다른 중재자의 도움을 받지 않거나 적은 도움으로 과제를 수행할 수 있게 된다. 하지만 아직 학생 스스로 과제를 수행하는 것이 자동화 또는 내면화 될 정도로 완전히 발달되지는 않는다. 이 단계에서 학생은 자신의 행동을 모니터하고 지원하는 역할을 하는 자기 지시적 언어를 통해 행동을 통제한다.

[3단계] 과제수행이 완전히 발달되어 내면화, 자동화가 이루어지는 단계

학생은 근접발달영역을 벗어나 과제를 수행하게 되며, 더 이상 다른 중재자로부터 도움을 받지 않고 거의 무의식적으로 과제를 완전하게 수행해 낸다. 이 때 다른 중재자의 도움은 오히려 부정적 영향을 줄 수 있다. 이 단계는 자기 통제와 사회적 통제를 벗어난 완전한 발달이 이루어지는 단계이다.

[4단계] 수행이 탈-자동화됨으로 인해 다음 근접발달영역으로 복귀되는 단계

새로운 능력을 발달시키기 위해서는 계속적인 근접발달영역 계열의 순환 과정을 거쳐야 한다. 학생이 과제해결을 수행하다 어려움이 생기면 더 능력 있는 다른 사람의 도움을 필요로 하게 되어 다시 1단계에 놓이게 된다.



⑤ ZPD의 범위와 순환과정은 학생에 따라 차이가 나지만 중요한 것은 교사의 적절한 도움 여하에 따라 이를 넓히거나 좁힐 수 있으며, 또한 가속화시키거나 지연시킬 수 있다는 점이다. 따라서 교사는 학생의 현재 발달 수준만이 아니라 학생의 잠재적 발달 수준까지를 포함한 ZPD를 고려하여 학생을 교육하여야 하며, 잠재적 발달 수준이 또 다른 실제적 발달 수준이 되고 그에 따라 기존의 발달 영역이 새로운 ZPD로 나아가면서 한 단계 높은 수준으로 발달하는 순환과정의 역동성을 생각할 때, 항상 학생들의 현재 수준과 잠재성을 고려하여 적절한 도움을 주는 것으로부터 점차적으로 스스로 수행해 나갈 수 있도록 해야 한다.

3) 수학교실에서 교사의 역할

① 근접발달영역을 확인하고 끊임없이 갱신해 가면서 학생으로 하여금 해당 개념을 이해하게끔 한다. 학생의 활동이 근접발달영역 안에 포함되도록 주의 깊게 선택하고, 학생들이

시도할 때 적절한 도움을 제공한다.

② 하위 또는 부분 개념은 상위 또는 그보다 큰 개념 속에서 구조화되어야 전체를 올바르게 드러낼 수 있기 때문에 적절한 시점에 상위 개념을 다루도록 한다.

③ 모방은 교실에서 이루어지는 교수 · 학습의 기본이다. 학생들에게 올바른 방법을 실제로 시범 보일 수도 있다.

④ 수학 수업을 준비하는 과정에서 교사는 개념이나 기능에 대하여 정확한 설명이 필요한지, 모델 형성을 위한 시범이 필요한지, 매개체나 교구를 쓸 것인지 하는 것들을 미리 구상하고 준비해야 한다. 또한 다른 교과, 단원과 맺고 있는 관련성, 역사적 발달 과정을 정확히 알고 적절한 수준과 시점에서 구사할 수 있도록 한다.

⑤ 여러 해석이 있을 수 있음을 인정하고 그것들을 인지발달에 활용하면서도 본질을 놓치지 않고서 적절한 해석과 해결전략을 제시하는 지식의 대표자로서 역할을 한다.

⑥ 자신과 학생의 활동을 정확하고 분명하게 말로 나타내도록 한다. '이것' 또는 '저것'과 같은 모호한 말은 피하고 명확한 용어를 사용 한다.

⑦ 학생의 사고 과정에 대한 실마리를 찾아 학생에게 의미를 다시 새기는 기회를 제공한다.

⑧ 새로운 개념은 현실적인 상황 속에서 다루어야 한다. 꼭 직접 경험할 수 있는 것일 필요는 없다. 의식 활동을 통해서 충분히 현실 세계와 연계시킬 수 있기 때문이다.

⑨ 학습 상황과 학생의 능력을 적절하게 결합하여 학생 활동의 내적 동기를 이끌어낼 수 있어야 한다.

⑩ 학생 각자가 자신의 문제 풀이과정과 결과를 혼자서가 아니라 다른 사람의 풀이와 견주면서 그와 상호 작용하게 한다. 이는 평가의 과정인 동시에 피드백 과정이다.

⑪ 학생들의 실수를 분석하고 그에 따른 도움을 주는 방안을 강구한다. 실수에 대한 관리가 중요하다. 그러나 시행착오의 방법은 적합하지 않다. 학생은 수학자와 다르기 때문이다.

[정리] 학습은 '학생 주도적인 탐구와 교사의 안내 사이의 끊임없는 상호작용'으로 볼 수 있다. 또한 지식 습득에 있어 협력학습을 활용하고, 유능한 동료 학생들과 상호작용 할 기회를 제공하고, 학생들의 수준을 넘어서는 문제를 제시하거나 학생들로 하여금 문제를 스스로 제기하게 하여 학생들의 근접발달영역과 연결하도록 해야 한다. 그러나 학생들끼리의 협동학습이 발달을 촉진하는 충분조건이 될 수는 없다. 모둠활동의 중심은 학생이지만 그것은 교사에 의하여 주도되어야 하며 유능한 교사는 학생의 발달에서 본질적으로 부족한 것을 채워주면서 발달을 촉진할 수 있어야 한다.

4) 비계(scaffolding)설정을 통한 발달과 학습

① 성인과 아동, 혹은 보다 유능한 아동과 아동간의 상호작용이 아동의 발달을 선도할 수 있도록 하는 구체적인 교수방법으로 여러 연구자들은 아동의 근접발달영역에서의 비계설정을 제안하였다.

② 비계설정이란?

㉠ 사전적 의미: 건물을 건축하거나 수리할 때 인부들이 건축 재료를 운반하며 오르내릴 수 있도록 건물 주변에 세우는 장대와 두꺼운 판자로 된 발판을 세우는 것

㉡ 교육 분야: 아동의 근접발달지대 내에서의 효과적인 교수 · 학습을 위해 성인이 아동과의 상호작용 중 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 묘사하기 위해 은유적으로 사용하는 것

(예) 다음은 중학교 1학년 기하 영역에서 모든 다각형의 외각의 크기의 합이 360° 임을 알아내는 수업 상황이다.

> (학생들은 삼각형의 외각의 크기의 합이 360° 임은 알고 있지만, 아직은 n각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 없는 상태이다.)
>
> … (상략) …
>
> 교사: (그림을 제시하며) 다각형의 각 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
> 학생: 180° 입니다.
> 교사: 그러면 n각형의 모든 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
> 학생: $180^\circ \times n$입니다.
> 교사: 외각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?
> 학생: 잘 모르겠어요.
> 교사: 내각과 외각의 관계를 생각해 보면 외각의 크기의 합을 구할 수 있지 않을까요? (다각형에 외각과 내각을 표시하면서 외각과 내각의 관계를 떠올리게 한다.)
> 학생: 아! 알겠어요. 내각과 외각의 크기의 합에서 내각의 크기의 합을 빼면 될 것 같아요.
> 교사: 내각의 크기의 합은 알고 있지요?
> 학생: 네. $(n-2)\times 180^\circ$ 입니다.
> 교사: 그러면 외각의 크기의 합을 구하는 식을 나타낼 수 있을까요?
> 학생: (외각의 크기의 합)$=180^\circ \times n-$(내각의 크기의 합)
> $= 180^\circ \times n-180^\circ \times (n-2)=360^\circ$ 입니다.
> 교사: 잘했어요. 따라서 다각형에서 외각의 크기의 합은 언제나 360° 로 일정함을 알 수 있어요.
>
> … (하략) …

위 상황에서 교사는 학생의 근접발달영역에서 교사의 사고 과정을 모방할 수 있는 시범이나 실마리를 제공하고 있다. 이러한 교수 · 학습 상황에서 학생들이 과제를 수행해 나가는

데 있어서 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파에서는 ‘비계설정’이라고 부른다.

③ 버크와 윈슬러(Berk & Winsler)는 효과적인 비계설정으로 ‘공동의 문제해결’, ‘상호주관성’, ‘따뜻함과 반응’을 제안했다.

㉠ 공동의 문제해결: 흥미 있고 문화적으로 의미 있는 협동적 문제해결 활동에 대한 학습자들의 참여

㉡ 상호 주관성: 어떤 과제를 시작할 때는 서로 다르게 이해하고 있던 두 참여자가 공유된 이해에 도달하는 과정

㉢ 따뜻함과 반응: 상호작용의 정서적인 분위기, 과제에 대한 어린이들의 집중과 기꺼이 도전하려는 태도는 성인이 명량하고, 따뜻하고, 반응적일 때 그리고 언어적 칭찬과 적절하게 자신감을 북돋워 줄 때 최대화됨

④ 비계설정의 목표는 아동으로 하여금 ‘자신의 근접발달지대에서 과제를 해결하게 하는 것’과 ‘자기-조절(self regulation)’을 증진시키는 것이다.

㉠ 자신의 근접발달지대에서 과제를 해결하게 하는 것: 언제나 아동에게 주어진 과제가 적절한 수준으로 어려워 아동이 도전감을 갖도록 과제와 주변 환경을 구성해주어야 하며 아동의 현재 요구들과 능력들에 맞도록 성인의 개입의 양을 항상 조절해야 한다.

㉡ 자기-조절: 성인은 아동이 독립적으로 일할 수 있게 되면 가능한 한 빨리 조절과 도움을 멈추어야 한다. 또한 이는 성인들이 아동들로 하여금 의문점들과 문제들을 파악하도록 허용하고 아동이 곤경에 빠져 있을 때에만 개입해야 하는 것을 뜻한다. 공동의 목표가 세워지면 아동의 능동적인 관리에 대한 반응에서 성인의 능동적인 철수의 결합은 자기 조절의 발달에 매우 중요하다.

⑤ 비계설정은 교사와 학습자가 공동 문제해결 활동에 몰입되어 있는 동안 두 사람간의 따뜻하고 즐거운 협동을 의미한다. 협동하는 동안에 성인은 민감하고도 우연한 보조를 제공하고 아동들의 표상적이고 전략적인 사고를 육성해 주고, 아동들의 기술들이 증가함에 따라 과제에 대한 좀 더 많은 책임을 갖도록 고무함으로써 아동의 자율성을 지지한다.

⑥ 학습과정 초기에는 성인이 적극적으로 개입하고 많은 양의 비계설정을 하며, 더 많은 지식을 학습한다. 학습이 진행되면서 아동이 학습 결과에 대해 좀 더 큰 역할을 하게 됨에 따라 수행에 대한 책임은 아동에게로 이동하게 된다. 이 때 성인인 교사가 할 일은 최종 목표로 정한 행동을 아동이 독립적으로 수행하도록 비계설정 해 오던 것을 제때에 제거하는 것이다(=양도원칙(hand over principle)).

5) 정신의 도구로서의 기호의 매개

① '언어'는 모든 인간 문화에서 보편적으로 볼 수 있는 도구이다. 언어는 각 문화의 모든 구성원들에 의해 창조되고 공유되기 때문에 정신의 도구이다.

② 언어는 다른 도구의 획득을 촉진하고 여러 정신적 기능들을 위해 사용되기 때문에 기초적인 도구이다. 언어는 주의 집중, 암기, 감정조절, 문제해결 등 여러 가지의 정신 기능을 익히기 위한 전략을 개발하는 데 이용될 수 있다.

3.5. 스켐프[81]의 스키마 학습

> 스켐프는 영국 옥스퍼드 대학에서 수학과 심리학을 공부하였으며, 수학교사로 출발하여 수학 학습 심리학을 연구한 위대한 수학교육학자(1972년)이다. 스켐프는 학생들이 수학을 어려워하고 싫어하는 이유에 대하여 관심을 갖고 연구한 결과 피아제의 인지발달 이론에 기초하여 스키마틱 학습(Schmatic learning)과 반영적 지능(Reflective intelligence)을 연구하였다.

1) 지능 학습(intelligent learning)과 반영적 지능(reflective intelligence)

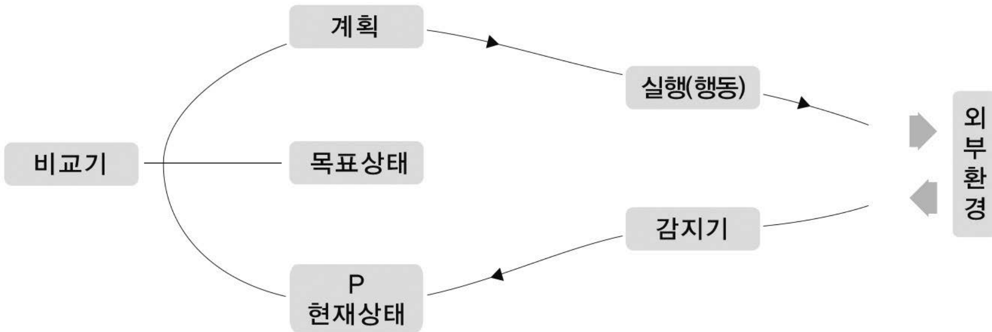
① 지능은 '유용한 정신적 능력의 집합체'이다.

② 지능 학습은 오래 기억할 수 있으며, 적응력이 높고 학습자와 교사와의 관계가 독립적이며 이해의 획득에 보상이 이루어져 자신감을 가지고 이해의 폭을 넓히게 된다는 특징이 있다.

(1) 지시(지휘)체계와 지능 학습

① 지시체계: 다양한 환경 속에서 자신이 선택한 목표를 달성하기 위한 활동을 가능하게 해주는 물리적 또는 정신적 도구로 다음 4가지 요소로 구성된다.

81) Richard Skemp, 1919~1995



㉠ 감지기(sensor): 사물의 현 상태를 감지하는 부분

㉡ 비교기(comparator): 조작의 현 상태와 목표상태 사이의 차가 표현되는 부분

㉢ 계획: 비교자가 주는 정보에 따라 주체가 목표상태에 있을 때와 있지 않을 때 무엇을 할 것인지 결정하는 계획을 세우는 부분

㉣ 실행: 계획에 따라 실행하는 부분

② 지시체계는 피 작동자의 현 상태와 목표상태 사이를 비교하여 현 상태가 목표상태에 일치할 때까지 그 간격을 좁히기 위한 계획된 행동을 결합하게 된다.

┌ 델타-1: 외부환경으로부터 정보를 수용하여 실제적인 대상에 대하여 행동하게 하는 지시체계

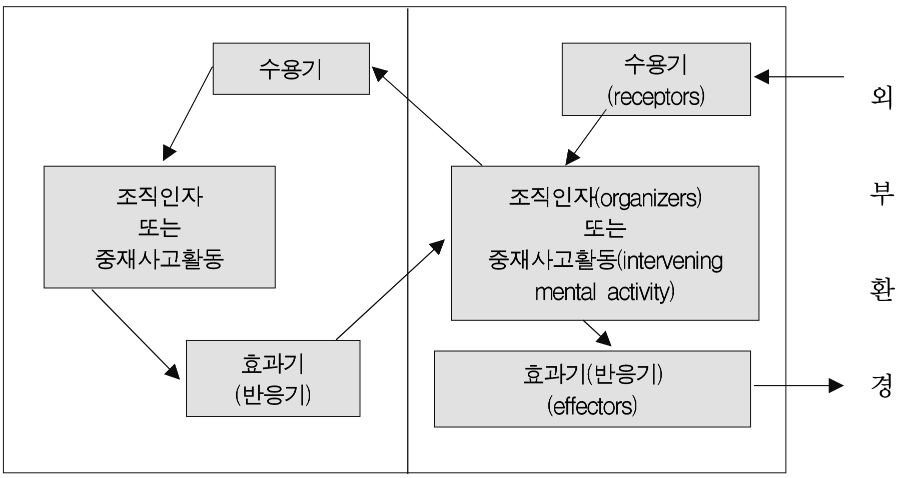
└ 델타-2: 델타-1에서의 지시체계가 경제적이고 적응력을 갖고 적용하도록 지식구조 (스키마)를 이루는 지시체계

③ 먼저 목표가 설정되고 그 목표를 달성하기 위해 지시체계가 작동하여 정보를 수집하고 계획을 세운 다음, 보다 효율적인 정보를 채택하고 효과적인 계획을 세울 수 있도록 지시체계를 변화시키는 과정이 지능학습이다.

(2) 직관적 지능과 반영적 지능

① 지능은 그 기능에 따라 크게 직관적 지능과 반영적 지능으로 구분된다.

반영적 지능	직관적 지능
· 자신이 알고 있는 개념과 스키마를 인식 · 개념들 또는 스키마들 사이의 관계나 구조를 인지하여 이들을 여러 가지 방법으로 조작 · 내면적 활동을 통제하는 능력	· 물리적 환경 내에 있는 대상을 인식하고 지각된 실재적 대상 사이의 관계 · 아동 자신의 행동사이 관계를 인식
→ 수학 학습을 할 수 있는 능력	→ 실제적인 산술만을 하는 능력
(예) 아동이 때때로 산수 문제에서 바른 해답을 찾을 수가 있음에도 불구하고, 그 해결 방법의 논리적 기술 혹은 이유의 설명을 할 수 없는 것은 산술이 반영적 지능에 의한 것이 아니고, 직관적 지능에 의한 것이기 때문이다.	



〈반영적 지능(반성적 지능 체계)〉〈직관적 지능(감각-운동 지능 체계)〉

② 반영적 지능의 수학적인 면

㉠ 논리적 사고와 증명을 포함하는 추론과정을 실행한다.

㉡ 일관성 없고 잘못된 추론에 대한 개념과 스키마를 조사하여 옳게 바꾸려는 시도가 진행된다.

㉢ 잘 되었는지 점검하고 잘못된 점을 고친다.

㉣ 우리가 이미 알고 있는 지식을 증진하고 체계화한다.

㉤ 반성적 탐구, 계획, 문제해결을 진행한다.

③ 직관적 지능에 의한 사고와 반영적 지능에 의한 사고를 구분하여 설명하고 있으나[82]

82) [문제해결]에서 직관적 지능의 수용기에서 아동이 인식하는 대상은 주어진 문제의 조건과 찾으려는 결과 즉 수학문제이고, 반영적 지능의 수용기에서 아동이 인식하는 대상은 직관적 지능에서 아동이 문제를 해결한 (직관적) 사고 계산 과정이다.

두 지능은 서로 보완적인 역할을 한다. 직관적 지능에 의한 사고는 즉각적인 일반화를 위해 필요하며 반영적 지능에 의한 사고는 법칙을 이끌어 내는 활동을 위해 필요하다.

④ 지능 학습이란 반영적 지능 체계를 활용하여 학습목표로 접근하는 학습이며 습관적 학습이란 의미를 생각하지 않고 수학적 개념의 정의나 공식을 암기하는 학습이다. 이 두 학습은 모두 필요하며 습관적 학습이 5%, 지적 학습이 95%의 비율일 때 가장 바람직하다.

2) 스키마 학습(schematic learning)

(1) 스키마(schemas)

① 피아제의 쉠(schèmes)과 같이 인간의 행동이나 사고를 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있게 하는 인지구조이다.

② 서로 관련 있는 개념들의 구조를 말하며, 적응 곧, 동화 · 조절 기능과 조직기능을 갖고 재조직되어 가는 것이다.

③ 모든 지식의 구조는 단순한 한 개념으로 되어 있든 복잡하게 되어 있든 스키마이다.

④ 축구와 같은 게임은 운동–감각적 스키마(sensori–motor schemas)이며, 말하기, 읽기, 쓰기는 지적 교육의 기초가 되는 정신적 스키마(mental schemas)이다.

⑤ 자연수의 연산, 정수의 연산, 함수의 극한, 미적분학 등은 모두 스키마이다.

⑥ 스키마는 다음 세 가지 기능을 가능하게 한다.

㉠ 기존 지식을 통합(integrate)한다.

㉡ 발전학습을 위한 도구의 역할을 한다.

㉢ 이해를 가능하게 한다.

(2) 스키마 학습(schematic learning)

① 기존의 스키마를 새로운 지식 획득을 위한 수단으로 사용하는 학습이다.

② 동화 · 조절 기능에 의한 schème의 재구성으로서의 피아제의 학습개념을 바탕으로 한 학습 이론이다.

③ 새로운 개념을 지도할 때 동화나 조절이 잘 이루어지도록 기존의 스키마를 잘 활용하는 것은 '관계적 이해'를 도모하기에 적절한 학습이다.

④ 스키마 학습을 위해 첫째, 아동의 마음 가운데 적절한 예비 schema가 존재하는 '학습의 준비성'과 둘째, 자료에 대한 적절한 배열에 대한 '자료 제시'가 반드시 준비되어야 한다.

⑤ 스키마 학습에서 기존 스키마가 잘못 형성되어 있는 경우 관련된 스키마를 형성하는 과정에서 잘못된 스키마를 형성할 가능성이 높아질 수 있다.

3) 수학적 개념의 이해

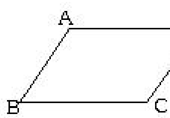
무엇을 이해한다는 것은 그것을 적절한 스키마에 동화하는 것이다. (스켐프)

(1) 도구적 이해[83](instrumental understanding)

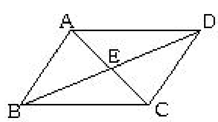
① 적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 적용되는 이유를 모르고 그것을 문제해결에 적용할 수 있다.

② '분수와 분수를 곱할 때는 분모는 분모끼리 곱해서 다시 분모로 하고, 분자는 분자끼리 곱해서 다시 분자로 하면 된다.'는 사실을 기억하고 적용한다거나 '등식의 성질을 이해하지 못하고 이항하여 일차방정식을 푸는 것[84]'은 도구적 이해의 예이다. 또는 다음 학생의 반응도 도구적 이해이다.

김 교사: 여기에 평행사변형이 있습니다([그림 1]). 평행사변형의 두 대각선을 그렸을 때([그림 2]), 이 두 대각선은 어떤 성질이 있는지 이야기해 볼까요?



[그림 1]



[그림 2]

철 수: 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분해요. 그러니까 선분 AE의 길이와 선분 EC의 길이가 같고, 선분 BE의 길이와 선분 ED의 길이가 같아요.

김 교사: 아! 그렇군요. 그럼 어떻게 그렇다는 것을 알 수 있지요?

철 수: 그림에서 보면 바로 똑같다는 것을 알 수 있어요. 초등학교 때 그렇게 배운 것으로 기억하고 있는데, 그 이유는 잘 모르겠어요.

---

83) 교사가 직사각형의 넓이는 A=LB로 구해진다고 학생들에게 환기시켰다고 가정하자. 처음 이 내용을 설명할 때 없었던 학생이 자기는 이해하지 못한다고 말했다. 그래서 교사는 그에게 다음과 같이 설명했다. '공식을 보면 직사각형의 넓이는 길이와 폭을 곱하여 구한단다.' 학생은 '네, 알겠어요.'라고 대답하고 연습 문제를 풀어 나갔다. 만일 우리가 이 학생에게 '너는 이해한다고 생각하겠지만, 정말로 이해하는 것이 아니야.'라고 말한다면, '나는 이해하고 있어요. 보세요. 답이 모두 맞았잖아요.'라고 하면서 동의하지 않을 것이다. 그리고 이 학생은 자신의 성취를 대수롭지 않게 보는 것에 대해서 불쾌해 할 것이다. 이 학생이 생각하는 '이해'라는 의미에서는 이 학생은 정말로 이해한 것이다(Skemp, p.259).

84) · 도구적 이해를 한 학생의 설명: 방정식의 좌변에 x항만을 남기기 위해 좌변의 7을 우변으로 옮길 때 부호를 바꾸어야 하므로 +7이 −7로 바뀝니다.
· 관계적 이해를 한 학생의 설명: 방정식의 좌변에 x항만을 남기기 위해 등식의 성질 "양변에 동일한 값을 빼어도 그 등식은 같다"를 이용하여 양변에 7을 뺀 결과입니다.

③ 도구적 수학의 장점
㉠ 어느 누구나 즉시 쉽게 이해된다.
㉡ 보상이 곧바로 분명히 확인된다.
㉢ 지식이 덜 포함되어 있어 부담이 적다.

④ 교사가 도구적 수학을 가르칠 수밖에 없는 이유
㉠ 관계적 이해를 할 시간적 여유가 없다.
㉡ 어떤 특정한 기법이나 내용을 학습에 잠시 필요로 하기에 소개만 하면 된다.
㉢ 학생들이 지금 가지고 있는 스키마로는 관계적 이해가 불가능하다고 판단된다.
㉣ 다른 모든 교사들이 수학을 도구적으로 가르치고 있는 학교의 신참 교사이다.

(2) 관계적 이해(relational understanding)
① 무엇을 해야 하는지 그리고 왜 그런지를 알고, 일반적인 수학적 관계로부터 특정한 규칙이나 알고리즘을 끌어낼 수 있다.
② 분수의 크기 비교를 가르칠 때 분수의 크기 비교의 방법만을 알게 하는 것이 아니라, 분수의 스키마를 근간으로 분수란 무엇인가, 두 분수 중 더 큰 분수는 무엇인가, 분수의 덧셈은 어떻게 하는가 등을 관련시켜 분수의 대소 관계를 유도하고 직접 문제해결에 활용할 수 있다.
③ 관계적 수학의 장점
㉠ 새로운 과제에 더 잘 적응된다.
(예) 분모가 다른 분수의 대소 비교를 관계적으로 이해한 학생은 분모가 다른 분수의 덧셈을 더욱 쉽게 학습한다.
㉡ 기억이 더 잘 되며, 오래 지속된다.
(예) '분모가 다른 분수의 대소 비교'만을 지도할 경우 도구적 이해로 지도하는 것이 더 쉽게 기억하도록 도울 수 있다. 그러나 분모가 다른 분수에 대한 덧셈, 뺄셈 등을 종합적으로 생각한다면 관계적 이해를 통하여 학습했을 때 더 잘 기억되며, 기억의 지속력이 더 강해진다.
㉢ 교육의 목적 그 자체이다. 즉, 도구적 이해를 지도하는 과정에서 유발될 수 있는 외적인 보상과 벌에 대한 요구가 크게 줄어들고 동기 부여가 더욱 쉬워진다.
(예) 학생이 관계적 이해를 통해 만족감을 얻게 되면, 새로운 자료도 관계적으로 이해하게 되고 능동적으로 찾게 된다.
㉣ 질적으로 유기적이다. 지식은 관련된 지식끼리 관계를 맺으면서 성장하며 새로운 지

식이 지속적으로 파생된다. 더불어 새로운 지식에 대한 만족감을 얻게 되어 새로운 자료를 더욱 관계적으로 이해하려 노력할 뿐 아니라 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하려는 자세를 갖게 된다.

④ 관계적 이해의 활용이 어려운 이유

㉠ 시험의 역류 효과가 생길 수 있다.

㉡ 과중한 교수요목이 가능하다.

㉢ 평가에 어려움이 있다.

㉣ 교사가 오랫동안 가지고 있었고, 그리고 현재도 가지고 있는 자신의 스키마를 재구성하는데 있어서의 커다란 심리적 어려움이 있다.

⑤ 수학 학습-지도의 목표는 관계적 이해가 가능하게 하는 것이며 이는 곧, 관계망을 형성하는 것이다. 즉, 어떤 개념을 이해하려면 그 관계망의 형성을 필요로 하며, 이것이 이해 활동이다.

(3) 논리적 이해

① 논리적 필요성에 따라 서술된 것을 나타낼 수 있는 능력, 그리고 주어진 전제들과 함께 공리나 정리와 같이 이미 수립된 수학적 지식으로 받아들여지는 것들 가운데 적절히 선택된 것들로부터 연쇄적으로 추론하는 능력을 가능하게 하는 이해이다.

② 자기 자신을 확신시키는 것으로 충분한 관계적 이해와는 다르게 다른 사람까지 확신시킬 수 있는 상태이다.

③ 수학적 기호체계와 표기를 적절한 수학적 아이디어와 관련시키고 그 아이디어를 논리적 추론 고리와 결합시켜 기술하는 능력을 포함하는 상태이다.

(예) 다음과 같은 방정식 풀이에 대해

$$\begin{aligned} x+3 &= 7 \\ &= 7-3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

연속되는 명제 사이에서 함의 관계를 바르게 적용하지 못한 것이다.

(4) 기호적 이해

① 수학적 기호와 표기를 수학적 아이디어와 적절히 연결하고 논리적 추론을 하여 국소적으로 연역하는 능력을 필요로 하는 형식적 이해이다.

② 기호체계나 개념구조 사이의 상호동화를 뜻하는 상태이다.

(예) 572를 나란히 쓰여 진 세 개의 숫자로 해석하지 않고 $5\times10^2+7\times10+2$로 표시되는 하나의 수로 바르게 해석하였다.

3.6. 딘즈[85]의 놀이 학습: 놀이를 통한 수학의 구성

> 딘즈는 헝가리, 프랑스, 영국에서 교육을 받았으며, 수학교육과 수학지도 체계를 개발하기 위한 학습 심리학 연구에 많은 공헌을 하였다. Piaget의 학습심리학에 많은 영향을 받았으며, 수학을 더욱 흥미 있고 쉽게 공부할 수 있게 하는 데 대하여 연구하였다. 그 결과 수학을 흥미 있게 공부할 수 있게 하는 수학적 개념학습의 원리, 개념 학습의 단계, 수학 학습에 활용할 수 있는 조작자료 개발 등에 많은 공헌을 하였다. 또한 1960년대 학교수학의 현대 수학화를 지향한 '새수학'의 이념에 충실하여 수학적 구조가 내포된 다양한 교구를 개발하고, 그것을 다루는 놀이 활동을 통해 수학적 구조의 구성을 시도하는 수학 학습-지도 원리와 방법을 제시하였다. -『수학의 건설(1969)』

1) 딘즈의 학습 이론

① 학습은 아동의 내발적인 동기에서부터 출발한다.
② 수학은 수 및 도형과 관련된 개념 사이의 구조적 관계와 실세계에서 일어나는 문제에의 그 적용을 다루는 분야이다.
③ 수학 학습은 '놀이'로써 조직되어야 한다.
③ 피아제의 조작적, 구성적 구조주의의 수학적 인식론에 근거한다.

2) 수학적 개념 형성

(1) 수학적 개념 형성의 3단계
① 1단계: 의식적 목적이 없는 예비 놀이 단계이다.
② 2단계: 느린 깨달음이 일어나면서 수학적 경험이 시작되는 단계로 구조화가 필요함을 이해하고 목적이 서는 단계이다.
③ 3단계: 갑작스럽게 구조에 대한 통찰, 곧 '이해'의 순간이 오는 개념이 형성되며 정착되는 단계이다.
⇒ 개념이 형성되고 나면 정착의 시기가 오며 형성된 개념은 보다 높은 수준의 새로운 개념 형성을 위한 자료, 곧 놀이의 대상이 되고 다음 수준의 개념 구성의 사이클이 시작된다.

(2) 개폐연속체(open-closed continuum): 개념 형성의 사이클
① 개념 형성의 3단계를 거쳐서 일단 형성된 개념은 닫힌 상태로 되지만 내성적 분석과 적용의 과정에서 열린 상태로 변해 보다 높은 수준에서의 재구성이 이루어진다.
② 피아제의 반영적 추상화와 메커니즘이 같다고 할 수 있다.

85) Zoltan Paul. Dienes, 1916~

3) 딘즈의 교수·학습 과정 6단계

자유 놀이 단계 ➡ 게임 단계 ➡ 공통성 탐구 ➡ 표현화 ➡ 기호화 ➡ 형식화

[1단계] 자유 놀이 단계

① 구체적인 소재를 처음으로 자유롭게 대하는 시기이다.

② 소재로부터 최종적인 개념을 아동들이 구성하게 된다.

③ 아동은 오로지 주어진 환경에 어떤 작용을 가하게 되고, 그 환경으로부터 어떤 작용을 받게 된다.

④ 이러한 상황에 맞는 소재는 될 수 있는 대로 풍부하고, 변화가 많아야 하며 수학적으로 의미 있는 특징을 가지고 있어야 한다.

(예) 덧셈, 곱셈 지도에서 수 막대를 이용한 놀이 환경을 제공

(예) 음수를 지도할 때, 음(−)은 손해, 양(+)은 이익 등과 같은 실생활 장면을 이용

⑤ 적용: 개수나 모양, 크기 등이 여러 가지로 주어진 구체물로 놀이하는 경험 제공

[2단계] 게임의 단계

① 아동이 주어진 상황 가운데 어떤 규칙성이 있다는 것을 착안하게 되는 시기이다.

② 아동은 규칙에 따라 어떤 것을 설명할 수 있으며, 어떤 것이 일어날 것인지 예측할 수 있다는 것을 알게 된다.

③ 일단 어떤 규칙이 있다는 것을 알게 되면, 아동은 규칙을 발견하고, 그에 따라 게임을 할 수 있게 된다.

④ (주의) 이 때 아동들이 게임의 규칙을 절대적인 것이라고 생각하지 않도록 유의한다.

⑤ 적용: 어떤 도형은 각진 부분이 없다거나 모양에 차이가 있다는 것을 인식

[3단계] 공통성 탐구 단계

① 여러 게임에서 발견되는 공통적인 구조를 파악하는 시기이다.

② 아동이 이러한 공통적인 구조를 파악하도록 해주기 위해서는 구체화되어 있는 추상적인 특징 자체는 변화시키지 않고 여러 가지 형태로 구체화해 주는 방법을 생각해야 한다.

③ 적용: 네모 모양은 꺾어지는 부분이 4군데이고 원 모양은 그런 부분이 없다는 것을 명확히 인식

[4단계] 표현 단계

① 아동이 추상화 과정을 통하여 파악한 개념의 공통성을 스스로 인식할 수 있는 적절한 방법으로 표현하는 시기이다.

② 이 때 사용하는 표현 방법은 간단한 그림의 형태나 언어적인 방법, 전형적이거나 포괄적인 예 등 다양한 방법이 가능하다.

③ 적용: 네모 모양이나 세모 모양, 둥근 모양 등에 대하여 다양한 방법으로 표현

[5단계] 기호화의 단계

① 아동이 자신만의 적절한 수단으로 표현한 개념을 수학적인 기호를 이용하여 표현하는 시기이다. 자기 나름대로의 표현 방법을 강구하여 기술하는 단계이다.

② 아동이 자기 나름의 기호 체계를 발명하는 것도 좋겠지만 의사소통을 위하여 공통적으로 이용하는 수학적 기호를 이용하도록 지도한다. 즉, 대부분의 책에서 이미 이용되고 있는 기호 체계를 받아들일 수 있도록 이끄는 것이 필요하다.

③ 적용: 네모, 세모, 동그라미 또는 사각형, 삼각형, 원 등의 표현을 이용하도록 지도

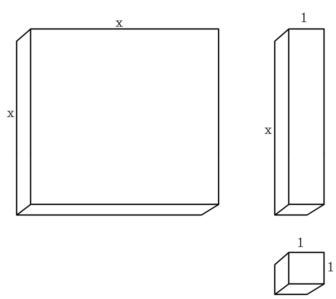
[6단계] 형식화의 단계

① 아동이 추상한 개념의 수학적인 구조를 파악하고 이 개념이 갖고 있는 여러 성질을 체계화한다.

② 기술된 성질 가운데서 어떤 것이 기본적으로 선정되고 기본적인 성질이 선정되면 그로부터 출발하여 다른 성질에 도달하기 위한 규칙을 찾아내게 된다.

③ 적용: 삼각형과 사각형의 관계 또는 삼각형의 성질, 사각형의 성질 등을 파악

‘이차식의 완전 제곱꼴의 인수분해 규칙 발견하기’에 대한 6단계 적용



[준비] $a\times a$, $1\times a$, 1×1인 나무판 세 가지 종류

[1단계] 아동들 각자에게 $a\times a$, $1\times a$, 1×1 나무판을 여러 개씩 주고 그것을 갖고 놀 기회를 충분히 주어 친밀감을 갖게 한다.

[2단계] 자유 놀이를 하는 학생들에게 이러한 나무판을 마음대로 사용하여 $a\times a$ 정사각형보다 큰 정사각형을 만들어 보도록 한다.

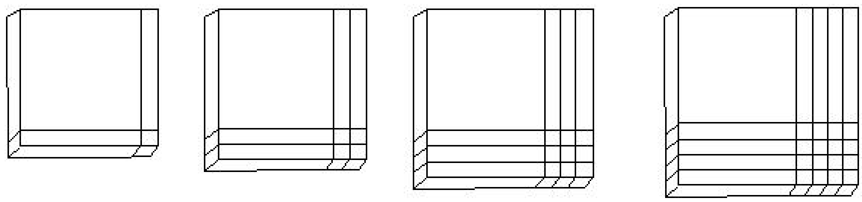
[3단계] 학생들은 자신이 조작하고 있는 활동 속에서 $1\times a$가 가로와 세로에 하나씩 늘어날 때, 나머지 빈자리를 1×1 나무판으로 채우게 됨을 알게 된다.

[4단계] 아동들에게 자기들이 만든 것을 표현해 보도록 요구한다. 그리고 각각의 정사각형을 만드는 데 필요한 나무판의 수를 기록해 보도록 한다.

[5단계] 정사각형 나무판: $a\square$, 직사각형 나무판: $1a$, 작은 정사각형: 1

$$a\square+2a+1=(a+1)^2$$
$$a\square+4a+4=(a+2)^2$$
$$a\square+6a+9=(a+3)^2$$
$$a\square+8a+16=(a+4)^2$$
$$\cdots$$

여기서 아동들은 패턴이 있음을 인식하게 되고 교사는 질문을 하여 발견을 유도한다.



$(a+1)^2 = a^2+2a+1$ $(a+2)^2 = a^2+4a+4$ $(a+3)^2 = a^2+6a+9$ $(a+4)^2 = a^2+8a+16$

[6단계] 교사는 수학적 기호를 이용해 규칙적인 기호체계를 정리해준다.

$$a^2+2ka+k^2=(a+k)^2$$

4) 교수·학습 원리

(1) 역동적 원리(dynamic principle)

① 수학적 개념 형성을 위하여, 실제적인 경험과 학습 상황을 "예비 놀이 단계 → 구조화된 놀이 단계 → 실습(연습) 놀이 단계"라는 자연스러운 과정에 따라 순차적으로 적절한 시기에 필수적인 경험으로써 제공해야 한다는 원리이다.

㉠ 예비 놀이 단계: 목표가 불분명하며 그 자체로 즐기는 놀이 단계

㉡ 구조화된 놀이 단계: 좀 더 방향이 정해지고 목적을 지향하지만 추구하고 있는 것에 대한 명확한 인식이 없는 놀이 단계

㉢ 실습 놀이 단계: 형성된 개념을 고정시키고 적용하기 위한 놀이 단계

② 아동이 어릴 때는 구체적인 도구를 가지고 놀이를 해야 하지만, 순차적으로 정신적인 게임을 도입함으로써 모든 게임 중에 가장 흥미 있는 게임이 수학임을 알도록 한다.

(예) 아동들에게 종이접기 놀이나 나무 쌓기 놀이 등은 도형의 개념과 부피 개념 형성 등에 크게 기여하고 있다.

(예) 적분 도입 전에 분할을 통해 도형의 넓이를 구한다.

③ 수학적 개념은 인간의 활동을 통해서 형성된다고 하는 J. Piaget 등의 활동주의적 수학관의 영향을 받은 것으로 활동을 통해서 학습 한다는 것이다.

(2) 구성의 원리(constructive principle)

① 아동은 분석적 사고를 하기 훨씬 이전에 구성적 사고를 발달시키므로, 아동에게 제시하는 수학적 상황은 분석보다는 구성을 요구하는 것이 우선되어야 한다는 원리이다.

즉, 새로운 개념은 이미 알고 있는 개념으로부터 구성되도록 해야 하며 그 논리적 관계는 그 후에 분석될 수 있어야 한다.

② 구성이란 물체를 만들거나 전체를 파악한다는 것이고, 분석이란 물체를 분해하거나 세부(細部)를 검토하는 일 또는 어떤 근거를 묻는 것을 말한다.

③ 공간 도형의 학습에 이를 적용하면 먼저 공간 도형이나 그 단면을 만드는 것이 선행되고, 이어서 그 성질의 분석이나 성질의 근거를 조사하는 학습이 이루어지는 것이 좋다.

(3) 수학적 다양성의 원리(mathematical variability principle)

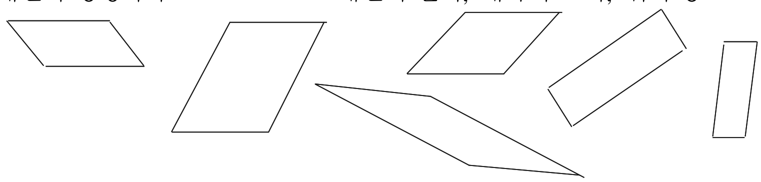
① 수학적 개념이란 개념을 구성하는 변인들 사이의 항구적인 관계이다. 따라서 개념의 성장을 돕기 위해 구조화된 경험을 제공하려면, 개념은 변하지 않게 유지하면서 가능한 한 많은 변인을 변화시켜야 한다.

② 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것(비본질적인 요소)은 가능한 한 변화시켜서(가능한 한 많은 경우를 다루는 경험 제공) 다양하게 제시해야 한다.

(예) 평행사변형의 정의 지도하기

〈본질적인 요소〉
대변이 평행하다

〈비본질적인 요소〉
대변의 길이, 대각의 크기, 위치 등



③ 수학적 개념을 수학적 다양성의 원리로 지도할 때 변화시킬 부분과 변화시키지 말아야 할 부분을 구분하고 공통성질은 분명히 유지시켜 주어야 한다.

(예)

	변수	공통성질
㉠ 이등변 삼각형	· 두 변의 길이 · 두 밑각의 크기 · 공간상의 위치	· 두 변의 길이가 같다. · 두 밑각의 크기가 같다.
㉡ 각기둥	· 두 밑면의 다각형 · 옆면의 직사각형 · 공간상의 위치	· 두 밑면이 합동인 다각형 · 두 밑면이 서로 평행 · 옆면이 모두 직사각형 · 옆면과 밑면이 서로 수직
㉢ 방정식 세우기	· 어떤 수(미지항) x · 방정식의 전개 형태	· 문제의 식 · 문제의 답

(4) 지각적 다양성의 원리(perceptual variability principle)

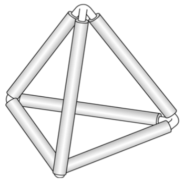
① 동일한 개념적 주제에 대해 지각적으로는 다르지만 근본적으로는 동일한 개념 구조를 가지는 과제를 제공해야 한다. 즉, 지각적 표현을 변화시켜야 한다.

② 동일한 개념을 형성하는데 보일 수 있는 개인차를 고려하는 방법이다.

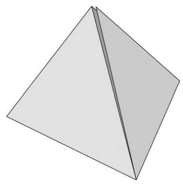
③ 다중 구체화의 원리(multiple embodiment principle)라고도 한다.

④ 정사면체에 대해 학습하기

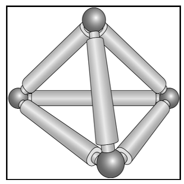
〈빨대로 만들기〉



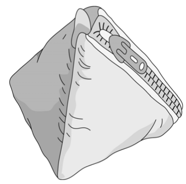
〈종이로 만들기〉



〈자석막대로 만들기〉



〈지갑〉



⑤ 넓이가 4인 도형을 만들어 보기

㉠ 지오보드 이용(평평한 판에 가로 세로의 간격이 일정하게 못을 박고 그 못에 고무줄을 감아 여러 가지 도형을 만들 수 있게 고안된 교구)

㉡ 도트 페이퍼 이용(지면 위에 일정한 간격으로 점이 찍혀있어 펜이나 연필로 도형을 그려나가는 교구)

㉢ 패턴 블록 이용

㉣ 탱그램 이용

5) 결론

① 수학 학습은 심리 역학적인 과정을 통하여 개인적인 경험으로부터의 일련의 수학적 개념이 구성되는 과정이다.

② 딘즈의 개념 학습 원리를 이용할 때 학생들이 놀이 대상이 갖는 성질만을 추상화하는 경험적 추상화 수준에 머물지 않도록 반성의 과정을 반드시 포함시켜 반영적 추상화 수준이 될 수 있도록 해야 한다.

보충

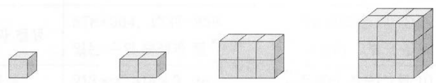
딘즈블록

① 활동주의적 수학교육 이론가의 한 사람인 딘즈가 기호를 사용하지 않고도 수학의 구조를 지도할 수 있도록 고안한 수학 학습 교구이다.

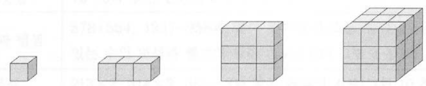
② 다양한 진법체계를 구현할 수 있다는 의미에서 다진수 블럭(Multibase Arithmetic Block; MAB)이라 불린다.

③ 딘즈블록(MAB)에는 기수(基數)(base; 밑)의 값에 따라 서로 구분되는 여러 개의 세트가 포함되어 있다.

예 2진블럭과 3진블럭

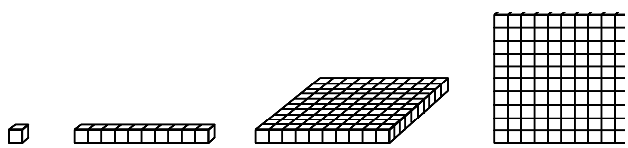


Unit (단위블럭) Long (막대블럭) Flat (판블럭) Block (큰 정육면체 블럭)



Unit (단위블럭) Long (막대블럭) Flat (판블럭) Block (큰 정육면체 블럭)

④ 초등학교 교과서에 '쌓기나무'라는 용어로부터 시작하여 자연수의 연산지도에 이용되고 있는 블록은 기수를 10으로 하는 십진블럭(base-10 blocks)이다.



Unit (단위블럭) Long (막대블럭) Flat (판블럭) Block (큰 정육면체 블럭)

⑤ 딘즈블록은 기수 n에 따라 한 변의 크기가 1인 정육면체 모양의 단위블럭(unit, 1×1×1), 정육면체 n개를 일렬로 연결하여 고정시킨 막대블럭(long, 1×1×n), 막대블럭 n개를 옆으로 붙인 정사각형 판형의 판블럭(flat, 1×n×n), 판블럭 n개를 쌓아올려 고정시킨 큰 정육면체 블록(block, n×n×n)으로 구성된다.

⑥ 딘즈블록은 기수법의 자리값 개념이나 자연수, 소수의 사칙 연산 지도에 효과적으로 사용될 수 있을 뿐 아니라 각 블록들을 1, x, x^2 등의 변수를 나타내는 것으로 취급하면 다항식 지도에도 활용할 수 있다.

3.7. 브루너[86]의 발견학습 : 조기교육 뒷받침을 위한 교수 이론

> 어떤 교과 내용이든 어떤 발달단계에 있는 아동에게든 어떤 지적으로 정직한 형태로 효과적으로 지도할 수 있다.

1) 브루너의 수업이론 "수업이론은 처방적이며 규범적인 것이다."

> 수업이론을 구성하는 주요 요인은 다음의 네 가지이다.
> ① 수업이론은 학습자에게 학습하고자하는 의욕(predisposition toward learning)을 가장 효과적으로 심어줄 수 있는 경험들을 명백히 해줄 수 있어야 한다.
> ② 수업이론은 지식의 구조화를 명백히 하는 것이어야 한다.
> ③ 수업이론은 학습 자료의 조직 계열을 명백히 해야 한다.
> ④ 수업이론은 수업의 과정에서 상과 벌의 성격과 그 방법을 분명히 해야 한다.
> ⇒ 이 네 가지 요소를 가장 잘 조작할 수 있는 수업방법이 곧 발견학습과 탐구학습이다.

(1) 학습 의욕

① 교사와 학습자간의 관계가 학습하고자 하는 의욕에 영향을 준다.

② 문화적 요인, 동기 요인, 개인적 요인 등이 학습자의 학습 의욕에 영향을 미치기 때문에 이러한 요인들을 어떻게 잘 활용할 것인가에 관심을 갖아야 한다.

③ 교사는 학습자가 스스로 대안을 탐색하려는 의욕을 촉진하고 조절해 주어야 한다.

(2) 지식의 구조[87]

① 어떤 개념이나 문제 또는 지식체도 특정학습자가 충분히 이해할 수 있도록 단순화시킨 최적의 구조로 제시할 수 있다.

② 지식의 구조란 '각 학문의 기저를 이루고 있는 핵심적인 개념과 원리', 즉 단순한 사실들이나 잡다한 현상에 대한 정보가 아니라 이러한 사실이나 현상을 서로 관련짓고 체계화하는 주요 개념이나 원리이다.

③ 어떤 영역의 구조도 표상양식(mode of representation), 경제성(economy), 그리

86) Jerome S. Bruner, 1915~

87) 학생들이 수학을 통하여 현상을 이해하는 안목을 기를 수 있게 하기 위해서는 학생들에게 수학의 구조를 가르쳐야 한다. 이 때, 수학의 구조를 가르친다는 것은 학생들이 수학자와 본질적으로 동일한 일을 하게 하는 것으로, 어떤 수준의 학생에게도 그 본질은 적절한 형태로 제공될 수 있다.

고 생성력(power)이라는 세 가지 방법으로 최적구조가 결정된다.

㉠ 표현양식

· 작동적 표현양식: 한 사건에 대해 적절한 신체적 반응이나 그것으로부터 어떤 결과를 얻기 위한 일련의 활동으로 표현하는 방법

· 영상적 표현양식: 지식이 함축하고 있는 의미를 영상을 이용해 표현, 지식의 내용을 세부적인 정보나 자료를 생략하고 핵심이 되는 시공간적 관계와 질적 특성만을 통해 표현

· 상징적 표현양식: 상징적 언어나 형식적 · 논리적 명제를 이용해 지식을 훨씬 추상적으로 나타내는 방식, 지식을 부호, 단어, 공식, 명제 등을 이용해 추상적으로 표현하는 수단

※ 이와 같은 표현양식들은 피아제의 인지발달단계를 거치면서 발달한다.

㉡ 경제성: 많은 정보를 가지고 있을수록 정보를 처리하는 데 더 많은 단계를 거쳐야 하며 더욱 비경제적이다. 상징적 표현을 활용하는 것이 가장 경제성이 크다.

예 자유낙하운동 → 도표나 공식 $S=\frac{1}{2}gt^2$으로 요약 (더 경제적)

㉢ 생성력: 특정한 학습자를 위하여 어떤 영역의 지식을 구조화하는 특정한 방식의 효력을 의미한다.

예 ‘철수는 순이보다 키가 크고, 영이는 순이보다 키가 작다’: 아동은 철수가 영이보다 큰지 어떤지 말하지 못한다(생성력이 적기 때문이다).
‘철수는 순이보다 키가 크고 순이는 영이보다 키가 크다’: 철수는 영이보다 키가 큰지 어떤지를 판단할 수 있다(추이율에 따르도록 표현되어 있어 생성력이 크기 때문이다).

(3) 학습계열

① 모든 학습자에게 적절한 유일한 계열이란 존재하지 않는다. 학습자를 위한 최적의 계열은 학습자의 과거 학습 경험, 발달 단계, 학습 자료의 본성, 개인차 등의 다양한 요인에 의해 결정된다. 그리고 학습자의 지적발달의 과정이 작동적 표현에서 영상적, 상징적으로 옮아가는 것이라면 최적의 계열도 이와 같은 방향으로 나아가는 것일 것이다.

② 학습 자료의 계열은 가능한 행동의 탐구에 영향을 준다.

③ 학생들은 구체적 사실이나 개념들을 일반적 법칙이나 이론보다 먼저 학습하려는 경향이 있으므로 교육과정 내용을 특수한 것으로부터 일반적인 것으로, 단순한 것으로부터 복잡한 것으로, 구체적인 것부터 추상적인 것으로 계열화하여 조직하려 한다.

(4) 강화의 형태

① 브루너는 행동주의가 제시한 학습 이론 중 강화와 학습의 관계를 중시하면서 내적 보상을 외적 보상보다 우위에 두고 있다.

② 내적 보상은 학습 그 자체에 대한 희열과 기쁨을 주며, 그런 강화의 힘에 의하여 독자적인 탐구의 노력이 계속된다고 보고 있다.

③ 벌은 행동을 소멸시킬 가능성이 높으며 향상을 위한 기반이 되기는 힘들기 때문에 내적 보상과 외적 보상의 균형을 이루는 것이 중요하다.

④ 학생의 성취도와 학습과제의 종류와 성질 등에 따라 내 · 외적 보상의 균형이 결정되어야 한다.

2) 지식의 구조

(1) 지식의 구조를 강조하게 된 배경

현재(1950~1960년대) 지식들은 모든 분야에서 폭발적으로 팽창해 가고 있다. 그리고 과학기술의 발전에 따라 여러 가지 법칙 자체가 잠정성과 불확실성을 면치 못하고 있다. 이런 모든 현상들을 개별적으로 연구하고 그 사실들과 법칙들을 모두 파악한다는 것은 인간의 한정된 지력으로는 불가능하고 시간적으로 경제적으로 낭비가 클 뿐이다. 따라서 학생들에게 교과 내용의 기본적 구조를 이해시켜야 한다.

(2) 교과의 구조 파악의 이점

① 기본적 사항을 이해하면 내용을 쉽게 파악할 수 있다(이해).

② 세세한 사항은 구조화된 패턴 안에서 쉽게 잊지 않는다(기억).

③ 기본적인 원리나 아이디어를 이해하는 것은 적절한 훈련의 전이를 가능하게 하는 가장 주된 방법이다(적용).

④ 초등학교와 중 · 고등학교에서 가르치는 학습 자료가 어떤 기본적인 성격을 나타내고 있는가를 끊임없이 재조사함으로써 고등 지식과 초보적인 지식 사이의 간격을 좁힐 수 있다(가장 중요한 이점[88]).

(3) 지식 분야에서 기본 구조 없이, 특수한 사실이나 기술만을 가르칠 경우

88) 지식의 최전선에서 새로운 지식을 만들어 내는 학자들이 하는 일이나 초등학교 3학년 학생이 하는 일을 막론하고 모든 지적 활동은 근본적으로 동일하다. 지식의 구조를 가르친다는 것은 곧 지식을 가르치되, 학생들로 하여금 그 지식 분야에 종사하고 있는 학자들이 하는 일과 본질상 동일한 일을 하도록 하는 것을 의미한다.

① 학생들은 이미 학습한 것을 앞으로 당면한 사태에 적용하기가 매우 어렵다.
② 일반적인 원리를 파악하는 데까지 미치지 못한 학습은 지적인 희열이라는 관점에서 볼 때 주는 바가 거의 없다.
③ 얻은 지식을 얽어매는 구조가 없을 때, 그 지식을 쉽게 잊어버린다.

(4) 지식의 구조를 가르치는 이유와 방법

① 이유: 수학교육의 목적인 '수학적 안목의 형성'을 위해서이다. 즉, 교육에서 다루어야 하는 것은 '수학에 대한 것'이 아니라 '수학 그 자체'이고, 수학자들이 하는 일을 학생들이 경험해야 하며, 이를 통해 학생들에게 수학자들이 수학을 통하여 현상을 바라보는 안목을 길러 주어야 한다.
(예) 확률을 배웠다면 일기예보의 강수 확률이나 복권 구입 등에서 확률을 통하여 그러한 현상을 바라보고 해석하는 안목을 가질 수 있다.
② 방법[89]: 지식의 구조는 아동이 갖고 있는 사고 양식과 아동이 이해할 수 있는 표현 수단에 대응되는 적절한 형태로 전달될 수 있으며, 지식의 구조에 대한 발견을 통하여 궁극적으로 수학적인 안목이 형성된다.

3) 발견 학습-지도 방법

> 구체적인 자료의 취급과 발견을 회상으로 보는 소크라테스적인 관념을 EIS이론과 결합한 것이 브루너의 발견 학습-지도 방법의 배경이다.

(1) 발견학습(Discovery Learning)

① 브루너는 학문의 최첨단에 서 있는 수학자들이 하는 것과 동일한 종류의 탐구와 이를 통한 발견이 가능한 발견학습을 강조하였다.
② 발견이란 학습자의 자발적 · 능동적인 지적구성 작업, 과정(working process)을 의미한다. 따라서 아동은 먼저 구체적인 자료를 다루는 가운데 그가 이미 이해하고 있는 직관적인 규칙성과 대응하는 규칙성을 발견하게 된다. 즉 브루너는 발견 학습-지도 시 구체적 자료의 취급으로 시작됨을 강조하였다.
③ 학습자는 수학적 활동을 통해 (이때, 학습자는 외부세계에서 일어나는 것과 그의 마음속에 이미 존재하는 모델과 대응) 그 안에 어떤 패턴(수학적 규칙성)의 존재를 느끼고

89) 수학 학습-지도 방법에는 첫째, 경험적인 문제해결의 이면에 있는 추상적인 성질을 발견하는 방법과 둘째, 수학 자체를 직접 다루는 방법으로 구분한다면 브루너는 수학과 같은 학문 그 자체를 직접 다루는 방법을 강조하였다.

그것을 발견하려 시도하게 된다(소크라테스의 산파법 활용 강조).

④ 학습자들이 새로운 정보를 찾거나 새로운 결론에 도달하기 위해 정보를 탐구, 조작, 변환 하도록 기회를 제공한다.

⑤ 발견은 이미 알고 있는 아이디어의 내적인 재조직을 포함한다.

⑥ 발견학습의 종류

㉠ 순수한 발견학습(Moore): 교사가 문제 장면(과제)만 제공하고 교사의 도움을 거의 안 받고 학생들 스스로 직관과 구체적 자료를 모으고, 분석하고, 조직하여 주어진 과제의 목표에 도달하게 하는 방법

㉡ 안내된 발견학습(Bruner): 교사가 수업을 이끌어 가는데 사전에 계획된 절차와 오류를 최소화 하면서 질문이 필요하면 핵심 아이디어를 제공하는 방법

(2) 발견학습의 조건

① 학습태세(set): 학습자의 내적 지향성, 발견 지향적인 사람은 일상적으로 그가 가지고 있는 정보간의 관계를 찾으려 노력한다.

② 요구상태(need state): 학습동기 수준, 보통의 동기수준이 가장 적절하다.

③ 관련정보의 학습(mastery of specifics): 학습자가 관련된 구체적 정보를 알고 있는 정도, 다양하고 많은 개념 · 원리 · 법칙의 학습은 발견 능력 향상의 기초가 된다.

④ 연습의 다양성(diversity of training): 정보에 접촉하는 상태가 다양할수록 그 정보를 조직할 수 있는 분류체계의 개발이 용이하다.

(3) 발견학습의 장점

① 발견학습 과정을 통해 조건을 통제하거나, 직관적으로 사고하고, 논리적으로 추론하는 등 수학적 지식을 탐구하는 과정과 기술을 습득하게 된다.

② 자율적이면서도 자발적인 학습 활동을 통하여 발견적인 사고력을 배양한다.

③ 지적 사고력을 증대시켜 미지의 세계에 대한 도전력을 갖게 된다.

④ 지식을 재발견하고 재조직하는 기회를 통해 수학에 대한 자신감을 얻게 된다.

⑤ 지식이 점진적으로 획득되므로 학습 효과가 오래간다.

⑥ 자신이 스스로 발견한 과정과 결과를 바탕으로 과거의 지식들을 쉽게 회상하게 된다.

(4) 발견학습의 단점

① 모든 지식을 스스로 발견하기란 어려운 일이다.

② 발견학습 시, 시간이 많이 소요된다.

③ 교사가 학생들이 발견할 수 있도록 도와주기 위해 준비해야할 분량이 많다.

④ 연역적 사고와 관련된 내용을 발견할 시 초 · 중학년에서 어려움에 부딪힌다.

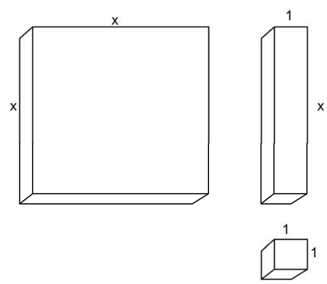
(5) 발견학습의 예

〈8세 아동 4명을 대상으로 딘즈가 지도한 실험수업에 대한 관찰 결과〉

여러 가지 종류의 구체물을 이용한 구성활동을 통하여 수학적 아이디어를 인식 ➡ 구성된 형태로 수학적 아이디어에 대한 지각적 이미지를 형성하도록 안내 ➡ 아동이 구성한 것을 기술하기 위한 기법을 개발하도록 인도

➡ 아동이 다룬 아이디어와 수학적으로 동형인 구체화를 다른 자료로 다른 외관을 가진 것으로 구성하도록 안내 ➡ 아동에게 앞에서 다룬 것과의 관련성을 발견할 기회를 주고, 앞에서 사용한 기호체계를 확장하는 방법을 보임

> “나무판을 이용하여 여러 가지 크기의 정사각형 모형을 구성하게 하여 이차식의 완전제곱꼴의 인수분해의 규칙을 발견하게 한다.”



[준비] $x\times x$, $1\times x$, 1×1인 나무판 세 가지 종류

[과정]

① 아동들 각자에게 위의 나무판을 여러 개씩 주고 그것을 갖고 놀 기회를 충분히 주어 친밀감을 갖게 한 다음에, 이러한 나무판을 마음대로 사용하여 $x\times x$ 정사각형보다 큰 정사각형을 만들어 보도록 한다.

② 아동들에게 자기들이 만든 것을 표현해 보도록 요구한다.
그리고 각각의 정사각형을 만드는 데 필요한 나무판의 수를 기록해 보도록 한다.

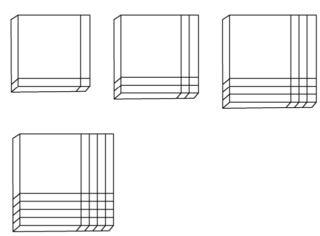
③ 정사각형 나무판: $x\,\square$, 직사각형 나무판: $1x$, 작은 정사각형: 1

$x\,\square+2x+1=(x+1)^2$

$x\,\square+4x+4=(x+2)^2$

$x\,\square+6x+9=(x+3)^2$

$x\,\square+8x+16=(x+4)^2$



④ 여기서 아동들은 패턴이 있음을 인식하게 되고 교사는 질문을 하여 발견을 유도한다. 그리고 규칙적인 기호체계를 발견한다.

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

⑤ 더 나아가 다른 조작을 제공하고 규칙을 확장시키도록 기회를 제공한다. 그리고 이러한 기회들을 통해 기호체계에 대한 또 다른 기호표현을 갖는다는 것을 알게 된다.

$$(x+2)^2=x(x+4)+4=x^2+4x+4$$

(단) 수학적 성질을 다룰 때에는 기호 자체를 다루어야 하므로 아동이 알게 된 기호를 구체적이고 시각적이며 조작 가능한 구체화로부터 분리시키도록 해야 한다.

4) EIS 이론[90)]

브루너는 아동 지능의 발달을 활동적 표현(Enactive representation), 영상적(Iconic) 표현, 상징적(Symbolic) 표현의 순서로 표현 수단의 증대와 그 사이의 조정 능력의 증대로 보고 있다. 따라서 처음 수준은 활동적 수준으로 여기서 아동은 자료를 직접 다루고, 다음에는 영상적 수준으로 나아가 거기서는 대상을 직접 다루는 것이 아니라 대상의 이미지를 다루며, 마지막에 상징적 수준으로 옮아가 여기서는 대상의 이미지가 아니라 기호를 다루게 된다. 이러한 EIS 이론을 바탕으로 할 때, 개인에 의한 자주적인 지식의 형성보다 교육적 전달이 중요하며, 그 전달 수단인 언어의 역할이 중요하다.

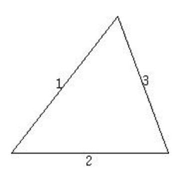
(1) E(enactive representation) – 활동적 표현

① 구체적인 자료를 직접 다루는 것으로 만지고 조작하고, 실행하는 것을 말한다.

② 초등학교 단계인 구체적 조작단계까지 인지발달에서 행동은 결정적 역할을 하며 구체적 대상과 결부된 행동이 내면화된 구체적 조작이 구성되게 된다. 따라서 초등학교는 활동적 표현이 필수적이다.

③ 등식의 성질을 평형저울을 사용하거나 놀이터에서 시소를 타고 균형을 맞추어보는 것이다.

(예1) "삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다."는 성질을 수준이 낮은 학생들도 이해할 수 있도록 삼각형 모양의 종이를 활용하여 표현할 수 있다.

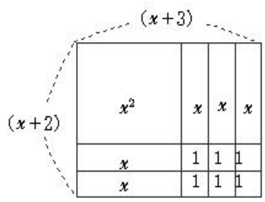


: 삼각형 모양의 종이를 준비한다. 그리고 1과 2가 똑같이 만나도록 접고 2와 3이 똑같이 만나도록 접는다. 이 때 두 접힌 선이 만나는

90) 1951년 Piaget의 제자인 Aebli가 행동의 내면화를 촉진하기 위한 전략으로 도입한 것으로 Geneve 학파의 착상이다.

점이 존재한다. 그런데 이 점은 1과 3을 맞추어 접은 선이 또 지난다.

(예2) 타일이나 나무토막과 같은 구체물을 다음과 같이 붙여 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$를 지도할 수 있다.



(2) I(iconic representation) – 영상적 표현

① 대상의 이미지를 다루는 것으로 시각적 정보, 그림, 화면 등으로 표현하는 것을 말한다.

② 덧셈이나 뺄셈, 곱셈식의 전개 등을 그림으로 그려 표현하는 것이다.

③ 도형을 나타내는 그림, Venn 다이어그램, 통계적 그래프, 함수의 그래프, 대응도, 수형도, flow chart, 여러 가지 도해 등과 같은 그림 표현은 관련된 요소의 공간적인 동시적 표현이 가능하여 사고를 요약해주고 문제해결 과정에서 매우 중요한 수학적 사고 수단이 된다.

(3) S(symbolic representation) – 상징적 표현

① 상징적 표현은 모국어의 발달과 더불어 발달되며 추상적인 개념, 원리, 법칙을 나타내는 문장이나 수식, 여러 가지 기호, 문자변수는 수학적 사고의 필수 불가결한 언어이다.

② 기호를 엄격하게 다루는 것으로 언어나 기호 등으로 표현하는 것을 말한다.

③ 상징적 표현은 수학에서 최종 단계의 개념 표현 방식이다.

④ 지극히 추상화되어 있고 의미가 함축되어 있으므로 상징적 표현을 이해하는 일은 학생들의 개인차에 의해 결정된다.

⑤ 문자식, 함수식, 공식의 사용 등이 이에 속한다.

➡ 브루너는 수학의 어떤 지식도 세 가지 표현 양식으로 나타낼 수 있으며, 각각의 양식에 알맞은 아동의 수준에 따라 지도할 수 있다고 하면서, 이 세 단계의 표현 수단의 발전에 따라 지도하는 것을 Bruner의 나선형 교육이라고 한다.

(예) 저울대의 '원리'

스스로 시소를 조종한다.	➡	고리를 걸어 균형을 잡을 수 있는 모형이나 그림으로 저울대를 표현한다.	➡	일상어로 기술하거나 수학적으로 기술한다.
행동		그림		기호

(행동 → 그림 → 기호의 순서는 연령, 배경, 학습양식에 따라 달리 표현된다.)

[참고] 여러 가지로 표현될 수 있는 지식은 유연성이 크고, 문제해결능력을 높여주므로 학생들에게 여러 가지로 바꾸어 표현하는 능력을 길러주어야 한다.

5) 학습준비도

(1) 학습준비도에 대한 기본 관점

① 브루너: 학습준비도의 구성요인은 학습자의 의도, 지식의 특성 및 표현양식 등이며 따라서 지식의 학습지도가 아동의 지능이 발달하는 과정을 반드시 따를 필요는 없다.

② 피아제: 성숙과 그에 따른 인지구조의 발달수준을 학습준비도의 준거로 제시하고 아동의 지능이 아동과 환경, 특히 학교 학습 환경과의 상호작용을 통해 발달한다.

(2) 나선형 교육과정

① 교육내용으로서의 지식구조는 교육의 수준에 상관없이 특성이 동일하며, 동일한 특성을 지닌 구조가 학년이 높아짐에 따라 더 폭넓고 깊이 있게 교수되어야 한다.

② 계열성이라는 교육과정의 조직 원리를 중시한다.

6) 수학과 학습-지도 이론

> 수학은 문제의 가장 심오한 성질과 여러 가지 문제의 공통 구조를 연구하는 분야이다.

(1) 구성 이론(construction theorem)

① 학생들이 수학적 규칙, 수학적 개념, 또는 수학적 원리를 학습하는 가장 좋은 방법은 그것들의 표현 방법을 구성하는 것이다.

② 수학적 아이디어에 대한 자기 자신의 표현 방법을 구성하여야 한다.

③ 교사는 구체적인 표현 방식을 가지고 학습을 시작해야 하며, 수학적 규칙을 형성하는 활동을 허용해야 한다.

(2) 기법 이론(notation theorem)

① 초기의 구성과 표현 방식이 학생의 지적 발달 수준에 알맞은 기호를 사용하고 있다면, 개념의 이해는 쉽게 된다.

② 수학에서 효과적인 기법 조직이 수학적 원리를 창조하고 확장시키는 것을 가능하게 한다.

(3) 대조와 변화 이론(contrast and variation theorem)

① 수학적 개념의 구체적인 표기 방식으로부터 좀 더 추상적인 표기 방식으로 되는 과정

은 상이하게 대조되는 개념과 각 개념에 대한 변화된 예를 포함하고 있다.

(예) 소수는 1도 아니고 합성수도 아닌 수로 정의되어지고, 무리수는 유리수가 아닌 수로 정의되고 있다.

② 학생들이 수학에서 일반적인 개념을 배우고자 한다면, 각각의 새로운 개념은 다양한 예에 의하여 설명되어져야 한다.

(예) 수열의 수렴 개념을 가르치는데 보통 위상이 주어진 실수 집합, 이산 위상이 주어진 실수 집합, 여유한 위상이 주어진 실수 집합에서 그것의 수렴여부를 따게 된다.

(4) 연결 이론(connectivity theorem)

① 수학적 개개의 기능, 개념, 원리는 다른 기능, 개념, 원리에 연결되어 가르쳐지고, 학생들은 여러 가지 수학적 아이디어들 간의 연결성을 알아야 한다.

② 수학의 각 분야에 있는 요소들 사이의 구조화된 연결은 분석적이고 종합적인 수학적 추론을 가능하게 할 뿐만 아니라, 수학적 사고에서 직관적 비약도 가능하게 한다.

③ 수학적 구조 사이의 연결성은 수학자들의 가장 중요한 연구 활동과 관련이 있다.

④ 오늘날 학교 수학은 대수, 기하, 해석 등의 각 영역에서 또는 이들 영역간의 연결성의 지도를 시도하고 있다.

3.8. 오수벨[91]의 유의미 수용학습

의미 충실한 학습과 기계적 학습의 차이를 수용학습과 발견학습의 차이로 생각하는 경향이 많다. 그 원인은 수용학습은 곧 기계적 학습이며, 발견학습은 의미 충실한 학습이라고 잘못 알려졌기 때문이다. 의미 충실한 학습이란 학습의 과정이 의미 있어야 하며 학습의 결과도 의미 있어야 한다. 과정으로서 의미 충실한 학습은 학습자가 의미 있는 학습자료 세트를 활용하여야 하며 학습하는 자료가 학습자에게 잠정적으로 의미 있는 것이라야 한다. 비록 학습 자료가 의미 있는 것이라 하더라도 학습자가 그것의 의미를 생각하지 않고 단어의 나열로 암기하려고만 한다면 그 학습의 과정도 학습의 결과도 의미 충실할 수 없다.

1) 유의미(의미 충실한, meaningful) 학습

(1) 학습의 종류

① 지식이 획득되는 방식에 따라

㉠ 수용학습(reception learning): 교사가 학습자들이 학습할 모든 내용을 제시하는

91) David Paul Ausubel, 1918~2008

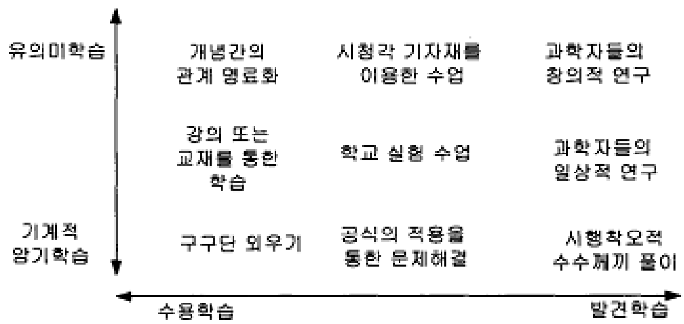
학습형태

㉡ 발견학습(discovery learning): 학습자 스스로 학습할 내용을 발견하는 학습형태

② 지식이 학습자 자신의 인지구조에 통합되는 방식에 따라

㉠ 기계적 학습(rote learning): 학습자가 단지 새로운 지식을 기계적으로 반복하여 암기하는 학습형태

㉡ 유의미 학습(meaningful learning): 새로운 지식이 학습자의 기존 지식에 의미 있게 관련짓는 학습형태



(2) 유의미 학습

① 새로운 교과 내용이 기존의 인지구조 속에 의미 있게 연결될 때(동화가 일어날 때) 유의미적 학습이 일어난다.

㉠ 인지구조: 학습자 내부에 위계적으로 조직된 사실 · 개념 · 원리의 구성체, 가장 포괄적인 개념이 상위에 있고 아래로 갈수록 특수한 개념이 존재하는 구조이다.

㉡ 포섭(subsumption): 새로운 명제나 아이디어가 학습자의 지적수준에 이미 존재하는 포괄적인 인지구조 속으로 동화 또는 일반화되는 과정을 의미한다.

② 학습은 새로운 지식을 기존의 인지구조와 의미 있게 연결짓는 과정이며 기존의 인지구조 상에 새로운 아이디어를 포섭하는 인지구조의 변화과정이다.

(3) 유의미 학습이 일어날 수 있는 조건 3가지

① 실사성과 구속성을 준거로 하는 '유의미적인 학습과제'가 제시되어야 한다.

㉠ 실사성(substantiveness): 학습과제의 구조와 내용을 어떻게 표현하더라도 의미와 본성이 변화되지 않는 불변적이고 절대적이어야 한다.

㉡ 구속성(nonarbitrarity): 학습자가 자신의 의미를 통해 어느 정도 깨달을 수 있는 추상적 용어로 인지 구조에 연결될 수 있는 가능성과 잠재력을 소유해야 한다.

② 학습자는 유의미한 학습과제를 받아들일 '관련 정착 아이디어'를 소유하고 있어야 한다.

* 관련 정착 아이디어(relevant anchoring idea): 학습자의 인지구조에 이미 존재하며, 새로운 개념이 인지구조와 관련을 맺을 수 있는 근거를 제공해주고 파지과정에서 그 의미가 저장될 수 있도록 해주는 아이디어

③ 학습자는 정착 아이디어와 새로운 과제를 관련시킬 수 있는 '태세'를 소유해야 한다.

(4) 의미 있는 학습을 저해하는 세 가지 요인

① 학생의 지적 발달 수준이 어떤 수학적 개념을 의미 있게 학습하기에 충분하지 못한 것이다.

② 학생의 동기유발이 의미 있게 학습할 수 없는 것이다.

③ 교사들이 자기가 사용하는 개념의 정의, 문제해결 규칙, 정리의 증명만이 학습자에게 의미가 있다고 오도하는 것이다.

2) 유의미 수용학습

① 교사의 설명식 지도(학생의 수용학습)가 효과적인 학습이 되려면 '유의미 수용학습'이어야 한다. 즉, 설명식 지도가 기계적 학습을 초래하는 것은 학습자의 인지구조에 동화되지 못하기 때문이며, 설명식 지도 자체가 문제는 아니다.

② 발견학습과 반대되는 것은 '기계적인 학습'이 아닌 '유의미 수용학습(언어학습 또는 구두학습)'이라고 주장한다.

③ 교사는 학생들이 이해할 수 있는 방법으로 설명을 해야 하며 교사의 설명을 학생들은 자기의 기존 개념에 관련하여 비판적으로 수용해야 한다.

3) 유의미 수용학습의 원리

(1) 점진적 분화(progressive differentiation)의 원리

① 학습할 새로운 개념이나 원리를 포함하는 가장 포괄적이고 일반적이며 설명력 있는 통합 개념과 원리를 먼저 제시하고 점차로 특수화되고 세분화되는 방안으로 교수 · 학습 지도를 조직화해야 한다.

(예1) 일반 삼각형의 성질 먼저 학습한 후 직각삼각형의 성질 학습

(예2) 고차 방정식을 포함한 방정식의 근의 뜻 먼저 학습한 후 2차 방정식의 근에 대한 학습

(예3) 이항연산에서 역원의 개념 먼저 지도한 후 복소수의 곱셈에 대한 역원 지도

(예4) $(a+b)(c+d)$의 전개 먼저 지도, $(a+b)^2$의 전개 이후 지도, 101^2의 계산 지도

② 가장 포괄적인 것에서 덜 포괄적인 순서로 제시하며, 제시된 각 조직자 다음에는 그에 따른 세부적이며 분화된 개념 및 실제적 자료를 제공하는 방식으로 점진적 분화가 이루어진다.

③ 일반에서 특수로 나아가는 하향식 교재 구성이 적합한데, 이는 하향식(top-down)으로 구성되는 교과 구조와 인지 구조의 유사성에 기초한 것이라 볼 수 있다.

④ 가정 ┌ 인간은 이전에 학습한 포괄적인 전체에서 분화되는 부분을 더 쉽게 파악한다.
└ 인간은 누구나 자기 나름대로 교과를 조직할 때 가장 포괄적인 정보나 지식에서 덜 포괄적인 정보나 지식으로 계열화하여 조직화하는 버릇이 있다.

⑤ 수학은 다른 교과에 비하여 그 학습 위계가 뚜렷하여 점진적 분화의 원리를 적용시키기에 적합하다.

(2) 통합적 조정(integrative reconciliation)의 원리

① 새로운 학습내용과 이미 학습된 내용 사이에 유사성과 차이점을 분명하게 하여 새로운 학습내용이 인지구조 내에서 의식적으로 조정되고 명확히 분별되어 통합되어야 한다.

② 새로 학습한 개념이나 의미는 이미 학습한 개념들과 관련을 지어 그 구조를 조정할 때 비로소 의미 있는 학습이 가능하다.

③ 대개 교과 내용은 몇 개의 단원 및 그 하위 단원으로 구성되어 있는데, 각각의 새로운 단원이 이전에 학습된 자료와 의미 있게 관련지어지기 위해서 교수 · 학습 순서는 구조화되어야 하며, 새로운 학습은 이전 학습을 바탕으로 하여 이루어져야 한다.

④ 통합이란 한 과목 내에서 부분들, 예컨대 단원의 통합을 의미하는 것이지 다양한 교과 구조의 통합을 주장하는 것이 아님을 주의해야 한다.

(3) 선행조직자(advance organizer)의 활용

> 모든 학과는 고유한 조직적 방법적 구조가 있으며, 학습자도 자기 고유의 인지적 구조를 가지고 있다. 학과의 정보-처리 구조와 정신의 정보-처리 구조는 유사한 것으로 개념화한다. Ausubel에 의하면 학습이란 그 학과의 구조를 학습자가 받아들일 수 있게 지도할 때 의미 있는 학습이 이루어진다. 따라서 새로운 아이디어를 지도하기 위해서는 먼저 그 아이디어를 포함하는, 학습자가 이해할 수 있는, 일반화된 구조를 제시하는 것이다. 이와 같이 지도하고자 하는 개념을 포함하는 일반화된 구조를 선행조직자라고 한다.

① 새로운 내용을 학습할 경우 인지구조 내에 이미 확립된 배경적 아이디어를 고려한 적절한 수준의 일반성, 추상성, 포괄성을 갖는 개념을 의미한다.

② 학습을 촉진하기 위하여 학습 이전에 의도적으로 도입시키는 포섭자로서, 수업의 도입단계에서 주어지는 언어적 설명이다. 즉, 준비도와 유사하다.

③ 시각적 자료, 개념도, 체계적 순서에 따라 나열된 질문서 등 다양한 형식으로 제시된다.

(예1) 수업시작과 함께 던지는 하나의 질문, 이야기, 영화, 시법 등

(예2) 초등학교 6학년 초에 5학년말의 학습내용을 다시 설명하는 것

(예3) 지도 내용: 임의의 두 실수 a, b에 대하여 $a+b-b=a, a-b+b=a$ 를 지도	'하기와 되돌리기' 선행조직자 · 같은 자리에 '앉다 – 서다' · 같은 물건을 '잡다 – 놓다' · 같은 책을 '펴다 – 덮다'

④ 선행조직자의 종류

㉠ 설명 선행조직자

· 학습과제가 학생들에게 생소한 경우에 적용한다.

· 인지구조에 있는 관련 정착 아이디어와 학습되어야 할 학습 과제간의 유사성이 전혀 없는 경우에 개념의 정착 근거지를 마련하기 위하여 학습 자료와 관련지어 학습 전에 미리 제시되는 보다 포괄적이며 기본적인 개념이다.

· 새로운 학습과제를 상위적으로 관련지을 수 있으며, 학습자에게 이미 익숙한 용어(terms)로 개념적 정착지를 제공한다.

㉡ 비교 선행조직자

· 학습과제가 학생들에게 친숙한 경우에 적용한다.

· 설명조직자와 반대로 학습 과제와 관련 정착 의미 간에 상당한 관련이 있을 때, 그 유사성과 차이점을 분명히 하여 변별력을 증대할 목적으로 학습 전에 제시되는 자료를 의미한다.

⑤ 선행조직자의 특성

㉠ 선행조직자는 학습할 내용보다 높은 수준의 일반성을 지녀야 한다.

㉡ 전형적인 교과서에서 보이는 개관이나 요약과는 구별된다. 개관, 요약 등은 학습 자료와 똑같은 수준의 추상성과 일반성 정도로 도입되지만, 조직자는 보다 높은 수준의 추상성과 일반성 정도에서 사용되어 적절한 포섭 개념을 제공한다.

⑥ 선행조직자의 역할

㉠ 학습자의 인지구조 내의 적절한 정착 아이디어를 동원하게 하여 새로운 학습 자료에 잠재적 의미를 부여한다.

㉡ 학습될 내용을 기존의 유사한 개념과 통합하고 조정하며 분별력과 기억력을 높여주는 역할을 한다.

㉢ 선행조직자가 제공되었을 때, 학습 효과가 기대되는 이유로는 논리적으로 유의미한 과제가 잠재적 유의미를 가지도록 개인의 인지 구조 내의 기존의 개념이나 의미를 변형시켜 주기 때문이다. 관련 정착 아이디어 또는 포괄자의 기능을 가지도록 학문영역 상보다 포괄적이고 일반적인 의미를 제공한다.

㉣ 인지 구조 내에 기존하는 적절한 내용을 확인하기도 하고, 후행하는 과제의 적절성을 분명하게 확인하는 데에도 도움을 준다.

∴ 선행조직자가 학습을 촉진시키는 이유

① 파지를 촉진시킨다.

: 하나의 학습과제가 주어졌을 때 선행조직자는 이 과제와 직접적으로 관련된 정착 아이디어를 집합시켜 포섭자를 만들고, 이 포섭자는 주어진 과제들을 보다 친숙하게 해주며 새로운 과제의 학습을 위한 개념적 근거지를 제공해주기 때문

② 이해측면의 학습을 촉진시킨다.

: 기억에만 의존하지 않게 새로운 과제와 선행조직자 사이에 유사점과 차이점을 구별해주기 때문

4. 구성주의(급진적 구성주의, 사회적 구성주의)

> * 구성주의 교육철학: 의미있는 수학 학습을 위해 '앎'과 의미의 주관성이 중요하며 교사는 학습자 스스로 지식을 '구성' 할 수 있도록 안내해야 한다.
>
> 구성주의자들에 의하면 모든 지식은 주체에 의해 자주적으로 구성되는 것이며 사회적인 상호 작용을 거쳐 합의됨으로써 공적인 지식이 되는 것으로 본다. 따라서 학습자의 자발적이고 능동적인 사고 활동, 토론과 의사 교환, 안내자로서의 교사의 역할을 강조한다.

4.1. 구성주의의 발달

1) 구성주의의 생성 과정

> 고대 그리스 시대의 회의주의자 → Descartes → Kant → Dewey → 구성주의

① 1960년대와 1970년대에 걸쳐 행동주의로부터 여러 가지 형태의 구조주의와 인지주의로의 철학적 전환이 있었고, 이러한 전환기에 생겨난 인지론의 한 형태가 구성주의로 알려지게 되었다.

② 구성주의의 인식론적 근거는 B.C 6세기 경 소크라테스 이전의 초기 회의주의자로부터 시작하여 합리론자, 경험론자, 비판론자 그리고 금세기의 프래그머티즘 사상가들에 의해 발전되었다. 그러다 1960년대와 1970년대를 거치면서 그 이론적 체계를 갖추게 되었다.

2) 구성주의의 발달

> 구성주의는 '아는 자(인식의 주체, 인식자)의 개념, 알려지는 것(인식의 대상, 즉 객체)의 개념, 아는 자-알려지는 것의 관계(인식의 관계)에 대한 개념'을 모두 포함한다.

① Bettencourt: 구성주의에서는 경험적 대상으로부터 획득한 또는 구성된 지식을 포함하여, 그 지식의 획득 과정에 있어서의 '알게 되는 행위'까지 모두 고려한다. ⇔ 우리가 갖게 되는 모든 지식은 우리 자신이 구성한 결과이다.

② Noddings(1990): 구성주의는 인지적 입장과 방법론적 입장 모두를 포함하여 발전한다.

㉠ 인지적 입장: 모든 지식은 구성되어지는 것이고, 구성의 수단 또는 도구는 본유적이거

나 구성의 산물인 인지적 구조로 생각한다. 즉, 구성의 수단이 되는 구조 자체도 발달적 구성의 산물이다.

㉡ 방법론적 입장: 인간은 지식 획득의 주체자이며, 고도로 발달된 능력을 사용하여 지식을 획득할 수 있다.

③ Kilpatrick(1987): 지식은 인식 주체에 의하여 능동적으로 구성되어지는 것이며, 결코 환경으로부터 수동적으로 받아들이는 것이 아니다. 그리고 알게 된다는 것은 자신의 경험 세계를 조직하는 조절 과정이다. 즉, 그것은 인식 주체의 관념밖에 독립적으로 이미 존재하는 세계를 발견하는 것이 아니다(급진적 구성주의).

4.2. 구성주의의 종류

1) 글라저스펠드[92]의 급진적 구성주의(Radical Constructivism)

(1) 급진적의 의미

① 급진적 구성주의: 진리성의 검증 기준으로 지식과 실재 사이의 관계를 포기하고 대신 적합성을 검증 기준으로 대체하여 진리를 바라보았다. 즉 객관적 지식의 확인을 위해 지식을 다시 그 지식의 바탕이 되는 실재와 관련시킬 필요가 없으며, 대신 경험에 비추어 그 지식의 적합성을 다루면 된다.

② '급진적'의 의미: 대부분의 경험주의가 바탕으로 하는 있는 형이상학적 실재론을 거부하였기 때문에 급진적이라고 규정하게 되었다.

(2) 급진적 구성주의의 원리

① 자주적 구성의 원리: 지식은 감각을 통하거나 의사 교환의 방법에 의하여 피동적으로 받아들여지는 것(수용되는 것)이 아니라 능동적으로 인식하는 주체에 의하여 구성되어지는 것이다. 따라서 지식이란 인식 주체가 대상에 대한 활동을 능동적으로 수행함으로써, 스스로의 내면세계 속에 구성해 나가는 것이지 감각 기관에 의한 지각이나 의사전달에 의하여 타인으로부터 수동적으로 받아들임으로써 획득되는 것이 아니다.

② 생장 지향성의 원리: 인식 기능은 적응적이고 (생물학적 용어로 표현하자면) 적합성 또는 생장성을 지향하는 경향이 있다. 따라서 인식 작용을 실세계에 맞추어 나가는 것 즉, 실세계에 완전히 일치시키는 것이라기보다는 실세계에 적합하도록 그 세계에서 생

---

92) Ernst von Glasersfeld, 1917~2010

장해 가게 하는 생장 지향성을 활성화시키는 것이다.

③ 비객관성의 원리: 인식은 주체가 경험적 세계를 조직하는데 공헌하는 것이며, 결코 객관적 · 존재론적 실재의 발견을 돕는 것은 아니다. 즉, 지식은 인식 주체가 경험 세계를 조직 · 정리한 결과로 획득하는 것이며, 객관적 진리가 발견에 의해 획득되는 것으로 간주하지 않는다. 이러한 진술은 객관적 지식의 존재를 부정하는 견해를 나타내고 있는 것으로 생각될 수 있다.

(3) 급진적 구성에서 바라본 지식의 획득

① 지식은 언어를 통해 전달될 수 없으며, 개인의 경험을 통한 추상화 과정에 의해 구성된다. 즉, 언어는 지식을 적절히 전달하지 못한다.

② 개인은 자신의 경험 세계에 잘 대처하고 적응하기 위한 지식을 구성한다. 즉, 지식의 발달은 적합성에 의해 가능하다.

③ 지식은 인간이 구성한 것이며 그것이 인간이 할 수 있는 전부이다. 그러므로 객관적 실재의 존재 여부 또는 그것과 지식과의 관련성은 무의미하다.

④ 개별 주체들의 의사소통은 주관적 경험 세계의 상대적 합의 영역이 존재할 때 가능한 것이며, 객관적인 실재의 본질로부터 도출되는 것은 아니다.

⑤ 수학적 지식의 확실성은 수학적 지식의 적합성, 적응성으로 대치되어야 한다.

⑥ 교사는 안내자로서 학생 개개인이 각기 다양한 방식으로 지식을 구성하는 것을 격려해야 한다.

(4) 조작적 구성주의와 급진적 구성주의의 차이점

피아제의 조작적 구성주의	글라저스펠드의 급진적 구성주의
· 학습은 본질적으로 내용과 상황에 좌우되지 않는다. · 발달 단계인정, 학습은 보편적인 현상으로서 학생이 성숙하는데 따라 어떤 예정된 방향으로 발달하는 것이다. · '발달 단계'는 일반적인 논리적 능력의 발달을 중심으로 생각한다. · 인식의 주체와 주위의 대상과의 상호 작용에 의한 지식의 주관적인 구성을 강조한다. · 합리주의적 철학관에 보다 가까우며 객관성에 대하여 완전히 배제하고 있지 않다.	· 학습은 내용과 상황에 의존한다. · 학습은 작은 영역에 한정된 현상이며 어떤 예정된 방향으로 발달하는 것이 아니고 연령과도 별로 관계가 없다. · '발달 단계'라는 것은 '어떤 현상에 대한 개인의 개념 발달'을 의미한다. · 개인의 지식 구성에 있어서 사회적 과정에 크게 주목한다. · 상대주의적 철학관에 입각하여 주관 독립적 의미에서의 객관성을 배제한다.

(cf) Kilpatrick, Bettencourt, von Glasersfeld 등은 급진적 구성주의를 완성된 이

론이라고 보기보다는 인식의 주체, 지식 그리고 지식의 획득에 관련된 과학적 이론으로 보고 폭넓은 범위에 걸친, 그리고 다양한 주장을 함께 묶고 있는 ‘만들어지고 있는’ 이론으로 보았다.

2) 사회적 구성주의(Cobb, Ernest)

(1) 20세기 초 수리철학의 변화

① 20세기 초 수학적 지식에 대한 절대주의적 관점[93)]은 신랄한 비판의 대상이 되었고 그 결과 수학의 확실성을 찾고자 많은 노력이 있었으나(논리주의, 직관주의, 형식주의) 결국 수학의 본질을 찾고자 하는 노력이 실패하게 되었고 수학적 지식의 절대적 관점을 부인하고 오류주의적 관점[94)]을 인정하는 사조가 출현하게 되었다.

② 20세기 Dewey의 철학은 진리와 인간 이성에 대한 전통 철학적 관념을 거부하고 이때까지 발전해온 현대철학의 모든 유형들을 총칭하여 후기 현대철학이라고 정하고 확고 불변한 진리에 대한 도전과 지식의 상대성을 주장하였다. 이러한 철학의 이면에는 사회 문화적 산물로서의 지식을 형성하고 창조해 나가는 인간 주체성의 중요성, 협동적인 지적 탐구와 대화의 중요성뿐만 아니라 사회적 협동 과정에서 비판적 능동적으로 참여하는 주체적 개인의 형성을 가능케 하는 근원적 힘으로서의 사회 문화적 전통과 환경의 중요성, 또한 그런 사회 문화적 전통을 형성하는 바탕으로서의 인간의 도덕적 선택과 관여의 중요성에 대한 깊고도 새로운 인식이 굳건히 자리 잡고 있었다.

③ 철학의 변화는 수리철학에도 스며들었으며 우리는 수학의 확실성과 진리의 기초를 결정하고자 했던 기초주의 시대를 지나 이제는 수학의 확실성과 진리성을 거부하는 오류주의를 맞게 되었다.

④ 변화된 수리철학의 대표적인 조류는 Lakatos, Tymoczko로 대표되는 준-경험주의, Kitcher와 Aspray를 위시한 무소속주의(maverick), von Glaserfeld가 주장하는 급진적 구성주의, 그리고 Ernest, Bauersfeld의 사회적 구성주의 등을 들 수 있다.

⑤ 수학의 본질에 관한 논의는 확실성, 객관성에서 지식사회 구성원의 합의에 의한 진리 개념으로 바뀌어 가고 있으며 수학을 객관적 실체가 아니라 역사 속에서 창조되고 진화되는 사회적 실체로 보고 있다.

---

93) 수학의 진리와 증명은 연역과 논리에 의존하는데, 그런 논리 자체에 대한 기초가 부족하며 이런 부족을 충족시키기 위해서는 수학적 진리에 대한 여러 가정들의 집합을 더 증가시켜야만 하고 또한 확고한 기초가 없는 가정은 직관, 관습, 의미 또는 무엇에서 파생되었든지 오류 가능하다는 것이다.

94) 오류주의적 관점은 수학적 지식이 오류가능하고 수정가능하며 결코 개정과 수정을 초월한 것으로 볼 수 없다는 것이다.

(2) 사회적 구성주의 발생 과정

① 급진적 구성주의의 '자주적 구성의 원리'와 '생장지향성의 원리'는 동의하되 '비객관성의 원리'를 수정 · 보완하여 공통 주관적인 의미의 객관성을 새롭게 정립하였다.

② 전통적으로 굳게 믿어온 객관적 지식의 존재 내지는 체계를 통째로 부정하는 듯한 급진적 구성주의자의 비객관성의 원리는 많은 수학교육자들에게 커다란 충격을 주었다. 따라서 새로운 측면의 급진적 구성주의를 수정 · 보완하고자 하는 움직임이 이른바 '사회적 구성주의'라는 일련의 새로운 구성주의가 대두하게 된 배경이라 할 수 있다.

③ 사회적 구성주의에서 주장한 객관성이란 모든 사람들의 공통 주관적인 '합의'의 개념 즉 '공통 주관성(합의성, 사회성, 협정성 등)'을 의미한다.

[참고] 객관적 지식의 의미

㉠ 오류주의적 관점은 수학적 지식의 정당화의 수단인 증명의 규준이 결코 객관적이고 궁극적인 것이 아니라 '오늘날까지는 충분하다'는 것이며 그것들은 영원히 수정될 가능성이 있다고 본다.

㉡ 수학적 증명은 그것의 증명이 명백하고, 객관적인 논리적 규칙들을 충족시키기 때문에 그런 것이 아니라 개인들, 특히 수학 공동체의 적절한 대표자들을 충족시키기 때문에 적절히 정당화된다고 생각하는 것이다. 따라서 수학적 지식과 그것을 뒷받침하는 증명의 규준들은 그 시대의 수학자들이 인정하는 것에 의존한다. 이러한 메타지식은 역사적 위치에 따라 매우 다양하다.

㉢ 이러한 말이 수학적 지식 또는 증명의 규준이 임의적, 비합리적 또는 비논리적이라고 말하는 것은 아니다. 수학자들은 그들의 가장 전문적인 판단과 몇몇 명백히 진술된 규칙들에 기초하여, 합리적인 공공의 비판을 견뎌내는 것만을 수학적 지식으로 인정한다. 더욱이, 전문적인 판단과 사용되는 규칙을 적용하는 데는 한 세대와 다음 세대 사이의 연속성이 있고 어떤 변화도 그 자체가 공동으로 논의되고 정당화된다. 수학적 개념, 정의, 정리, 증명, 이론, 증명 규준들은 성장하고, 변하고 때로는 엄밀성과 증명의 규준들이 변함에 따라 시간의 긴 통로를 지나면서 폐지되기도 한다. 따라서, 그것들의 '객관성'은 실제적으로 상호주관적이며, 시간과 공동체에 의존되며, 역사적 연속성과 전통에 깊게 뿌리박고 있다.

㉣ 객관적 지식은 상호 주관적이고 사회적인 모든 지식을 의미하는 것이라 할 수 있다. 즉 문화와 같이 암묵적으로 받아들여진 규칙에 적합하게 자율적으로 발달하며, 개개인의 임의적 생각에 의존되지 않는다.

> 객관성이란 어떤 개인에게도 속하지 않으며, 개인의 주관적인 상태나 기호에 좌우되지 않는 모든 개인에게 공유될 수 있는 신념을 의미한다.

㉤ 수학의 객관성이란 지식과 대상의 존재성에 관하여 상호주관적인 동의가 있고, 이 존재성이 개인의 주관적 지식에 독립적인 자율성을 가진다. 이러한 수학적 지식의 객관성은 '자연 언어'의 공유된 지식에 근거하며, 또한 수학에서 중요한 역할을 하는 논리의 사용 또는 엄격한 언어 규칙을 따르며, 이러한 자연 언어의 기초에 의존하면서 수학자들은 형식적이고 비형식적인 수학적 대화를 확장해 갈 수 있는 것이다.

(3) 인류학적 구성주의(학급 안에 존재하는 사회의 상호작용 메커니즘에 주목)

① 지식에 대한 심리학적 분석과 학급 환경에 대한 인류학적 분석을 서로 대등한 정도에서 조정하고자 했다. 인류학적 관점에서 급진적 구성주의를 보완하려 했다.

② 학생이 구성하는 수학적 지식은 인지적 맥락에서뿐만 아니라, 학급 그 자체를 하나의 공동체로 보고 인류학적 관점(넓은 의미에서 보자면, 인류학적 관점은 결국 사회적 관점으로 볼 수 있다)에서 볼 필요가 있음을 강조하고 있다.

> 인류학적 관점에서 이들 공공화된 수학 지식은, 그 공동체의 구성원들에 의해 구성된 즉, 합의된 영역을 구축하는 곳에서 새로운 의미를 갖게 된다. … 인류학적 관점에서 수학의 정리는 수학 공동체의 구성원들에 의한 조정 활동에 의해서 새로 공공화된 진리라고 볼 수 있다. … (언어나 수학을 포함하여) 문화적 지식은 공동체의 구성원 사이의 조정 활동을 통하여 끊임없이 재창조되거나 수정된다.

③ 하나의 학급을 그 자체의 고유한 문화, 역사, 규약 등을 갖는 공동체로, 또한 그러한 것을 생성해 내는 하나의 사회로 보아야 한다는 것을 강조한다. 학급 안에 존재하고 있는 사회의 상호 작용 메커니즘에 주목해야 한다.

④ 수학적 지식관 3가지

㉠ 수학 지식은 공동체의 구성원 사이의 상호 교섭 등을 통하여 개개인에게 구성된다. 그리고 구성원 사이의 조정 활동을 통해 하나의 합의된 영역으로 구축된다.

㉡ 합의된 영역 안에 존재하게 되는 수학의 정리는 새로 공공화 되어 진 진리로 볼 수 있다.

㉢ 어떤 공동체에서 합의된 영역은 그 공동체 또는 다른 공동체의 구성원들과의 조정 활동을 통해서, 끊임없이 재창조되거나 수정된다.

⑤ 수학적 지식이란 공동체에서 합의되고 공공화 된 진리일 뿐 절대적이거나 보편적인 것은 아니다. 즉 공통 주관적인 지식이다. 즉 합의된 영역을 수학 교수 · 학습의 목적이

나 기준의 근거로 사용할 수 있는 것이다. 학생들은 합의된 영역 내의 지식을 주체적인 입장에서 구성적으로 학습한다.

(4) 사회적 구성주의(규약주의 수학관을 기반으로 한 상대주의적 철학 제창)

① 어니스트[95]는 절대주의적 입장에 서 있는 종래의 수리철학인 논리주의, 형식주의, 직관주의가 모두 불완전하다고 지적하면서 규약주의 수학관을 기반으로 한 상대주의적 철학을 제창하고 그것을 사회적 구성주의라고 불렀다.

㉠ 수학적 지식의 기초는 언어적 지식, 규약, 규칙이며 언어는 사회적 구성물이다.

㉡ 주관적인 수학적 지식이 공표 후에 수용될 수 있는 객관적인 수학적 지식으로 변하기 위해서는 간주관적(공통 주관적인 사회적) 과정이 필요하다.

㉢ 객관성 그 자체는 사회적이라고 이해될 수 있다.

② 가설(수학적 지식은 사회적으로 구성된 것이다.)

㉠ 개인은 주관적 수학 지식을 소유하고 있다.

㉡ 공표는 주관적 수학 지식이 객관적 수학 지식으로 되는데(충분하지는 않지만) 필요하다.

㉢ 라카토스의 발견술을 통하여, 공공화 된 지식은 객관적 수학 지식이 되어 간다.

㉣ 라카토스의 발견술은 객관적 기준에 의거하고 있다.

㉤ 공공화 된 수학적 지식을 비판하기 위하여 객관적 기준을 수학뿐만이 아니라, 객관적 언어 지식에도 바탕을 두고 있다.

㉥ 주관적 수학 지식은 대부분이 내면화되고, 객관적 지식으로 재구성된다.

㉦ 개인적 공헌이 수학적 지식을 재구조화하거나 재생산하기 위해 추가될 수 있다.

③ 특징

㉠ 주관적 지식의 발생 그 자체보다는 주관적 지식으로부터 객관적 지식으로의 이행, 즉 수학적 지식의 개인적 구성이 아닌 사회적 구성에 중점을 두고 있다.

㉡ 수학적 지식의 사회적 구성 과정에 있어서 라카토스의 발견술을 중요한 원리로 삼고 있다.

㉢ 객관성을 사회적으로 파악하고 있다.

㉣ 객관성의 근거를 자연 언어의 공유성에 두고 있다.

④ 글라저스펠드는 주로 주관적 구성과 인지적 측면을 논하고 있으며 언어의 비공유성을 강조하는 반면, 어네스트는 주로 사회적 구성과 철학적 측면을 논하고 언어의 공유성을 강조하고 있다.

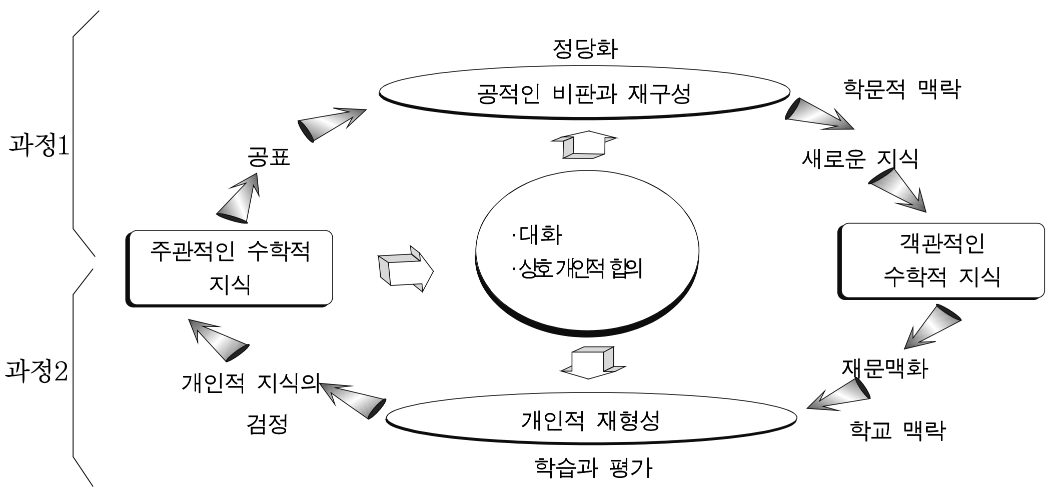
95) Paul Ernest, 1944~

(5) 사회적 구성주의의 수학관 정리

> 사회적 구성주의는 급진적 구성주의의 기본 원리 가운데 하나인 비객관성의 원리의 수정 · 보완에 주안점을 두며, 그 수정 · 보완의 이론적 근거를 사회적 입장에서 추구하고 있다.
> ⇒ 사회적 상호 작용에 의해 학생의 주체성을 중시하고 학생 각자의 가능성을 살려 나가는 데 효율적인 수학교육을 위한 수학 교수·학습론의 바탕 이론이 될 수 있다. 왜냐하면 수학 지식이 학생에 의해 주체적으로 구성되고 이렇게 구성된 지식이 학급에서의 발표 및 친구들과의 토의에 의해 공통 주관적인 의미의 객관적 지식이 될 수 있기 때문이다

① 사회적 구성주의는 상대주의적 수학관을 바탕으로 한다.
② 인식론으로서의 사회적 구성주의는 과학철학론으로서의 규약주의를 바탕으로 한다.
③ 사회적 구성주의에서는 수학 지식의 심적 구성, 사회적 구성 및 이들의 상호작용을 기본으로 한다.
④ 사회적 구성주의에서는 주관을 뛰어 넘는 객관적 지식의 근거를 공동체에 있어서의 합의, 공유에서 구하고 있다.

(6) 사회적 구성주의에서 본 수학적 지식 구성 과정



① 과정1
㉠ 사회적 구성주의는 주관적 지식으로부터 객관적 지식으로의 이행, 즉 수학적 지식의 사회적 구성의 과정에 관심의 초점을 두고 있다.
㉡ 주관적인 수학적 지식이 객관적인 수학적 지식이 되기 위해서는 사회적 과정이 필요하다.

㉢ 사회적 상호 작용이 지식 형성 또는 구성 과정의 핵심이다.

㉣ 라카토스의 수학적 발견의 논리를 공표된 수학에 적용하는 과정이다. 즉, 증명과 반박에 의한 수학적 지식의 역사적인 성장과정, 곧 추측하고, 추측에 대한 사고 실험으로서 증명을 하고, 반례를 제시하고, 괴물배제법, 예외배제법, 보조정리 합체법 등에 의해 추측과 증명을 세련시켜 가는 과정이다.

② 과정2

㉠ 사회의 객관적인 수학적 지식이 개인의 주관적 지식으로 내면화된다는 것은, 언어와 학습을 통하여 객관적인 수학적 지식에 대한 내적인 주관적 표상을 구성하는 것을 의미한다.

㉡ 개인은 학습을 통해 객관적인 수학적 지식의 고유한 표상을 가지게 된다. 이 과정에서 '사회가 개인의 인식에 개입하는 매개물'로서 언어와 같은 사회적 표현이 중요한 역할을 한다.

(7) 사회적 구성주의에 기초한 수학 교수 원리

① 학습자의 의미와 사전 지식을 존중해야 한다.

: 수학의 지식과 수학의 이해는 의미 형성에 의존하므로 학생들의 학교 밖의 지식의 가치 또한 고려해서 그들의 아이디어, 해석, 방법 그리고 학교 외적인 문맥과 의미 있는 세계들을 기술하게 함으로써 여러 어휘와 용어에 관련된 의미들을 확장시키는데 관심이 집중되어야 한다. 이를 통해 이 세계에 대한 아동 나름대로의 수학적 이론을 구축하도록 해야 한다.

② 학습자의 수학적 방법들을 기초로 협의와 대화를 통한 수업이 이루어져야 한다.

: 학습자들이 문제를 해결하기 위한 자기 자신의 알고리즘과 표현 기호법 등을 개발하는 교수학적 상황을 제공해야 하며, 수학의 일반적인 정의와 기본적인 준거를 명백히 인식할 수 있도록 해야 하며, 수학의 지적인 도구를 사용할 수 있도록 해야 한다. 이러한 과정에서 대화와 변증법, 즉 언어가 필수적인 역할을 한다. 학생들은 수학과 수학교육에 대한 자신들의 개인적 지식을 사용해서 수학적 지식을 타 학생들에게 직접 또는 간접적으로 표현하고 다른 사람의 수학적 지식의 주장들을 비판하고 정당화하는 변증법적 과정에 참여하기 위한 수학 학습 대화를 조정하고 지배하여야 한다.

③ 수학과 응용의 분리불가능성 그리고 동기와 적절성의 중요성 등을 고려해야 한다.

: 수학의 여러 개념, 방법 그리고 여러 도구들은 그것들의 역사적 기원과 문화적인 기원 그리고 그것들의 도움이 되는 문제들, 현재의 사용과 응용, 학습자의 생활과 관심에

직접적인 의미가 있는 사용 문맥들에 비추어 다루어야 한다. 이러한 과정에서 아동들은 나름대로 수학의 창조자로서의 그 역할을 의미 있게 감당해 나갈 수 있을 것이다.

(8) 대화의 역할

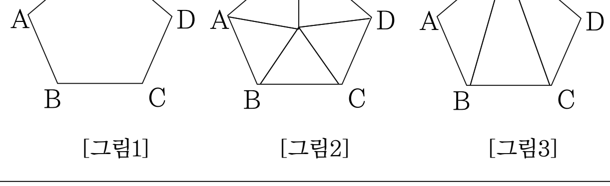
① 사회적 구성주의는 수학을 사회적인 구성으로 보고 특히 수학의 인식론적 기반을 언어로 채택하여 수학을 대화와 변증법에 비유해서 설명하고자 한다.

② 대화를 사회적 구성주의 수리철학의 기본적인 인식론적 관념으로 채택하는 근원은 고대 그리스시대의 소크라테스의 대화법으로 볼 수 있고 그 후 수학적 발견의 변증법적 논리를 제공한 라카토스에 기반을 두고 있다.

③ 사회적 구성주의의 논리적 수학적 증명의 시작과 그것의 현대적인 발달은 수학적 증명의 뿌리가 변증법, 인간의 대화 그리고 의사소통에 있다고 보고 있다. 이와 같이 대화를 인식론적 기반으로 택함으로써 수학적 지식이 사회적인 상황에서 인간의 앎과 의사소통의 행동 속에서 발생됨을 설명한다.

(9) 사회적 구성주의를 이용한 수업의 예시: 중학교 1학년 '다각형의 내각의 크기의 합'에 관한 수업

김 교사: 이런 오각형에서 내각의 크기의 합이 얼마일지 생각해 봅시다. [그림1]
(학생들의 소집단 토론이 진행된다.)
김 교사: 자, 이제 발견한 사실을 발표해 볼까요?
학생 A: 오각형의 내각의 크기의 합은 5×180도가 됩니다.
김 교사: 학생 A가 오각형의 내각의 크기의 합이 5×180도라는 의견을 제시하였습니다. 이 의견에 대한 질문이 있습니까?
학생 B: 왜 5×180도가 된다고 생각하는지 설명해 주세요.
학생 A: 이렇게 잘라서 각의 크기를 모두 합하면 5×180도가 됩니다. [그림2]
학생 B: 오각형을 이렇게 자르면 내각의 크기의 합이 3×180도가 되는데요? [그림3]



[그림1] [그림2] [그림3]

이 대화 속에서 학생 A와 학생 B는 각기 구별되는 주관적 지식을 제안하였다. 김 교사는 두 학생의 주관적 지식이 합의된 객관적 지식으로 변환해 가도록 안내하려고 한다. 안내 과정을 두 단계로 나누어, 김 교사가 각 단계별로 할 수 있는 주요한 질문과 그 질문의 의도를 사회적 구성주의의 관점에서 각각 다음과 같이 제시할 수 있다.

단계	질문	의도
1단계	A학생과 B학생의 생각에 동의하거나 반대하는 사람 있으면 발표해보세요.	서로의 의견을 발표하고 상대방의 의견을 경청하여 자신의 의견과 비교하기 위해서이다.
2단계	자신의 생각이 왜 옳은지 또는 상대방의 생각이 왜 틀렸는지 발표해보세요.	상대방의 생각을 자신의 의견과 비교하고 자신의 의견을 반성하여 올바른 지식을 판단하기 위해서이다.

4.3. 구성주의[96]의 원리

구성주의는 조작, 반성, 토론을 중시하는 수학 수업을 지지한다고 할 수 있다. 이러한 수학교육학적 구성주의의 교수 · 학습 원리로 '학생 중심적 개별화의 원리', '발문 중심적 상호 작용의 원리', '의미 지향적 활동의 원리', '반영적 추상화의 원리'를 제시할 수 있다.

1) 학생 중심적 개별화의 원리

① 수학 학습 활동의 주체는 학생 개개인이며, 학습 활동은 학생 개개인의 지적 자율성에 바탕을 두어야 한다.

② 학생 개개인이 실패 또는 인지적 갈등 상황에 처했을 때, 개개인의 내부로부터 사회적 상호작용의 욕구가 스스로 발동되며, 주변과의 조절을 통해, 실패 또는 인지적 갈등 상황을 해결하게 되는데, 이 해결의 양상에는 학생 개개인의 능력에 따른 개인차가 존재한다.

③ 개개인의 수학적 능력에 맞는 개별적 교수 학습을 통해, 각 개인의 수학적 능력을 극대화하는 것을 지향해야 한다.

④ 수학 교수 · 학습에서 개인의 능력차 및 개성의 차이를 고려하는 교수 학습을 의미한다. 교사가 학생 개개인의 능력의 차와 개성의 차를 인지하고, 학생 개개인이 가장 효율적으로 학습하며, 자신의 능력을 최대한으로 발휘할 수 있도록 해 주는 교수 학습을 지향해야 한다.

96) 수학적 개념을 구성주의 관점으로 지도하는 예시로는 '학생들에게 다양한 평행사변형을 그려서 공통된 성질을 찾아보게 한 후, 이 성질을 활용하여 평행사변형이 되는 조건을 써보게 하면서 평행사변형을 지도' 하는 것 등이다.

⑤ 학생의 개인차를 고려하여 학습 결손을 보이는 학생 한 명 한 명에게 적절한 지도를 해야 하며, 한 문제를 해결할 때도 여러 가지 생각이 있을 수 있으므로 각각의 방법의 가치를 인정해 주고 보다 훌륭한 방법으로 다듬어 나가도록 지도해야 한다.

2) 발문 중심적 상호 작용의 원리

① 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용은 매우 중요하며 이 때 교사는 적절한 발문을 통해 학생의 응답을 유도해내고 학생들은 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학적 지식을 재발명하여야 한다.

② 학생이 학습의 주체가 되어 스스로 지식을 구성해 갈 수 있도록 교사가 발문을 중심으로 하여 학생을 안내하거나 조력해야 한다.

③ 학생들은 발문에 답하는 과정을 통하여 자신들의 생각을 분명히 정리할 기회를 얻으며 다른 학생들의 생각과 자신의 생각을 비교해 보는 차이점을 파악하여 자기 생각을 수정하고, 이미 알고 있는 것과 새로 배우게 되는 지식 사이의 관계를 구성해 나갈 수 있다.

④ 교사의 발문을 계기로 학생 상호간에 토의하고, 확인하고, 생각을 수정하고, 새로운 방향을 찾아내는 교실 문화를 만들어 나가는 것이 중요하다.

⑤ 발문에는 학생들이 수학적 사고 활동을 할 수 있도록 동기를 유발하고 스스로 수학 지식을 구성해 나갈 수 있도록 자극을 주는 교사의 조언이 포함된다.

⑥ 학생이 지식을 자주적으로 구성하도록 돕기 위해서는 학습내용과 학습자의 심적 상태를 고려하여 긴장감을 불러일으키는 질문과 조언, 학습자의 적극적인 관심을 유발시키는 질문과 조언을 해야 한다.

⑦ 정보나 사실을 확인하는 유형의 발문은 학생들로 하여금 생각할 필요를 느끼게 하지 못하며 이미 학습한 지식을 단순히 회상하는 기회만 제공하기 쉽다. 그러므로 학생들로 하여금 논리적으로 조직된 정보로부터 새로운 어떤 것을 구성할 것을 요구하는 발문, 다양한 대답을 하도록 요구하는 발문, 주어진 자료로부터 알게 된 것을 설명하도록 요구하는 발문, 관찰한 것을 자신의 생각대로 묘사할 수 있는 기회를 제공하는 발문 등 사실 확인 이상의 더 많은 것을 요구하며 적극적으로 생각해 보게 하는 다양한 발문을 해야 한다.

⑧ 교사는 학생과의 상호 작용에 입각하여 발문을 해야 한다. 교재 내용을 충분히 분석하고 사고 실험을 거쳐 예상 가능한 학생의 반응에 충분히 대처할 수 있는 발문을 계획적으로 준비할 필요가 있다. 학생 개개인에게 적절한 발문을 해주기 위해서는 학생들이 무엇을 알고 있고 무엇을 생각하고 있는지를 주의 깊게 살펴보아야 한다.

3) 의미 지향적 활동의 원리

① 교사나 사회에 의한 수학 지식의 가치가 아닌 학생들에게 의미 있는 수학지식을 학생들이 배워야 하며 이와 더불어 학생들이 교수 · 학습 활동에 스스로 참여해야 한다.
② 많은 경우 수학적 지식은 학생들에게 본래 그러한 것으로 주어지고, 학생들은 그러한 지식이 왜 주어졌는지에 대한 깨달음 없이 주어진 수학 지식을 수용한다. 하지만 이러한 수학교육은 옳지 못하며, 학교수학은 학생들에게 의미 있는 것이어야 한다.
③ 예를 들어, 산가지 묶음과 같은 구체물로 덧셈을 계산할 때 학생들은 큰 단위부터 작은 단위 쪽으로, 왼쪽에서 오른쪽으로 계산을 하지만 교사가 제시한 알고리즘은 거꾸로 작은 단위 쪽에서 큰 단위 쪽으로 계산한다. 결국 왼쪽에서 오른쪽으로의 계산이 학생들에게 자연스럽게 느껴지는 활동 상황에서 교사가 오른쪽에서 왼쪽으로 계산해 나가는 알고리즘을 직접 교수하고 강요한다면 이는 의미 지향적 활동의 원리에 입각한 수업이라고 하기 어렵다.

4) 반영적 추상화의 원리

① 학생들은 내면적으로 이루어지는 동화와 조절 등의 자주적 활동 즉, 반영적 추상화에 의해 수학적 지식을 구성하여야 한다.
② 학생 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 반성적 활동이 중시되어야 한다.
③ 학생들의 조작 활동을 중요시하는 것은 반영적 추상화의 원리에 부합하는 것이다. 그러나 손으로 하는 조작 활동이 항상 의미의 구성을 증진시키는 것은 아니므로, 의미의 구성을 증진시키는 조작 활동으로 이끄는 것이 중요하다.
④ 학생에 의한 반영적 추상화가 이루어지게 하기 위해서는 학생들이 자신들의 행동 그 자체를 사고의 대상으로 삼도록 고무하고 격려하는 환경을 조성해야 한다. 이러한 환경 속에서 학생들이 행한 조작 활동이 수학지식을 구성하는 데 있어서 가치 있는 기초가 될 수 있다. 조작 활동이 반성과 결부되지 못하고 조작 활동 자체로 끝난다면, 그것은 지식을 구성한 것이 아니라 단지 신체를 움직이는 활동을 한 것뿐이라고 할 수 있을 만큼 반성의 과정은 중요하다.

5. 현실주의(Realistic Math Edu. 프로이덴탈, 반힐)

5.1. 프로이덴탈[97]의 수학화 교수 · 학습론

프로이덴탈은 네덜란드 수학자이며 수학교육학자로서, 완성된 수학(ready-made mathematics)을 지도하는 것이 아니라, 수학화(mathematising)를 지도하여야 한다고 주장하였다.
프로이덴탈은 수학적 개념, 구조 또는 수학적 아이디어라고 하는 본질이 물리적, 사회적 그리고 정신적 세계의 여러 현상을 조직하는 수단으로 발명되어진 결과라는 사실에 기초해, 수학의 교수 · 학습의 과정에서도 조직될 필요가 있는 현상으로부터 시작하여 학습자로 하여금 조직의 수단인 그 본질에 숙달하도록 해줘야 한다는 관점에서 교수학적 현상학을 도입하였다.

1) 프로이덴탈의 수학관

반교수학적 전도		대안
① 전통적인 수학교육에서와 같이 기성의 '닫힌' 지식체계에 따른 수학의 지도 ② 기성수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구성하는 것 ③ 구체화를 통한 개념 형성을 위한 지도 ④ 기성 지식을 초등화해 가르치는 것 ⑤ '새수학[98]'의 EIS 방법론	➡	① 현상의 정리수단으로서의 수학과 '실행하는 수학'의 경험 ② mental objects의 구성과 그 점진적인 형식화 ③ 수학 학습과정의 관찰과 수준의 비약을 통한 수학화 경험을 골격으로 하는 재발명 방법 ④ 〈수학적 구조의 교수학적 현상학〉 제시

① 수학은 인간이 확실성을 추구해 가는 정신적 활동으로, 상식에 바탕을 두고 더 높은 차원으로 상식화되면서 발전해 나아가는 과정이다(대중 수학교육의 중요성 강조, 인간주의 수학교육을 강조).

② 실행하는 수학(acted-out mathematics[99]), 학습자의 현실 속에서 수학화를 통한 수학의 재창조 경험만이 수학을 학습자의 인격으로 통합하는 길이요, 수학적 안목과 사고방법을 기르고 수학을 응용하는 힘과 태도를 길러줄 수 있다.

---

97) Hans Freudenthal, 1905~1990

98) '새수학'에 대한 반대 의견: 수학의 구조를 가르친다는 명분으로 완성된 형식적 수학을 구체적으로 번역하여 학생들에게 제공하려는 하향식 구성은 반교수학적인 전도이며, 학생들 스스로 발전적인 조작의 가능성을 갖지 못하는 지식을 제공하는 데 그칠 우려가 있다.

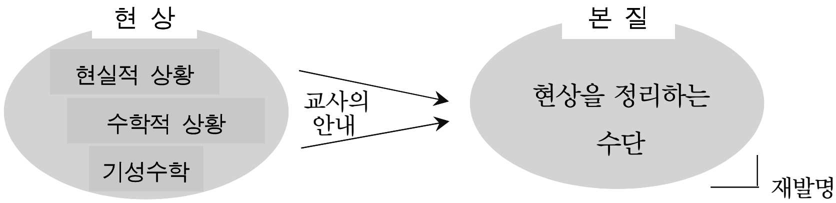
99) 프로이덴탈은 수학적 활동의 결과로서의 기성수학(ready-made mathematics)과 수학화 활동에 초점을 둔 실행수학(acted-out mathematics)으로 구분하였다. 유사하게 인간 활동으로서의 수학의 측면을 폴리아(Polya)는 '발생 상태로서의 수학', 라카토스는 '비형식적 수학'이라 표현한다.

③ 수학은 전통적인 플라톤적인 관념(절대적으로 확실한 객관적으로 존재하는 완전한 지식 체계이며 상기, 곧 발견을 통해 알게 되는 결과물)에 따르는 것이 아니라 직관주의 수리철학적 관념(직관을 바탕으로 일련의 정신적 활동에 의해 구성되어가는 결과물)에 따른다.

2) 수학화(mathematising)

(1) 수학화

① 수학화란 수학적 수단에 의해 현상(Reality)을 정리하고 조직하는 활동이다. 즉 현상에 질서를 부여(넓어지고, 깊어짐) 하는 활동이다.

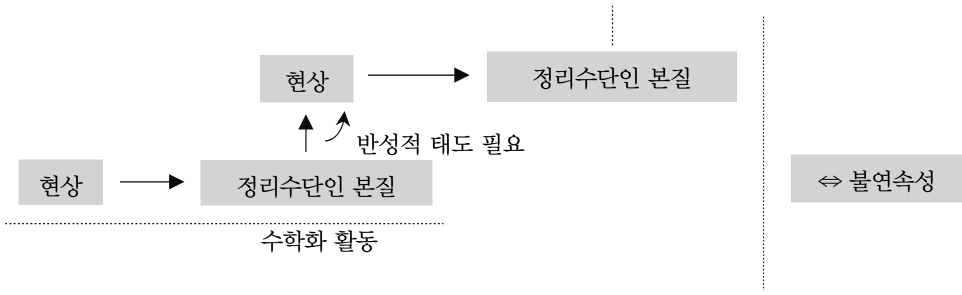


(예) 수학화 교수 · 학습 이론의 관점에 따라 실생활의 〈현상〉으로부터 사잇값 정리인 〈본질〉로 하여 재발명할 수 있다.

〈현상〉	〈본질〉
· 오늘 최저 기온은 −5도이고 최고 기온은 6도였다. 오늘 기온이 0도인 순간이 있었을까? · 오늘 보니 우리 딸의 키가 나보다 크다. 나와 우리 딸의 키가 같은 순간이 있었을까?	함수 $f(x)$가 폐구간 $[q, b]$에서 연속이고, $f'(a)$, $f'(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$ (단, $a<c<b$) 인 c가 적어도 하나 존재한다.

이 때, 〈현상〉에 대한 토론 활동에 교사가 개입하는 것은 적절하며, 〈현상〉을 먼저 제공하여 이를 정리할 수단인 〈본질〉을 재발명하도록 안내해야 한다. 이후 〈본질〉은 더 높은 수준에서 정리되어야 할 〈현상〉으로 다루어질 수 있다. 그러나 〈현상〉을 정리할 수단인 〈본질〉을 교사가 일방적으로 제공하는 것은 반교수학적 전도이다.

② 수학은 확실성을 추구하는 인간의 정신적 활동이며, 물리적, 사회적, 정신적 세계들의 현상을 조직하는 도구이고, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 사고 수준의 상승과정이다. 수학적 사고 활동의 가장 본질적인 특성은 반성적 사고에 의한 끊임없는 '재조직화'이다. 이렇듯 현상을 수학적 수단에 의해서 조직하는 것을 수학화라 한다.



참고

- 반영적 추상화에 의한 수학적 조작의 발생이 내용과 형식의 교대를 통한 점진적인 형식화의 경향을 내포하는 Piaget의 주장과 일치
- van Hieles의 수학 학습 수준 이론과 일치

③ 수학화는 수평적 수학화와 수직적 수학화로 구분하고, 처음에는 국소적으로 시도되다 점차적으로 총체적인 수학화가 시도된다.

④ 수학화 활동에는 형식화, 국소적 조직화, 공리화 뿐만 아니라, 관찰, 실험, 귀납, 유추, 시행착오, 추측, 일반화, 도식화, 추상화, 기호화, 정의, 알고리즘화, 패턴화, 구조화, 추론, 분석, 증명, 반성적 사고, 관점의 전환, 재구조화, 구체화, 모델링 등의 활동도 모두 포함된다.

㉠ 공리화: 이미 수학화 된 제재를 공리적으로 재조직하는 것

㉡ 형식화: 적절한 수학적 표현을 위해 언어를 손질하고, 정리하고, 변형하는 과정

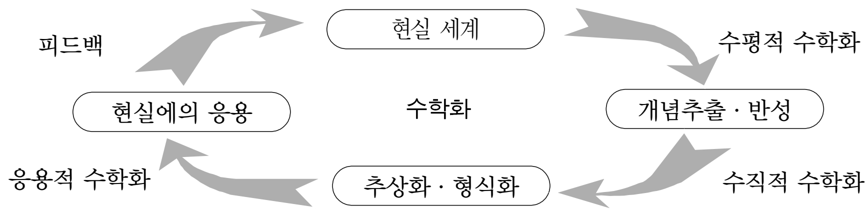
㉢ 스키마화: 실재에 맞는 스키마를 새로 만들어 내는 활동

㉣ 모형화: 어떤 복잡한 실재나 이론을 그보다 더 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 이상화하고 단순화하는 것

㉤ 핵심적 요소 찾기: 어떤 문맥 내에서 공통적 특성, 닮은 것, 서로 유추할 수 있는 것, 동형 등을 발견하는 것

(2) 수학화의 종류와 그 예시

수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작한다. 그 후 수학적 경험이 축적되면 수학 자체의 수학화인 수직적 수학화가 시작되며, 처음에는 국소적으로, 점차적으로 공리적 이론체계의 구성으로 총체적인 수학화가 시도된다.



〈수업에서의 수학화 과정100)〉

① 수평적 수학화

㉠ 문제를 수학적으로 처리할 수 있게 하는 것을 의미한다.

㉡ 실생활의 세계에서 기호의 세계로 나아가는 것을 의미한다.

㉢ 관찰, 실험, 귀납추론, 유추, 분류하기 등 구체적인 활동을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 단계이다.

② 수직적 수학화101)

㉠ 수학적 처리를 더욱 세련되게 하는 것을 의미한다.

㉡ 수학적 경험이 축적되면서 수학 자체의 수학화가 이루어지는 단계이다.

수평적 수학화		수직적 수학화
구체물을 세어 2+7 = 7+2 임을 인식	⇒	이러한 덧셈의 성질은 일반화되어 법칙(교환법칙)으로 인식
아무렇게 흩어져 있는 구슬의 개수를 세어야 하는 문제에서 이 구슬을 세기위해 직사각형으로 배열하거나 몇 개씩 묶음	⇒	체계화된 구슬을 보고 개수를 세기 위해 덧셈이나 곱셈을 적용
파스칼의 삼각형에서 한 행의 a-1번째 수와 a번째 수의 합은 그 다음 행의 a번째 수와 같다는 규칙성을 인식	⇒	이항계수의 수들을 조합의 기호를 사용하여 나타냄

100) De Lange & Verhage(1987, p.244)
첫 번째 단계: 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하는 단계. 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 단계
두 번째 단계: 학생들 간의 상호 작용, 학생들과 교사와의 상호 작용 그리고 학생들의 형식화·추상화 능력과 같은 요인에 의존해서 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 수평적 수학화의 단계, 수학화 단계에 대한 반성이 필수
세 번째 단계: 형식화와 추상화가 중심인 수직적 수학화 단계, 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 획득됨
네 번째 단계: 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 응용적 수학화 단계, 해결된 문제는 현실 세계에 대한 학생들의 관점에 영향을 미치게 됨

101) Treffers가 수평적, 수직적 수학화를 처음으로 논문에 소개하였다(1987).

③ 응용적 수학화

㉠ 추상화된 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 현실적 문제에 응용하여 수학 본질의 가치를 인식하고 활용가능성을 확장한다.

(3) 평행사변형을 정의하는 학습-지도 과정

① 1단계: 학생들은 평행사변형의 모형을 이용하여 그 여러 가지 성질을 시각적으로 발견할 수 있으며, 학습에서 논의를 거쳐 이를 열거할 수 있다.

㉠ 두 쌍의 대변이 각각 평행이며 서로 같다.

㉡ 대각의 크기는 각각 같으며 이웃하는 각의 크기의 합은 180° 이다.

㉢ 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

㉣ 대각선에 의해 합동인 두 삼각형으로 나누어질 수 있다.

㉤ 평면은 합동인 평행사변형으로 덮을 수 있으며 그림을 그려 그 이유를 평행사변형의 성질에서 찾아볼 수 있다.

⇒ 이 성질들은 조직화를 요구하는 평행사변형의 성질이며, 그 사이에 논리적 연관성이 있다는 것을 자연스럽게 알게 된다.

② 2단계: 이들은 서로 관련되며 이 가운데 하나는 다른 것이 나오는 근원이 될 수 있으며, 여기서 평행사변형의 정의가 발생될 수 있다.

③ 3단계: 평행사변형의 여러 가지 모형을 만들어 봄으로써 이제 마름모, 직사각형, 정사각형이 평행사변형인 이유가 분명해진다.

3) 수학화 수업원리

구체적인 현상 탐구하기, 수직적 도구에 의해 수준 상승하기, 학생들의 창작활동을 통한 반성적 사고의 촉진, 상호작용 교수법, 학습가닥의 혼합(횡적, 종적 연결) 등을 들 수 있다.

4) 수학화 학습 평가 원리

학생들의 활동을 중시하고 수업결과보다는 과정을 중시하는 방법(관찰법, 수필 과제, 연구 과제, 구두 과제, 포트폴리오, 정보 추론지 검사) 등으로 평가되어야 한다.

5) 수학 교수 · 학습 원리

(1) 안내된 재발명(guided reinvention): 학생들에게 수학화의 과정을 경험시킬 수 있는 최선의 방법

① 학생들은 수학이 발명되는 과정과 유사한 과정을 경험할 기회를 가져야 한다. 즉 학습 과정은 학생들이 스스로 결과를 찾을 수 있도록 계획되어야 한다.
② 이를 위해 수학사나 학생들의 비형식적 지식과 전략이 교육과정 설계를 위한 근원이 되어야 한다.
㉠ 수학사는 어떤 개념의 발달 또는 수학적 구조의 형성에서 그것들의 발생 맥락을 알려 주며, 수학 과정의 하나의 패러다임 역할을 할 수 있다(=역사발생적 원리).
㉡ 학생들은 자신의 비형식적 지식과 전략을 바탕으로 이와 유사한 과정을 밟아 나갈 수 있을 것이다.
(예) 수학사 속의 수 계산의 단축화 과정을 하나의 전형적인 예로 삼아, 학생들이 그 순서와 방법을 그대로 따르도록 안내하는 것이 아닌 자신의 비형식적 지식과 전략을 바탕으로 한 새로운 방법으로 단축화 과정을 발명해 나갈 수 있도록 지도할 수 있다.
③ 수학 교사나 교육과정 개발자는 이러한 것들을 근원으로 한 사고 실험을 바탕으로 학생들이 스스로 답에 이르는 경로를 상상하는 것이 중요하다.

(2) 수준이론: 반성적 사고
① 수학화는 현실을 수학적 수단인 본질로 조직하는 과정이며, 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준 상승의 불연속적 과정이다.
② 수준이론은 반 힐레의 수준이론을 기초로 하고 있지만, 반 힐레 이론은 거시적인 반면 프로이덴탈의 수준은 미시적이다. 즉 반 힐레는 학생들의 수학 학습과정을 몇 개의 거시적인 단계로 구분하였지만, 프로이덴탈은 수학 학습과정에는 크고 작은 수준이 많이 존재하며, 때로는 간단한 문제를 해결하는 과정에서도 수준의 비약이 이루어질 수도 있다고 본다.
③ 수준의 비약이 이루어지기 위해서는 학생들이 스스로 수행한 활동에 대한 반성이 이루어져야 한다.
(예) 실수의 학습수준: 수를 조직하는 수준 → 수의 조작 법칙에 주목하고 그것을 문자를 사용하여 정식화하는 수준 → 논리적 관련성에 따라 그러한 법칙을 국소적으로 조직화하는 수준 → 연역적 체계로의 대역적 조직화 수준

(3) 교수학적 현상학
① 수준의 비약이 가능하도록 취해야 할 교수학적 조치를 위한 하나의 준비로 그 목표는 현실을 수학의 응용을 위한 근원으로만 보는 것이 아니라 현실 속에서 직관적 관념을 개발하기 위한 또는 심상을 구성하기 위한 개념 형성의 근원을 찾는 것이다.
② (정의) 역사적으로나 개인적으로나 수학적 개념, 아이디어, 구조의 형성은 많은 현상을

다루어 봄으로써 심상을 구성하고 나중에 이론화할 수 있는 기반을 만들어 주어야 한다.

③ 역사적, 수학적 분석 및 학생들의 주변 상황을 분석해야 한다. 이는 수학적 내용의 발생 맥락과 그 발달 과정을 수학사에서 찾으며, 다른 한편으로는 현재 그 내용이 수학에서 어떤 면에서 어느 정도로 중요한 위치를 차지하고 있는지를 분석해야 하고, 마지막으로 학생들의 현실에서 이러한 중요한 측면들을 경험시킬 수 있는 적절하고 풍부한 상황을 마련해야 한다. 이러한 상황을 바탕으로 학생들은 자신의 비형식적 전략과 지식을 활용하여 좀더 고차적인 수준으로 나아갈 수 있는 것이다.

[참고] 심상(mental object)이란 현상을 경험하는 와중에 마음에 느껴지는 잠정적인 것이다.

㉠ 종속으로서의 함수를 지도하기 위해 교사가 사과와 사과 값과의 관계, 피자 1판과 사람 수와의 관계, 자동차 속도와 거리와의 관계 등을 다양하게 설명해주면 학생들 마음에는 확실치는 않지만 "무언가 커질 때, 같이 커진다. 무언가 작아질 때, 같이 작아진다(심상)"라는 것을 느끼게 된다. 이러한 느낌을 바탕으로 교사가 종속으로서의 함수를 정의하면 그 느껴진 잠정적인 것을 바탕으로 학생이 이 지식을 쉽게 받아들이게 된다.

㉡ 일차적으로 mental object로서의 본질을 생각하고 이차적으로 개념으로서의 본질을 생각해야 한다.

(4) 문맥(situation)수학

① 수학을 학습하게 하려면 학생들이 관심과 흥미를 갖고 상상력을 발휘할 수 있는 현실적인 풍부한 문맥(주변 생활)뿐만 아니라 학습자의 물리적 · 사회적 · 정식적인 세계를 총칭하는 것으로, 수학화의 진전과 함께 점차 확대되어간다)에서부터 출발하여 수학화하는 경험과 반성적 사고를 통해 점진적으로 수학 학습을 하는 것이 바람직하다.

(예) 공간적인 형태를 도형으로 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이고, 도형을 정의하는 것은 그 개념적인 분야를 수학화하는 것이며, 기하학적인 정리를 연역적으로 전개하는 것은 기하를 수학화하는 것이다.

② 실세계는 수학화를 가르치는 출발점이 되는 수학적인 문제를 포함하는 의미있는 문맥이며, 이렇게 수학을 구체적인 문맥을 통해 수학화로 지도하게 되면 현실과의 관련성이 적재된 충분한 의미를 갖게 되어 그 적용 가능성이 높아진다.

③ 처음에 현실세계에서 출발하여 수학화 과정을 거치고 다시 현실세계에 돌아올 수 있도록 구체적인 문맥을 제공하는 것이 중요하다.

관계가 풍부한 문맥의 선택과 교사의 충실한 안내 그리고 무엇보다도 학생들의 자발적인 탐구활동을 통해 수학적 도구를 발견하도록 하고, 그 개념적 분석과 형식화, 반성적 논의와 응용을 통한 내적 바탕의 인식과 정신적 안목으로의 동화단계를 거치도록 해야 한다.

5.2. 반 힐레[102]의 기하 학습 수준 이론

네덜란드의 수학교육자 반 힐레 부부는 중등학교 수학 교사로서 중등학교 학생들이 기하 학습에서 보이는 수준의 차이를 박사학위 논문으로 연구하였다. 정사각형을 인지하지만 그것을 정의하지 못하는 학생들, 정사각형은 직사각형임을 이해하지 못하는 학생들 또 증명의 필요성을 인식하지 못하는 학생들을 보면서 반 힐레 부부는 학생들의 이러한 현상에 대하여 연구한 결과 기하의 이해에는 다섯 수준이 있음을 제시하였다. 이 다섯 수준을 기하적 사고의 발달 모델(The model of the Development of Geometric Thought)이라고 한다. 그리고 반 힐레 부부는 이 모델의 각 수준을 학습하기 위한 5단계의 학습국면도 제시하였다.

1) 수학 학습 수준 이론의 배경

① 네덜란드 Lycée 중학교에서 수학을 가르치던 부부 수학교사 P. M. Van Hiele와 그 부인 D. Van Hiele-Geldof는 H. Freudenthal의 연구에 동참하면서 1957년 Utrecht 대학에 두 편의 학위논문을 제출하였고 이들 논문을 골격으로 P. M. Van Hiele가 발전시켰다.[103]

> Freudenthal의 기하학습 이론
> 기하의 학습은 공간에 대한 경험을 조직화하는 수학화 활동이어야 하며, 기하가 기성의 논리체계로서 학생들에게 부과될 것이 아니라 국소적 조직화[104]를 거쳐 전체적 조직화[105]인 공리화에 이르도록 지도할 것을 요구하고 있다.

② 반 힐레 이론은 1960년대 초에 구소련의 수학교육학자와 심리학자들의 집중적인 연구와 실험에 의해 타당성이 확인되었으며 기하교육과정 개발에 적용되어 성공적인 결과를 가져왔다.

③ 1974년 NCTM 연례회의에서 Wirszup의 보고가 있은 후, 그 가치가 인식되기 시작하면서 그와 관련된 다양한 연구가 이루어져 왔다.

---

102) Dina van Hiele-Geldof, Pierre Marie van Hiele

103) P.M van Hiele가 피아제에 대해 연구하던 중 기하지도가 아동의 사고 수준 이상의 수준에서 이루어지면 그 내용은 적절히 동화되지 못하여 기하학습에 곤란을 겪고 있음을 알았으며 또 아동에게 제시되는 문제나 과제가 종종 아동의 사고 수준을 넘어서는 용어나 성질에 대한 지식을 요구함에 주목하였다.

104) 국소적 조직화는 학습자가 접하고 있는 영역에서 참이라고 인정되는 사실, 즉 학습자의 실제로부터 시작해서 부분적으로 조직화하는 활동이다. 전문적인 수학자들이 수학을 창조하고 적용할 때 행하는 활동이 바로 국소적 조직화 활동이다.
(예) 공간의 여러 현상을 도형으로 조직화하여 도형의 성질들을 발견한 다음, 그런 성질들을 조직하는 수단으로써 정의를 도입하고 그 성질들을 증명을 통해 국소적으로 조직화함으로써 학생들 스스로 명제를 만들어 보도록 할 수 있다. 이러한 국소적 조직화 경험을 통하여 조직화의 수단으로서의 증명의 필요성을 인식하고 증명의 의미를 이해하게 된다.

105) 전반적(전면적) 조직화라고도 하며, 기하의 전체 영역을 정의와 공리로부터 출발하는 공리 체계로 조직하는 활동이다.

2) 기하학적 사고의 5 수준[106)]

> 수학적 사고활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동이며, 한 수준에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지게 되면서 그 다음 수준으로의 비약을 하게 되는 과정을 반복하는바, 수학의 학습-지도는 그러한 불연속적인 사고수준을 거치면서 수학적 사고를 재발명해 가도록 되어야 한다.

(1) 제0수준(visualization): 시각화 수준

① 생활 주변의 구체적인 물체를 고찰의 대상으로 삼아 도형에 대해 초보적인 이해 수준에 머무른 단계이다.

② 기본적인 도형을 그 구성요소에 대한 명확한 고려 없이 전체로서의 시각적 외관에 의해 판별한다.

③ 세모꼴, 네모꼴, 상자모양 등으로 도형의 이름을 말할 수 있으나, 그 성질은 명확히 말하지 못한다.

[규준] 학생은 도형들과 다른 기하학적 도형들을 겉모양에 따라서 확인하고 조작한다.

㉠ 눈에 보이는 대로 모양에 따라 도형을 인식한다.

㉡ 여러 가지 그림(도형)에서 간단한 도형을 선택한다.

㉢ 복잡한 그림에서 올바른 도형을 찾는다.

㉣ 그림이나 구체적 행동을 통해 개념을 얻게 된다.

㉤ 기하학적 용어나 도형을 인식할 수 있고 주어진 도형을 복사할 수 있다.

㉥ 직사각형과 정사각형을 다른 것으로 인식한다.

㉦ 도형에 이름을 붙이고 적절하게 표준적인 호칭과 학생 나름의 비표준적인 호칭이 혼용된다.

㉧ 일반적으로 적용되는 성질을 사용하기보다는 도형을 직접 조작해 봄으로써 정형 문제를 푼다.

㉨ 자기 스스로의 용어를 사용하여 정의한다.

㉩ 보여지는 전체 모양을 사용하여 정의한다.

㉪ 구성 성분으로 도형을 인식하지 못하고 도형의 부분을 하나로 인식한다.

---

106) 반 힐레는 초기의 논문에서 5번째 수준인 제4수준에 대한 언급 대신에 "수학자들이 사용하는 절차에 충분히 익숙해지기 전에는 제4수준에 도달할 수 없다"라고 말하고 있다. 이에 Chicago Project(1983)에 Usiskin은 제0수준에도 미치지 못하는 아동이 있음을 주목하고 반 힐레의 1986년의 저서에는 '기초수준, 제1수준, 제2수준, …, 제4수준'이라는 용어 대신에 '제1수준, 제2수준, … 제5수준'이라는 용어를 사용함에 따라 기초 수준에도 미치지 못하는 아동을 제0수준으로 정하고 반 힐레 수준을 6단계(제0수준, 제1수준, …, 제5수준)으로 정하였다.

ⓔ 도형의 일반성이나 관계를 파악하지 못한다.

(2) 제1수준(analysis): 분석 수준

① 주변 대상의 정리 수단이었던 도형이 연구의 대상이 되고 도형의 구성요소와 성질이 고찰의 방법이 되어 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다.

② 삼각형, 사각형이 대상이 되고, 변이나 각의 개수 등이 고찰의 방법이 되는 기하학적 개념의 분석이 시작된다.

③ 직사각형의 대각선은 길이가 같다든가 마름모의 네 변은 길이가 같다는 등의 성질을 말 할 수 있지만, 도형이나 그 성질을 명확히 상호 관련지을 수 없다.

[규준] 도형의 구성요소들과 구성요소들 사이의 관계에 의해 도형을 분석하고 도형의 성질을 확실히 알고 문제를 풀기 위해 성질을 사용한다.

㉠ 구성요소의 성질에 의해 도형을 인식하고 관찰과 실험을 통해 도형의 성질을 구분한다. 그러나 성질들이 어떻게 관련되어 있는지 설명하지는 못한다.

㉡ 도형을 성질에 따라 분류한다.

㉢ 관찰을 통하여 도형을 분류할 수 있고 일반화를 만들 수 있지만 명확한 수학적 정의를 내리지는 못하고 형식적 정의를 사용하지 못한다.

㉣ 포함 관계는 생각하지 못한다(예를 들어 정사각형이 직사각형이 된다는 것을 모른다).

㉤ 구성요소들과 관계들에 대한 적합한 어휘를 상기하고 사용한다.

㉥ 언어적이거나 기호적인 문장을 해석하고 적용한다.

㉦ 도형들에 대해 알려진 성질들을 사용하거나 또는 통찰력 있는 접근에 의해 기하 문제를 푼다.

㉧ 구성 성분 사이의 관계에 따라 두 모양을 비교한다.

㉨ 성질을 가지고 하나의 모양을 다른 모양과 구별한다.

㉩ 도형의 집합에서 일반적 성질과 특별한 성질을 발견한다.

㉪ 성질로 도형을 설명한다.

(3) 제2수준(informal deduction): 비형식적 연역 수준[107)]

① 도형의 성질과 도형사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다.

② 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다.

③ 모든 정사각형은 직사각형임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다.

107) 또는, '관계적/추상적 인식 수준(ordering)'이라 불린다.

[규준] 학생은 정의를 형성하고 사용하며, 전에 발견된 성질에 순서를 주는 비형식적 논증, 연역적 논증을 제시한다.

㉠ 명백하게 정의를 규명하고 정의를 형식화한다.

㉡ 정의를 다른 식으로 표현하는 것에 대해 이해한다.

㉢ 정의로써 도형을 파악하기 때문에 정사각형을 직사각형으로 인식한다.

㉣ 도형의 성질을 추론할 수 있고 성질들 사이의 관계를 파악할 수 있다.

㉤ 성질을 체계적으로 다른 성질로부터 연역한다.

㉥ 도형을 특징지을 수 있는 성질들의 최소 집합을 확인한다.

㉦ 도형의 성질로써 포함관계를 이해하고 배열한다.[108)]

㉧ 삼단논법과 같은 논리적 형태를 은연중에 사용함으로써 정확한 비형식적 연역 논증을 만들 수 있다.

㉨ 수학의 공리론적 방법을 잘 이해하지 못하고, 형식적인 증명은 할 수도 있지만 가정에서 결론으로 이끌어 가는 논리적인 순서를 파악하지 못한다.

㉩ 명제와 그 역 사이의 차이를 비형식적으로 인식한다.

㉪ 연역적 논증의 역할을 인식하고 연역적 방법으로 문제에 접근한다.

㉫ 문제를 풀기 위해 전략들 또는 통찰력 있는 추론들을 확인하고 사용한다.

㉬ 도형의 특색 있는 성질로 다른 도형을 구별한다.

㉭ 추론에 의해 새로운 성질을 발견한다.

(4) 제3수준(formal deduction): 형식적 연역 수준

① 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하고 전체기하(Euclid 기하)의 연역체계를 파악한다.

② 공리론적 조직 속에서 기하의 정리들을 세우는 방법의 하나인 추론을 이해하고 명제의 증명이 주된 과제가 된다.

③ 삼각형의 내각의 합이 180°라는 명제를 공리 · 공준적으로 스스로 증명할 수 있다.

④ (단) 다른 공리 체계의 가능성을 이해하지 못한다.

---

108) 김 교사: (직사각형을 칠판에 제시하고 묻는다.) 이 도형은 무엇일까요?
경 호: 직사각형이요.
김 교사: 이 도형과 정사각형의 중요한 차이점은 무엇인가요?
경 호: 직사각형은 네 각의 크기가 모두 같기만 하면 되지만, 정사각형은 네 각의 크기가 같아야 할 뿐만 아니라 네 변의 길이도 모두 같아야 합니다. 음…. 그리고요, 정사각형은 항상 직사각형이 되지만 직사각형은 정사각형이 되지 않을 때도 있어요.

[규준] 학생들은 공리체계와 정의와 관계 사이의 관계망을 형성한다.

㉠ 학생들은 증명 과정을 기억해서 기술하는 수준이 아니고 창조할 수 있으며 충분조건과 필요조건의 상관성을 인식한다.

㉡ 기호를 사용하여 정리를 증명한다.

㉢ 증명 문제에서 정리의 가정 또는 결론을 구분한다.

㉣ 어떤 정리를 증명할 때 서로 틀린 증명을 두 가지 해보고 차이를 비교하고 증명을 하는데 여러 가지 기술을 구사한다.

㉤ 제3수준에서 비형식적으로 설명된 관계를 사용하면서 공리로부터 증명을 한다.

㉥ 연역적 추론을 다양화하려는 시도를 하고 유클리드 기하의 공리를 내재적으로 받아들인다.

㉦ 형식적, 연역적 논증을 하지만 공리 자체를 조사하지 않고 공리체계를 비교하지 않는다.

㉧ 수학 강의에서 공리, 정의, 정리, 증명과 같은 요소의 역할을 이해하고 기하학적 사고를 할 수 있다.

㉨ 정확한 언어로 문제를 재진술 하고 애매한 문제를 정확히 진술할 수 있다.

(5) 제4수준(rigor): 엄밀화 수준

① 제3수준의 논리가 고찰의 대상이 되고, 추상화(적용)가 고찰의 방법이 되는 단계이다.

② 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리체계를 비교할 수 있고, Hilbert 류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다.

③ 구체적인 모형 없이 매우 추상적으로 다양한 기하를 학습할 수 있다.

④ 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리체계의 성질을 이해한다.

(cf) P.M. van Hiele는 후에 위의 생각을 일반화하여 자신의 학습수준이론은 모든 수학 이해에 적용된다고 주장하면서 수나 함수 등의 학습수준을 거론하고는 있으나 그에 대한 상세한 이론은 제시되어 있지 않다.

[참고] 각 수준사이의 관계

① 시각적 인식 수준과 분석 수준의 도형 인식 비교

㉠ 시각적 인식 수준의 학생들은 관찰에 근거해서 도형을 판단한다. 즉, 판단의 아무런 이유가 없으며 단지 그렇게 볼 수 있기 때문에 판단할 뿐이다.

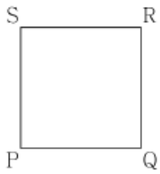
㉡ 분석 수준의 학생들에게 있어서 시각적 이미지는 판단의 기초가 되지 못한다. 다소 불완전하게 그려진 마름모 그림이 있다 하더라도 학생들은 그림을 그리는 사람의 의도는

모든 변의 길이가 같게 그리는 것임을 확신하고서 그림에 별로 동요되지 않는다.

② 분석수준과 관계적/추상적 인식 수준을 판단하는 문항

분석 수준

사각형 PQRS는 정사각형이다. 옳은 것은?



① 선분 PR와 선분 RS의 길이는 같다.
② 선분 PS와 선분 QS의 길이는 같다.
③ 선분 QS와 선분 PR는 서로 수직이다.
④ 선분 PS와 선분 QR는 서로 수직이다.
⑤ 각 Q의 크기는 각 R의 크기보다 크다.

관계적/추상적 인식수준

두 문장
S: △ABC의 세 변의 길이는 같다.
T: △ABC에서 ∠B와 ∠C는 같다.
에 대하여 옳은 것은?
① S와 T는 동시에 참일 수 없다.
② S가 참이면 T는 참이다.
③ T가 참이면 S는 참이다.
④ S가 거짓이면 T도 거짓이다.
⑤ ①~④ 모두 거짓이다.

③ 관계적/추상적 인식 수준과 형식적 연역 수준에서의 증명 지도 비교

㉠ 관계적/추상적 인식 수준에서는 명제 A와 B사이의 연결, 즉 A와 B사이에 어떤 관계가 성립하는가가 중요한 문제로 부각되는데, 명제들 간의 연결과 더불어 관련성으로 충만한 관계망이 구축된다. 이러한 관계망을 구성하기 위해서, 즉 한 도형의 여러 성질간의 관련성과 여러 도형간의 관련성을 맺기 위해서는 명제들을 조직해야 한다. 명제들의 조직화를 가능하게 하는 것으로서의 추론이 비형식적이고 국소적인 수준에서나마 필요하게 된다. 다시 말해 한 도형의 여러 성질 사이의 관련성이나 여러 도형의 성질들 간의 관련성을 구축하려는 필요성이 생길 때, 비로소 국소적인 규모에서나마 연역적 추론 즉 증명의 필요성이 생긴다.

㉡ 형식적 연역 수준의 학생들은 지켜야 할 제한 조건들을 인식하고 그러한 제한 조건이 형식적 추론에서 어떻게 적용되는지를 알고 증명을 시도한다.

④ 반 힐레와 프로이덴탈의 기하와 증명 교수·학습론 비교표

㉠ 반 힐레가 제시한 관계적/추상적 인식 수준은 프로이덴탈이 구분한 국소적 조직화 수준임을 알 수 있다.

반 힐레	프로이덴탈
엄밀화 수준: 엄밀한 수학적 수준	존재론적 결합 끊기
⬆	⬆
형식적 연역 수준: 공리 체계 내에서 증명 형성	전체적 조직화: 공리화
⬆	⬆
관계적/추상적 인식 수준 : 도형의 성질들 간의 관련성 탐색, 비형식적 연역	국소적 조직화 : 정의하기, 증명하기
⬆	⬆
분석 수준: 도형의 성질(특징) 분석	도형의 성질(특징) 발견
⬆	⬆
시각적 인식 수준 : 도형을 시각적으로 판단	도형이라는 본질로 조직 ↑ ↑ ↑ 주변 현상 관찰

⑤ 일반적인 수학 학습에 대한 수준

㉠ 제1수준은 시각적 수준, 제2수준은 서술적 수준, 제3수준은 국소적인 논리적 관계를 파악하는 수준, 제4수준은 형식적 논리를 파악하는 수준, 제5수준은 논리적 법칙의 본질을 파악하는 수준으로 제시하였다.

㉡ 학교수학에서는 주로 제2, 3, 4수준을 다루게 되지만 시각적 수준도 학교수학의 토대로서 중요하다.

3) 기하 수준에 근거한 학습 단계

> 반 힐레는 사고수준의 진행에서 비약이란 없으며 단계적으로 일어난다고 주장했다. 학생은 한 수준에서 다음 수준으로 몇 단계를 거쳐 이행하게 되는데 이러한 이행은 교수학습 프로그램에 힘입어 일어난다. 반 힐레와 크라울리(Crowley)에 의하면 교수 단계는 질의 안내 단계, 안내된 탐구 단계, 명료화 단계, 자유로운 탐구 단계, 통합 단계라는 연속적인 5단계로 진행된다.

① 1단계 질의 안내 단계(Inquiry/Information): 학생은 교사가 제공한 자료를 토대로 교사와의 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 학습주제를 파악하게 된다.

㉠ 교사와 학생들이 학습목표를 확인하는 단계이다.

예 마름모는 무엇인가? 정사각형은? 평행사변형은? 어떻게 그들은 같은가? 정사각형

은 마름모가 된다고 생각하는가?

② 2단계 안내된(제한된) 탐구단계(Directed Orientation): 학생은 교사가 제공한 자료로 교사의 안내 하에 주제를 탐구하면서 그 진행방향을 감지하고 해당 분야의 구조가 점진적으로 파악하게 된다.

㉠ 교사가 제시하는 짧은 발문으로 이루어진 활동 자료를 보며, 학생들은 자기 나름대로 과제를 탐구한다.

㉡ 교사는 제시하는 자료를 학생들의 수준에 따라 자료를 다르게 제시한다.

예 모눈종이를 주면서 대각선이 같은 여러 크기의 마름모를 그리게 한다든지, 4개의 각이 같은 마름모를 그리게 한다.

③ 3단계 명료화 단계(Explication): 학생은 예전의 경험과 교사의 도움말을 토대로 탐구 분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며 관계 체계를 형성하기 시작한다.

㉠ 학생들은 전 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대하여 토론한다.

㉡ 교사는 학생의 토론하는 활동만 지켜보고 어떤 설명도 하지 않는다.

예 모눈종이의 마름모의 활용에서 학생들은 자기가 한 활동에서 어떤 도형과 그 도형이 가지는 성질을 토론한다.

④ 4단계 자유로운 탐구 단계(Free Orientation): 학생은 보다 복잡한 과제 해결에 도전하여 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.

㉠ 이전 단계보다 복잡한 과제가 제시된다.

㉡ 많은 사고 단계가 들어 있는 과제를 제시하고, 자신이 배운 지식을 종합적으로 적용해 보게 된다.

⑤ 5단계 통합 단계(Integration): 학생은 자신의 학습을 재검토하여 그동안 배운 새로운 개념에 대한 탐구 활동을 개관하며 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다.

㉠ 교사는 학생들 스스로 경험한 지금까지의 단계를 종합하고 음미하게 된다.

㉡ 5단계가 끝나면 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

예 마름모의 성질이 학생들에 의하여 종합된다.

4) 기하학적 사고 수준 이론의 핵심 특성

① 연속성(Sequence): 학생들이 수학 학습에서 n-1 수준을 통과하지 않고 n 수준에 도달할 수 없으며 수학적 사고는 모든 수준이 순서적으로 발달한다.

② 촉진성(Advancement): 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지는 않으며 수준

의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고 부적절한 지도에 의해 지연될 수도 있다.

③ 인접성(Adjacency): 앞 수준의 사고에서 내적이었던 것이 그 다음 수준에 의식화되어 명확히 인식된다. 각 수준의 수학적 사고는 그 전 수준의 수학적 사고의 내적 질서를 대상으로 하여 연구하는 것이다. 그리고 어느 한 수준에서 경험을 정리하는 '수단'이 새로운 학습의 '대상'으로 의식되어 그것을 조직화하려는 활동이 점진적으로 이루어지면서부터 그 다음 상위 수준으로의 도약을 하게 되는 과정을 반복하게 된다.

수준 / 고찰	제0수준	제1수준	제2수준	제3수준	제4수준
대상	주변의 사물	도형	성질	명제	논리
수단	도형	성질	명제	논리	

④ 언어성(Linguistics): 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 언어 그리고 그를 연결하는 관계망(Network of Relation)을 갖는다.

⑤ 분리성(Separation): 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다. 수학교육의 주요문제는 서로 다른 수준에서 추리하는 교사와 학생이 서로를 이해하지 못하는 데에서 비롯되므로 학생들의 사고수준을 파악하여 그에 따른 사고교육을 해야 한다.

5) 반 힐레 이론의 수학교육적 의미

① 기하학적 사고의 발생적 단계에 대한 깊은 통찰을 바탕으로 기하학습의 수준을 설정한 이론이다.

② 국소적 조직화를 통한 유클리드 기하의 효과적인 학습지도를 시도한 이론이다.

③ 유클리드 기하의 중요성과 발생적 원리의 구현을 통한 수학적 사고의 교육이란 점에 비추어, 기하교육의 개선에 기여했다.

④ 수학의 모든 영역에 뿐만 아니라 수학 이외의 다른 부분에서도 적용 가능하다고 보고 있다.

[참고] K 교사용 지도서에 소개된 '반 힐레'의 기하학적 사고 수준

<u>제0수준(시각적 인식 수준)</u>

도형을 그 구성요소에 대한 고려 없이 전체로서의 시각적 이미지에 의해 인식하는 수준이다. 이 수준에서는 기하학적인 이름(삼각형, 다각형 등)이나 도형을 인식할 수 있고 주어진 도형을 복사할 수도 있다. 그러나 이 수준에서는 도형의 성질이나 도형 사이의 관계는

인식할 수 없다.

(예) 직육면체의 상자를 보고 그 면들이 네모 모양이다, 삼각형의 자를 보고 세모 모양, 피자를 보고 동그란 모양이라고 인식하며, 또 그들 모양이 서로 다르다는 것을 구별할 줄 아는 정도이다.

이처럼 삼각형, 사각형, 원 등이 있으면 이 외형적인 형태를 인지할 줄 알며, 또 같은 모양의 도형에서 크기가 다른 것이 두 개 이상 있으면, 이것은 저것보다 크다는 정도의 직관적인 특징만을 파악할 수 있다. 그러나 정사각형과 옆으로 긴 직사각형과는 서로 모양이 다른 별개의 도형으로만 인식하고, 이들이 갖고 있는 공통의 특성을 인지하지는 못한다.

(예) 현재 자기가 갖고 있는 언어로써 '세모 모양이다', '네모 모양이다', '동그란 모양이다'라고 어느 정도의 표현은 가능하나, 그 도형이 갖고 있는 성질을 명확히 설명하지는 못한다.

<u>제1수준(도형의 분석 수준)</u>

관찰과 실험을 통하여 도형의 구성요소나 성질을 분석할 수 있는 수준이다. 그러나 도형의 성질들 사이의 관계성을 인식하지 못하며 명확하게 수학적인 정의를 내리지는 못한다. 이 수준의 아동들은 어떤 물건의 길이와 높이, 그리고 두께 등의 구성 개념이 형성되어서, 어떤 상자의 한 면인 직사각형을 보고 "마주 보는 두 변의 길이는 서로 같다"는 것을 인식하게 된다. 더 나아가서 이 도형은 "네 개의 곧은 선으로 만들어져 있고, 그 선들이 만나면 하나의 뾰족한 점이 생기는데 그 점은 모두 네 개이다"는 등, 도형의 구성요소와 기본 성질에 대한 초보적인 분석이 가능하다. 그러나 "직사각형의 두 대각선의 길이는 같다"는 것을 인지하고 있으나, "두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하고 있다"는 사실은 직관적 검증을 거쳐야만 이해할 수 있을 뿐이다. 이 수준은 도형과 그 성질과의 상호 관계를 명확하게 연결시킬 수는 없으나, 어떤 특성을 그것에 대한 예측과 실험적 검증을 통하여 인식할 수 있는 단계이다.

<u>제2수준(이론적 정리수준, 비형식적 연역 수준, 관계적 수준)</u>

한 도형 또는 다른 도형 사이에 존재하는 성질들의 국소적인 관계를 파악할 수 있다. 그리고 도형을 어떤 관점으로 분류할 수 있다. 이 때, 도형의 포함 관계가 이해되고, 수학적 정의가 이해된다. 간단한 형식적인 증명은 가능하며 다른 사람의 증명 과정을 이해할 수 있으나 증명의 역할을 바르게 이해하지는 못한다.

(예) 앞 수준에서 "삼각형이란 세 개의 선분으로 둘러싸인 도형이다"라고 정의한 기계적인

이해에서 관계적 이해로 전환되는 단계이므로, 이 수학적인 문장을 이론적으로 정리된 하나의 명제로 인식하게 된다. 이렇게 이해된 정의 위에서, "삼각형의 세 각의 합은 어떻게 되겠는가?"라고 의문을 하게 되며, 이러한 의문을 귀납적 추론의 방법으로 풀어서, 결국 "삼각형의 세 각의 합은 180도이다"라는 하나의 정리를 유도해 내는 것이다.
그러나 이 같은 간단한 성질을 규명할 줄은 아나, 관찰한 결과를 입증할 수 있는 예비적인 보조 명제를 구성하지는 못한다. 그래서 이 수준에서는 공리와 공준의 의미를 모를 뿐만 아니라, 그 구별조차 할 수 없으므로, 연역적 추론은 아직 어려운 상태이다.

제3수준(연역적 추론 수준)

이 수준에서는 공리적 조직 속에서 기하의 정리들을 세우는 추론을 이해한다. 무정의 용어, 공리, 공준, 정의, 정리 및 증명의 역할과 관계성을 알게 된다. 이 수준의 학생들은 증명 과정을 기억해서 기술하는 수준이 아니고 창조할 수 있으며, 필요조건과 충분조건의 상관성을 이해할 수 있다.

(예) "두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라 한다"는 정의에서 "이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다"를 증명 할 줄 안다.

그러나 학생들은 명제의 추론 과정에서 엄밀성이 얼마나 필요한지를 깨닫지 못하며, 어떤 한 연역에서 다른 연역 체계로 넘어갈 때의 사고의 이행 관계를 이해하지 못한다.

(예) "직선 밖의 한 점을 지나고 이 직선에 평행인 직선은 존재하고 단 하나 존재한다"는 '평행선 공준'을 사실 그대로 인식을 해야 하는 건지, 아니면 증명을 해야 하는 건지를 모르고 있다. 그리고 이것이 "삼각형의 내각의 합은 180도이다"는 증명에 반드시 있어야만 되는 사실인지, 또 꼭 필요하다고 하면, 이것이 그 다음의 연역 체계에 어떻게 적용되는 건지도 잘 모른다.

제4수준(기하학의 엄밀화 수준)

이 수준은 고등학교의 수준을 훨씬 넘은 단계로 비유클리드 기하를 연구할 수 있고 기하의 여러 공리들 사이의 차이점을 비교할 수도 있다. 구체적인 모형도 없이 매우 추상적으로 다양한 기하를 학습할 수 있다. 기하학 구조의 '논리성' 그 자체가 연구의 대상이 되어, 힐베르트의 여러 가지 공리 체계를 이해하고, 기하학의 형식적 엄밀성을 파악하여, 다양한 '추상적 추론'의 방법으로 도형의 특성을 분석하고 이해한다.
이 수준에 있는 학생들은 어떤 명제를 추론할 때, 어느 증명 방식으로 접근해야 하는지 판단할 수 있고, 그 과정을 완벽하게 전개한다.

(예) ‘평행선 공준’을 근거로 하여 “평행인 두 직선이 제3의 직선과 만나서 이룬 엇각은 서로 같다”는 사실을 귀류법으로 증명할 수도 있고, 이러한 평행선 공리와 보조 정리를 이용하여 “삼각형의 세 내각의 합은 180도이다”는 정리를 연역적으로 증명할 줄 안다.

6. 준-경험주의: 라카토스[109]의 증명과 반박을 이용한 학습

라카토스는 헝가리 태생의 유태인으로서 1956년 영국으로 망명, 캠브리지 대학에서 수리철학을 전공하였다. K . 포퍼와 G . 폴리아로부터 사상적 영향을 받았으며 1961년 박사학위 논문을 제출하였다. 1960년부터 London School of Economics의 교수로 재직, 1965년에는 런던 과학철학 국제 콜로키움을 조직하고 그 논문집을 편집하여 현대 비판주의적 과학철학의 확립에 커다란 기여를 하였다.

* 포퍼의 '비판적 오류주의' - 지식의 성장은 추측과 반박의 과정이며, 모든 지식은 잠정적인 것으로 끊임없는 비판의 대상이 된다.
* 라카토스의 '증명과 반박' - 비형식적인 수학은 의심없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가됨으로써가 아니라 비판에 의해서, 증명과 반박에 의해서, 추측의 부단한 개선을 통해 성장하는 사고실험 과학이며, 수학적 지식은 추측에 불과하다.

(cf) 『증명과 반박-수학적 발견의 논리』 : 수리 철학서, 대화법에 의한 발견적 교재 구성을 시도한 수학교육론

6.1. 수학교육의 변화

[1980년대 이후 수학교육의 분위기]

유클리드[110]적인 전통 수학		1980년대 이후의 수학		
수학은 플라톤 철학에 따라 경험적 사실과는 무관하게 논리적, 연역적으로 전개되므로 보편적 필연성을 갖고 있으며, 따라서 그 발전은 오류를 내포하지 않는 정리의 축적이다.	⇒	· 수학적 사고 교육, 문제해결 지도 강조 · 포퍼의 비판적 오류주의 관심 · 폴리아의 수학적 발견술 연구	+	프로이덴탈이나 폴리아는 수학을 완성된 과학으로써의 형식적 수학과 구성 도중에 있는 비형식적 수학으로 구분하였다.

⇒ Lakatos의 오류주의 수리철학과 '증명과 반박'으로 발전

1) 포퍼의 '비판적 오류주의'

① 지식의 성장은 추측과 반박의 과정이며 모든 지식은 잠정적인 것으로 끊임없는 비판의 대상이 된다.

109) Imre Lakatos, 1922~1974

110) Euclid 원론: 공리, 공준, 정의가 먼저 소개되어 있고 뒤이어 정리1과 그 증명, 곧이어 정리2와 그 증명, 정리3과 그 증명 등이 계속 제시된다. 즉 참인 정리들이 차곡차곡 늘어남으로써 수학이 성장한다.

② 과학적 지식의 성장은 사실이나 관찰 경험의 단순한 축적이 아니라(즉, 귀납적 추론이 아니라) 시행착오, 곧 추측과 반박의 과정이며, 제기된 과학적 이론의 비판과 폐기, 보다 나은 더 만족스러운 이론으로의 거듭된 대치를 뜻한다.

③ 인간은 결코 진리를 알 수 없으며, 단지 추측할 수 있고 추측을 개선할 수 있을 뿐이며, 추측을 검사하고 추측에 대한 반박을 고려하여 추측을 강화하거나 이를 제거할 수 있는 새로운 추측을 창안하여 대체함으로써 지식의 성장이 이루어진다.

④ 포퍼의 비판적 오류주의에 입각한 라카토스의 논의(증명과 반박)

: 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가하면서 성장하는 것이 아니라 추측-증명-반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장한다. 즉 수학은 추측과 증명과 반박에 의해 성장하는 준-경험과학[111]이며, 수학적 지식은 반박되지 않을 때 잠정적으로 확인될 수 있을 뿐인 추측에 불과하다.

2) 폴리아의 수학적 발견술

① 수학이 역사적으로 어떻게 발생하였는지 분석하고, 수학적 발견술을 교육적 측면으로 부흥시켰으며 과학적 발견술과 수학적 발견술이 유사함을 강조하였다.

② 라카토스는 폴리아의 연구를 분석하여 수학적 발견의 논리에 대한 근거를 찾으려 했다. 즉, 수학적 발견에서 고려되어야 할 중요한 측면은 폴리아가 제시하고 있는 개연적 추론과 그 역할이며, 거기서 연역적 추론의 위치를 밝히는 일이 또한 중요한 문제가 된다고 주장하였다.

③ 폴리아는 『Induction and Analogy in Mathematics』에서 문제제기 단계와 추측단계, 확인단계를 거쳐 완전히 논의를 마친다. 이에 반해, 라카토스는 폴리아가 논의를 마친 확인단계에서 시작하여 추측에 대한 반례를 찾거나 추측을 반박하고 비판적인 증명분석을 통해 추측을 개선하고 개념을 재구성하여야 한다고 논의하고 있다.

예 다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 수 사이의 관계

┌ 폴리아: 문제로부터 출발하여 추측을 하고 Cauchy의 증명법으로 확인 한다.
└ 라카토스: 폴리아가 확인한 부분에 대한 논의로부터 시작하여 반례를 찾거나 반박하는 등 수학적 발견의 논리를 논한다.

111) 수학이 준-경험적인 과학이라면, 수학은 이론의 중핵이 되는 자명한 공리체계의 확립과 엄밀한 증명에 의한 정리의 집적이 아니라, 문제로부터 시작하여 설명력 있는 해답이 추론되고 엄격한 검사와 반박이 뒤따르며, 대담한 추측과 반례의 탐색, 반박과 비판을 통한 추측의 개선이 수학발전의 도구가 된다.

3) 라카토스의 오류주의 수리철학

① 비판적 오류주의의 입장에서 수학적 지식의 성장은 '증명과 반박'의 논리이다.
② 수학은 의심없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가된 결과물이 아니라 비판에 의해서, 증명과 반박에 의해서, 추측의 부단한 개선을 통해 성장하는 사고 실험과학이며, 결국 수학적 지식은 추측에 불과하다.

6.2. '증명과 반박' 이론

1) 수학적 입장

· 수학: 준-경험과학이다. 증명을 통해 반례의 발견과 반박을 용이하게 함으로써 추측의 개선이 시도되는 과학이다.
· 수학적 지식: 추측에 불과하다.
· 증명: 원래의 추측을 부분추측으로 분해하는 사고 실험이다.

① 수학은 '추측-증명-반박'의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장하는 준-경험 과학이다. 즉, 수학은 문제로부터 시작하여 설명력 있는 해답이 추측되고 엄격한 검사와 반박이 뒤따르며, 대담한 추측과 반례의 탐색, 반박과 비판을 통한 추측의 개선 등이 끊임없이 이어지는 과정이다.[112)]
② 수학적 지식은 반박되지 않을 때 잠정적으로 확인될 수 있을 뿐인 추측에 불과하다. 그리고 수학적 지식은 증명과 반박의 변증법적 과정 속에서 성장한다.
③ 수학교육의 목표: 증명과 반박의 논리 즉, 추론하고, 검사하고, 증명하고, 반박하는 수학의 탐구과정을 통해 학생들이 비판적이고 합리적인 사고 능력과 태도의 개발, 수학하는 방법을 학습한다.
④ 증명이란 본래의 추측을 부분추측, 곧 요소정리로 분해하여 비판과 반박의 시야를 넓히는 사고실험이다. 즉 증명은 추측을 개선하고 그 과정에서 이론적 개념을 생성하는 주요한 발견적 도구이다.[113)]

112) 따라서 수학은 증명과 반박을 통해 '확증' 된다고 이야기할 수 없다.

113) 일반적으로는 직관과 귀납(귀납추론)을 이용해 어떤 수학을 발견한다. 그러나 라카토스는 이러한 입장을 부정하고 수학은 증명과 변증법에 의해 발견된다고 강조한다. 즉, 수학적 발견에 있어서 직관과 귀납의 역할을 강조하는 일반적인 수학교육의 입장과 다르게 주장하였다.

[참고] 증명(곧 추측을 부분추측으로 분해하는 것)으로부터 원래의 추측뿐만 아니라 많은 부분추측이 반례에 의해 반박 가능해짐으로써 보다 넓은 범위에 걸쳐 검사 가능해지고 보다 더 위험해지고 보다 더 반증 가능해진다.

⑤ 보조정리합체법(lemma-in-corporation method)

ⓐ 반례가 제기되었을 때 비판적인 증명분석을 통해 숨겨져 있는 결함 있는 보조정리를 찾아내어 그에 해당하는 조건을 원래의 추측에 부가하여 추측을 개선하는 방법이다.

ⓑ 새로운 추측을 발견하는 과정과 그 추측을 증명하는 과정이 동시에 이루어지는 방법이다.

[참고] 라카토스 이전에는 수학적 발견의 논리는 귀납이나 유추이고 정당화의 논리는 연역적 증명이라는 견해가 일반적이었으나, 라카토스는 발견과 정당화의 논리가 분리되지 않고 하나로 통합된다는 견해를 제시하였다.

2) '증명과 반박'에 따른 수학 학습

① 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가하면서 성장하는 것이 아니라, '추측-증명-반박'의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장하는 준-경험과학이다.

[수학적 지식의 성장 과정]

㉠ 1단계: 제기된 문제를 시행착오에 의해서 잠정적으로 해결하는 과정에서 수학적 추측을 제기하거나 소박한 추측(또는 연역적 과정을 통해 추측)을 얻는 단계

㉡ 2단계: 추측을 부분추측으로 분해하여 그 비판 가능성을 높이는 사고 실험하는 단계

㉢ 3단계: 반례(전면적 또는 국소적 반례)가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계

㉣ 4단계: 증명이 검토되고 전면적인 반례가 국소적인 반례가 되는 유죄인 보조정리가 발견되어 추측의 조건으로 합체되어 추측이 정리로 개선되며 이론적 개념이 출현하는 단계

(예) 몇몇의 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때 $x=a$에서 극값을 갖는 것을 확인하였다.[114)]

---

114) 강문봉(1993). 그래프의 개형을 그리기 위해 극값이 필요하다는 사실을 인식시키고, 이어서 추측과 반박의 과정을 통해 극값의 판정 조건을 이해시키고, 미분 불가능한 곳에서도 극값을 가질 수 있으며, $f'(a)=0$이어도 $x=a$에서 극값을 갖지 않을 수 있음을 이해시키는 학습 지도 과정을 제시하였다.

① 원시적 추측 '연속함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때 $x=a$에서 극값을 갖는다'가 제기된다.
② 사고 실험으로서 증명이 제기된다.
③ 전면적 반례 $f(x)=x^3$가 제기된다.
④ 증명 분석을 통해 유죄인 보조정리가 발견된다.
⑤ 증명과 추측이 개선된다.
⑥ 국소적 반례로서 $f(x)=|x|$가 제기된다.
⑦ 증명이 개선되고, 극값의 의미가 더 분명해진다.

1단계: 수학적 추측을 제기하는 단계

미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때 $x=a$ 에서 극값을 갖는다.

2단계: 추측을 부분추측으로 분해하는 단계(사고실험)

i) 미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$ 일 때, $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.

ii) $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 이 함수는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

3단계: 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계

미분가능한 함수 $f(x)=x^3$, $g(x)=x^5$의 $f'(x)=3x^2$, $g'(x)=5x^4$이며 각각은 $x=0$에서 $f'(0)=0$, $g'(0)=0$이지만 실수 전 구간에서 극값을 갖지 않는다. 즉, 소박한 추측의 반례가 등장하였다.

4단계: 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계

반례를 증명과정 i)에서 분석해 보면

『i) 미분가능한 함수 $f(x)=x^3$, $g(x)=x^5$는 $f'(0)=0$, $g'(0)=0$이지만, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.』115)

를 확인할 수 있다. 즉, 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이지만 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않을 수 있다는 것을 발견한 것이다. 따라서 우리의 소박한 추측이 옳다고 주장하려면 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이면서 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 경우에 대해서만 성립 가능하도록 축소해야 한다. 따라서 새로운 보조정리로

'미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 경우'

를 원래의 소박한 추측에 추가하여

'미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀔 때,

115) 다음과 같이 수치적으로 확인할 수 있다. 즉,

$x=-0.1$에서 $f'(-0.1)=0.03$, $g'(-0.1)=0.0005$, $x=0.1$에서 $f'(0.1)=0.03$, $g'(0.1)=0.0005$

이다. 결국, 원래의 증명을 검토하여 본 결과

$\begin{cases} x<a\text{에서 } f'(x)>0 \\ x>a\text{에서 } f'(x)<0 \end{cases}$ 이거나 $\begin{cases} x<a\text{에서 } f'(x)<0 \\ x>a\text{에서 } f'(x)>0 \end{cases}$ 와 더불어 $\begin{cases} x<a\text{에서 } f'(x)>0 \\ x>a\text{에서 } f'(x)>0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x<a\text{에서 } f'(x)<0 \\ x>a\text{에서 } f'(x)<0 \end{cases}$

인 경우가 존재하였기에 반례가 등장한 것이다. 따라서 반례가 되는 조건을 제거하기 위해

$$f''(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}<0,\quad f''(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}>0$$

보조정리를 사용하고 이를 원래 추측에 첨가하여 다음과 같이 개선한다.

'미분 가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$이고 $f''(a)\neq 0$일 때 $x=a$에서 극값을 갖는다.'

$x=a$에서 극값을 갖는다.'

로 개선된다.

② 수학이론에서 명제는 검증될 수 있을 뿐인 가설적인 것이며, 기본 명제는 다른 명제에 의해 설명될 뿐이다.

③ 수학은 문제로부터 시작하여 설명력 있는 해답이 추측되고 엄격한 검사와 반박이 뒤따르며, 그 문제에 대한 대답은 추측과 반례의 탐색, 반박과 비판을 통한 추측의 개선이다.

문제제기 ➡ 문제해결 가능성 탐구 ➡ 문제에 대한 추측 ➡ 추측 검사 및 증명 ➡ 반례나 문제 제기 및 반박 ➡ …

④ 추측은 귀납이 아닌 어떤 심리적인 기대에 의해 인도된 추정일 뿐이며 검사가 뒤따라야 한다.

⑤ 반례는 새로운 지식의 성장을 위한 단서이며 반례의 출현에 따라 추측이 개선된다.[116)]

국소적 반례	전면적인 반례
부분추측을 반박하지만 원래의 추측을 반박하지 않는 반례	원래 추측을 반박하는 반례
증명(부분추측)의 비판이지 추측의 비판이 아니므로 부분추측의 체계를 개선하여 오류발생을 억제한다.	원래의 추측은 반박되지만 증명은 반박되지 않으므로 증명이 실제로 증명하는 것이 무엇인가를 결정하는 것이 중요하게 되고 원래의 추측을 개선하게 된다(보조정리합체법 이용).

(cf) 전면적 반례를 해결하는 다른 방법

ⓐ 기각: 반례를 받아들이고 원래의 추측이 틀렸다고 인정하는 방법이다.

ⓑ 괴물배제법(monster-barring method): 추측은 이미 증명되었기 때문에 증명된 추측은 옳으며 오히려 반례가 잘못되었다고 보고 반례를 배제하여 원래의 추측을 존속시키는 방법이다. 즉, 반례를 괴물로 배제하기 위하여 추측에 포함된 개념을 처음보다 명확하고 정교하게 재정의하고 축소하여 추측을 보호하는 방법이다.

ⓒ 예외배제법(exception-barring method): 새로운 반례가 나타날 때마다 예외에 대하여 언급한 조건 절을 추측에 첨가하여 안전한 영역으로 철수하는 방법이다. 따라서 괴물배제법과 달리 반례는 추측에 포함된 용어의 예이므로 이 용어가 축소되지는 않는다. 그러나 과대 또는 과소 일반화의 위험을 내포한다.

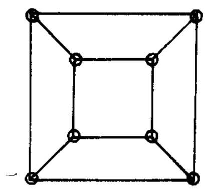
116) 이렇게 학생들이 반례를 찾는 과정을 통해 ① 기존에 학습한 수학적 지식을 통합하거나 견고하게 만들 수 있으며, ② 비판적 사고력을 신장시킬 수 있고, ③ 결과에 이르게 된 과정이나 관련된 지식을 재음미시켜 수학적 힘을 신장시킬 수 있다. 그리고 ④ 반례로서 예외적인 경우를 찾는 활동을 통해 이전의 추측에서 고려하지 못한 부분을 생각해 보게 함으로써 사고의 엄밀성을 강화시킬 수 있다.

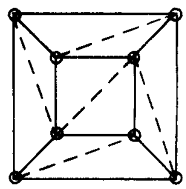
3) 라카토스의 『증명과 반박(Proofs and Reputations)』에 소개된 내용 요약

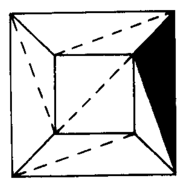
교사: 우리는 지난 시간에 다면체에 관한 한 가지 추측에 도달하였습니다. 곧, '모든 다면체에서 V를 꼭짓점의 수, E를 모서리의 수, F를 면의 수라 할 때, $V-E+F=2$[117)]'라는 추측에 도달하였습니다. 우리는 그것을 여러 가지 방법으로 검사하였습니다. 그러나 아직 증명하지는 못했습니다. 누군가 증명을 해 보았는지요?

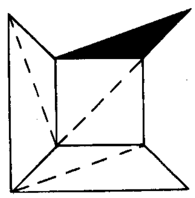
학생 Sigma: 저는 아직 이 정리에 대한 엄밀한 증명을 하지 못했습니다. … 그러나 정리가 많은 경우에 참이라는 것이 입증되었으므로 그 정리가 모든 입체에 대하여 성립한다는 데에는 의심의 여지가 없습니다. 그래서 이 명제는 만족스럽게 증명될 수 있을 것으로 생각됩니다. 선생님께서 증명을 하셨다면 그 증명을 설명해 주셨으면 합니다.

교사: 사실 제가 한 가지 증명을 하였습니다. 그 증명은 다음과 같은 사고 실험으로 이루어집니다. (아래 그림 참고)


〈그림1〉


〈그림2〉


〈그림3〉


〈그림4〉

- 1단계: 표면이 얇은 고무로 된 속이 비어 있는 다면체를 상상해 봅시다. 어느 한 면을 잘라내면, 남은 면을 찢지 않고 칠판 위에 평평하게 그물처럼 늘어놓을 수 있을 것입니다. 면과 모서리는 변형될 것이고, 곡선이 될 수도 있지만, V와 E는 변하지 않을 것입니다. 따라서 본래의 다면체에 대하여 $V-E+F=2$이면 그 때에 한하여 이 평평한 그물에 대해서 $V-E+F=1$이 될 것입니다. 한 면을 제거하였다는 것을 기억하십시오(〈그림1〉은 정육면체의 경우에 대한 평평한 그물을 보여 주고 있습니다).
- 2단계: 이제 이 그물을 삼각형으로 나눕니다. 삼각형으로 나누어지지 않은 다각형이 있으면 대각선을 그어 삼각형으로 나눕니다(〈그림2〉). 대각선을 그릴 때마다 E와 F는 하나씩 늘어나므로 $V-E+F$는 변하지 않습니다.
- 3단계: 삼각형으로 분할된 그물에서 삼각형을 하나씩 없애나갑니다. 삼각형을 하나 제거하려면 모서리를 하나 제거하거나 (그러면 면과 모서리가 하나씩 없어집니다(〈그림 3〉)) 모서리 두개와 꼭짓점 하나를 제거합니다. 그러면 면 하나, 모서리 둘, 꼭짓점 하나가 없어집니다(그림 4). 따라서 삼각형 하나를 제거하기 전에 $V-E+F=1$이었다면 그 삼각형을 제거하여도 $V-E+F=1$은 변하지 않습니다. 이러한 절차를 계속하면 마지막에는 단 하나의

117) 1620년경 다면체의 꼭짓점, 모서리, 측면의 수 사이의 최초의 의미 있는 위상적 관찰이 데카르트에 의해 알려졌다. 구면과 위상동형인 다면체를 단순다면체라 하는데 우리가 오일러 정리로 잘 알고 있는 데카르트-오일러 정리는 임의의 단순다면체에 대해 꼭짓점의 수 - 모서리의 수 + 측면의 수가 2라는 것으로 이때 수 2를 단순다면체의 오일러 표수라 한다.

삼각형만 남게 됩니다. 이 삼각형에서 $V-E+F=1$은 참이 됩니다. 우리는 추측을 증명하였습니다.

학생 Delta: 선생님은 이제 그것을 정리라고 부르셔야죠. 이제 그것을 더 이상 추측이라고 할 수는 없지요.

학생 Alpha: 의심이 드는데요. 저는 그러한 사고 실험이 정육면체나 정사면체에 대해서 수행될 수 있다는 것을 알고 있습니다. 그러나 그것이 모든 다면체에 대해서 수행될 수 있다는 것을 어떻게 알 수 있지요? 예를 들면 한 면을 제거한 뒤에 어떠한 다면체라고 하더라도 칠판 위에 평평하게 펼쳐 놓을 수 있다고 확신하시는지요. 선생님, 첫 번째 단계가 의심스러운데요.

학생 Beta: 지도를 삼각형으로 분할할 때 새로운 모서리 하나를 첨가할 때마다 항상 새로운 면을 얻을 것이라고 확신할 수 있는지요? 2단계가 의심스럽습니다.

학생 Gamma: 삼각형을 하나하나 제거할 때 두 가지 경우인 한 모서리가 사라지거나 그렇지 않으면 두 모서리와 한 꼭짓점이 사라지는 경우뿐이라고 확신하시는지요? 이러한 과정을 밟아갈 때 마지막에 단 하나의 삼각형만 남는다는 것을 확신하시는지요? 3단계가 의심스럽습니다.

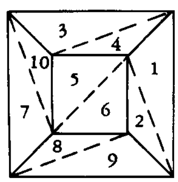
(중략)

학생 Gamma: … 저는 한 개의 삼각형을 제거할 때 다른 패턴이 생길 수 있지 않을까 하는 의심이 듭니다. … 마치 조각 그림 맞추기에서 가운데 조작을 들어내듯이, 단 하나의 모서리와 꼭짓점도 제거되지 않고 삼각형 한 개가 제거됩니다. 그래서 세 번째 단계가 거짓이 됩니다. 그리고 그것은 정육면체의 경우뿐만 아니라 평평한 그물로 변형하였을 때 모든 삼각형의 경계에 놓이게 되는 사면체를 제외한 모든 다면체에 대해서 그러합니다. …

(중략)

교사: … 본인은 세 번째 단계를 Gamma 군의 반례가 반박하지 못하는 다소 수정된 단계로 바꿈으로써 증명을 쉽게 다듬고 개선할 수 있습니다. … 3단계에서 단 한마디 말, 곧 "삼각형으로 나누어진 그물로부터 이제 경계가 되는 삼각형을 하나씩 제거한다"는 말만을 삽입하는 것입니다. …

학생 Gamma: … 다시 정육면체를 평평하게 펼쳐 놓은 그물을 생각하고 〈그림 5〉에서 주어진 순서대로 열 개의 삼각형 가운에서 여덟 개의 삼각형을 제거합니다. 여덟 번째 삼각형을 제거할 때, 그것은 그때까지는 분명히 경계가 되는 삼각형입니다만, 우리는 두 개의 모서리를 제거하였지만 꼭짓점은 제거하지 않았습니다. 이것은 $V-E+F=1$만큼 변화시킵니다. 그리고 서로 연결되지 않은 두 개의 삼각형 9와 10이 남게 됩니다.



〈그림 5〉

교사: … '$V-E+F$가 변하지 않는 방식으로 삼각형을 하나씩 제거한다'로 대치해야겠군요.

(중략)

학생 Alpha: … (그림 6(a)) 이 속이 빈 정육면체는 $V-E+F=4$입니다.

(중략)

학생 Gamma: … 추측과 그 증명은 완전히 빗나갔습니다. 손을 드십시오. … (추측의 기각, 항복 방법)

(중략)

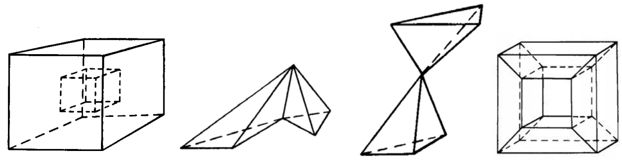
학생 Delta: … 이 한 쌍의 겹쳐 넣은 정육면체(〈그림 6(a)〉)는 다면체가 전혀 아닙니다. 그것은 괴물이고 병적인 경우이며 반례가 아닙니다. (반례 거부, 괴물 배제법)

(중략)

학생 Alpha: … 한 모서리를 공유하고 있는 두 사면체를 택합니다(〈그림 6(b)〉). 또는 한 꼭짓점을 공유하고 있는 두 사면체를 택합니다(〈그림 6(c)〉). … $V-E+F=3$임을 확인할 수 있습니다.

(중략)

학생 Alpha: … 이와 같은 사진틀을 생각해 봅시다(〈그림 6(d)〉). … $V-E+F=0$이 됨을 알 수 있을 것입니다.



(a) (b) (c) (d)

〈그림 6〉

(중략)

학생 Beta: (겹쳐 넣은 한 쌍의 정육면체와 같은) 공동이나 (사진틀과 같은) 터널이 있는 다면체가 아닌 모든 다면체에 대하여, $V-E+F=2$(예외 배제법에 의한 추측의 개선, 단편적 배제, 전략적 후퇴 곧 안전을 위한 행동).

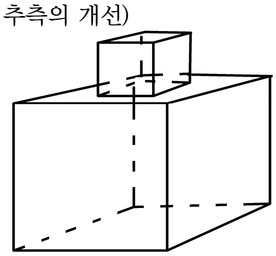
(중략)

교사: … 한 면을 제거한 다음 칠판 위에 평평하게 펼쳐 보려고 시도해 보십시오. 할 수 없을 것입니다.

(중략)

교사: … '데카르트-오일러 추측은 단순 다면체(simple polyhedra), 다시 말해, 한 면을 제거한 뒤에 평면 위에 펼쳐 놓을 수 있는 것에 대해서만 성립한다'로 수정되고 제한된 판(그물)을 제시합니다. 따라서 우리는 원래의 가설 중 약간을 구해 냈습니다. 우리는 '단순 다면체의 오일러 표수는 2이다'라는 명제를 얻었습니다.… (보조 정리 합체법에 의한 추측의 개선)

학생 Alpha: 정육면체 위에 그보다 작은 정육면체(볏 달린 정육면체, 〈그림 6(e)〉)가 얹혀 있는 도형을 생각해봅시다. … 그 오일러 표수는 16-24+11=3입니다. …

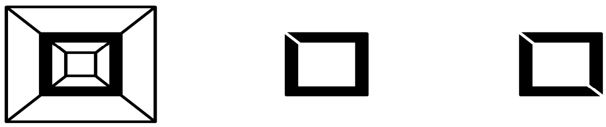


〈그림 6 (e)〉

학생 Bata: … 저는 항상 두 번째 보조 정리가 의심스러웠습니다. 그것은 삼각형으로 만드는 과정에서 새로운 대각선을 그음으로써 매번 모서리와 면의 수가 각각 한 개씩 늘어난다고 미리 가정하고 있습니다. 이것은 거짓입니다. 만일 볏 달린 정육면체의 평면에 펼친 그물을 살펴보면 반지꼴 면(ring-shaped face)을 발견하게 될 것입니다(〈그림 7〉). 이 경우에는 어떤 한 대각선도 면의 수를 늘리지 않을 것입니다. 면의 수가 하나 늘어나려면 변이 두 개 늘어나야 합니다.

(중략)

교사: … 반지꼴 면에서 거짓임이 입증된 보조 정리는 아마 당신이 생각하는 것처럼 '모든 면은 삼각형이다'가 아니라, '대각선에 의해서 분할되는 어떤 면도 두 부분으로 된다'는 것입니다. 본인이 조건으로 돌리고자 하는 것이 이 보조정리입니다. 그런 성질을 만족하는 면을 '단순 연결(simple-connected)'이라고 부르므로, 본인은 다음과 같이 본래의 추측을 두 번째로 개선하여 제시할 수 있습니다. '모든 면이 단순 연결인 단순 다면체에 대하여 $V-E+F=2$ … (보조 정리 합체법에 의한 추측의 개선)



(a) (b) (c)

〈그림 7〉

(중략)

① '증류된' 역사를 포함하고 있는 대화형식(수학교과서를 대화형식을 통해 발견적 양식으로 전개하기를 원했기 때문)으로 전개되어 있다.
② 소크라테스의 대화법과 유사함을 알 수 있다.

[참고] 2012년 11월 10일 실시된 2013학년도 대비 [문제5]

다음은 다면체에 대한 오일러(L. Euler)의 추측, 이에 대한 개략적 증명, 그와 관련된 세 가지 사례를 제시 한 것이다. 라카토스(I. Lakatos)의 오류주의 수리철학의 입장에서 옳은 설명인 것은?

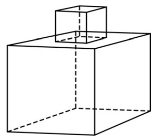
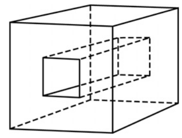
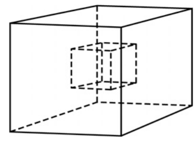
[오일러의 추측]

다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 각각 V, E, F라 할 때, $V-E+F=2$이다.

[개략적 증명]

- 1단계: 탄력이 좋고 속이 비어 있는 다면체를 상상하고서 그 다면체의 어떤 한 면을 제거 한 후, 제거된 면에 다른 면들이 평면 그물처럼 펼쳐지도록 만든다. 이때, 면이 개 줄게 되므로, 본래의 다면체에 대하여 $V-E+F=2$임을 보이는 것은 평평한 그물에 대해 $V-E+F=1$임을 보이는 것과 같다.
- 2단계: 모든 면이 삼각형이 될 때까지 각 면에 대각선을 긋는다. 대각선을 1개 그을 때마다, e, f 는 각각 1개씩 늘어나므로 $V-E+F=1$의 값은 변하지 않는다.
- 3단계: 삼각형으로 분할된 그물에서, 모서리와 면을 1개씩 없애거나 모서리 2개, 꼭짓점 1개, 면 1개를 없애는 방식으로, 삼각형을 하나씩 제거하여 단 하나의 삼각형만 남도록 한다. 삼각형을 제거하는 과정에서 $V-E+F=1$의 값은 변하지 않고 마지막에 남

은 삼각형에 대해 $V-E+F$의 값은 1이 되므로, 원래의 추측을 증명한 것이다.

사례㉠	사례㉡	사례㉢
		
정육면체에 작은 정육면체 볏이 달린 입체	정육면체에 네모 구멍이 뚫린 입체	정육면체 속에 작은 정육면체가 비어 있는 입체

① 사례㉠은 [1단계]와 [2단계]를 통과하지만 [3단계]는 통과하지 못한다.

② 사례㉢은 [1단계]를 통과하지 못하는 국소적 반례인 동시에 추측을 반박하는 전면적 반례이다.

③ 괴물배제법은 사례㉠, ㉢과 같은 전면적 반례를 수용해서 원래의 추측이 틀렸다고 인정하는 방법이다.

④ 사례㉠은 [1단계]에 대한 국소적 반례인데, 그 반례를 가지고 [1단계]를 분석하는 과정을 통해 '단순 연결된 면을 가진 다면체'라는 개념을 생성해 낼 수 있다.

⑤ 예외배제법은 사례㉠, ㉡과 같은 전면적 반례를 다면체의 예외적인 경우로 인정하고 원래의 추측에 그 예외를 언급한 조건절을 첨가하는 것이기 때문에, 다면체의 정의를 정교화 하는 데 기여한다.

4) 증명과 반박을 통한 평등수렴 조건 성장과정

연속함수의 임의의 수렴하는 급수의 극한이 연속이라는 추측 제기 & 코쉬(Cauchy)의 증명

↓

1807년 푸리에(Fourier)는 $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots$와 같은 불연속 함수를 발견

↓

1821년 코쉬는 연속함수의 임의의 수렴하는 급수의 극한은 연속이라는 정리를 증명

↓

1826년에 아벨(Abel)은 삼각급수가 코쉬의 정리의 예외가 됨을 알고 이러한 것들을 제외하려고 함

↓

1847년에 사이델(Seidel)은 어떻게 연속인 함수의 수렴하는 급수가 불연속이 될 수 있는지에 관심을 갖고 코쉬의 증명을 주의 깊게 분석한 결과, 그 증명이 평등수렴이라는 조건을 요구한다는 것을 발견

5) 수학 학습-지도 방법의 방향

① 증명과 반박의 논리는 추측하고 검사하고 증명하고 반박하는 수학의 탐구과정을 통해 학생들이 가진 비판적이고 합리적인 사고 능력과 태도를 개발하고, 수학하는 방법을 학습하는 것을 수학교육의 주요 목표로 삼고 있다.

② 학생의 태도

㉠ 학생들은 교과서나 교사에 의해 문제를 제시받는 데 그쳐서는 안 되며 스스로 문제를 제기하거나 재구성하고 이를 해결하면서 자신의 문제해결 전 과정을 스스로 평가하고 더 나은 방향으로 진전시키려 노력해야 한다.

㉡ 학생들은 비판과 반박의 능력과 태도, 곧 추측에 대한 합리적이고 비판적인 분석능력과 태도를 개발해야 하고, 비판이 개인에 대한 공격이 아닌 아이디어에 대한 공격임을 이해하여 자신의 추측이 교사와 동료들에 의해서 비판되기를 기대해야 한다.

③ 교사들의 태도

㉠ 교사는 학생들에게 지식은 끊임없이 변하며 교사를 포함하여 어느 누구도 완전한 지식을 소유할 수 없다는 입장을 보여주어야 한다.

㉡ 교사는 학생이 증명을 할 때 추측과 증명의 각 단계에 대한 적절한 반례를 준비해 두었다가 필요할 때에 제시할 수 있어야 한다. 특히 교사는 학생 수준에서 반박이 불가능한 증명을 단번에 제시해서는 안 되며, 반박을 하기 위하여 터무니없는 증명을 제시해서도 안 된다.

㉢ 교사는 수업을 위해 철저한 교재 연구에 바탕을 둔 지도 과정에 대한 사고 실험을 해야 한다.

㉣ 수학교사는 학생의 추측에 대하여 권위적인 가치판단을 유보해야 하며, 조심스럽게 안내역을 하면서 학생들을 격려하여 자신이나 다른 학생들의 추측에 대해 독립적으로 비판적 검사를 하고, 토론을 안내함으로써 반례를 발견하여 그들의 수학적 지식이 성장하도록 하는 동시에, 수학적 지식에 대한 합리적인 비판적 학급풍토가 조성되도록 노력해야 한다.

㉤ 교사 역시도 비판과 반박을 기꺼이 수용하여 학생이 그러한 교사의 행동 패턴을 모방하도록 해야 한다.

㉥ 학생들이 능동적으로 사고과정의 질을 평가하고 오류를 수정해 가는 능력과 태도를 개발해 주어야 한다.

㉦ 교육의 목적은 독립적이고 자유롭고 유능한 시민을 양성하는 데 있으므로, 교사는 학

생에게 학습할 목적을 설명해 주고, 발견과 개선의 즐거움에 대하여 그리고 필요한 능력을 개발하려는 학생들의 욕구에 대하여 논의하고, 흥미를 북돋우는 지적인 모험에 참여하도록 안내해야한다.

④ 수학사에는 수학 지식이 성장해온 과정이 담겨있으며 이에 대한 분석은 곧 수학 학습-지도 방법이 될 수 있다(역사발생적 원리 적용).

7. 브루소[118]의 수학 교수학적 상황론

7.1. 수학 교수학적 상황론

> 훌륭한 수학 학습-지도 상황은 학생들이 학교수학의 본질을 체득하면서 궁극적으로 자기 학습이 가능한 단계에 이르게 할 수 있는 상황이다.

1) 수학 교수학적 상황

(1) 정의

① 학생이 어떤 수학적 지식을 학습하도록 하는 것을 목표로 하는 교사, 학생, 환경 사이의 관계상황이다.

② 교사가 교수학적 의도가 담긴 문제 상황 속에서 학생과 상호 작용하는 상황이다.

③ 목표로 하는 수학적 개념의 본질을 터득할 수 있는 구체적인 교수 상황, 수학적 개념의 본질이 실제로 기능하는 교수 상황을 어떻게 정교하게 구성할 것인가를 논의하는 이론이다.

(2) 교수 상황 구성 단계

수학적·인식론적·교수학적 분석을 통해 수학적 지식의 본질을 밝힌다.	➡	본질의 배경인 역사-발생적 상황에 대한 분석을 한다.	➡	역사-발생적 상황을 고려하여 수학적 개념이 실제로 기능하는 교수 상황을 구성한다.

(cf) 수학 개념은 아래 단계를 거쳐 발전하며 이와 대응하여 교수 상황을 단계적으로 구성해야 한다.

원형 수학적 개념	➡	의사 수학적 개념	➡	이론 수학적 개념

㉠ 원형 수학적 개념(protomathematical concepts): 수학자들의 불완전하지만 일관된 관념이 무의식적 · 암묵적으로 문제해결에 사용되는 단계

㉡ 의사 수학적 개념(paramathematical concepts): 개념이 아직은 조직화되지도 않고 이론화되지도 않은 친숙한 용어로 나타내어지는 상태로, 수학자들은 그것들이 이론적

118) Guy Brousseau, 1933~

인 개념의 자격을 갖고 있지는 않지만 그것들을 잘 알고 있고, 수학화를 필요로 하는 어떤 모순도 발생하지 않기 때문에 의미론적으로 조종하며 도구로 사용하는 단계

㉢ 이론 수학적 개념(mathematical concepts): 개념 자체가 분석의 대상으로 인식되고 연구되어 이론적인 수학적 개념으로서의 위치가 부여되는 단계

(3) 목적

기성의 이론적인 수학적 지식을 곧바로 가르치는 데에서 비롯되는 '형식적 고착'의 문제를 해소하고 이해를 위한 교육의 문제를 수학적 지식의 역사-발생적 상황을 단계적으로 경험하게 하여 해결하고자 하는 시도이다.

(4) 수학 교수학적 상황을 적용한 예 '소수 개념 지도를 위한 교수 상황의 구성'

① 소수 개념의 본질에 대한 분석을 한다.

② 분석결과

· 소수는 방정식이 해를 갖게 하기 위한 정수의 확장이다.
· 정수의 순서쌍(분수)의 동치류이다.
· 모든 유리수(실수)를 근사적으로 표현할 수 있다.
· 비의 측면을 갖는다.
· 배 개념인 작용소의 측면과 선형사상이라는 측면을 갖는다.
· 소수는 측정활동의 소산이다(역사-발생적, 인식론적인 측면에 의해).

③ '종이 한 장의 두께를 재는 측정 상황'에 따른 지도 소개

학생들은 두께가 다른 여러 가지 종이의 두께를 측정하고 표현하는 문제 상황에 참여하면서 자연스럽게 '원형수학적인' 소수 개념으로부터 '수학적인' 소수 개념을 구성하게 된다.[119)]

㉠ 한 장의 두께 측정하기: 여러 장을 측정해야 문제를 해결할 수 있음을 인식
㉡ 10장, 20장, 30장의 종이 두께를 측정하고 그 결과 사이의 관계를 확인하기
㉢ 최종적으로 한 장의 두께를 어떻게 표현할 것인지, 두께의 대소를 어떻게 확인할 것인지 등을 논의하게 되며, 이러한 일련의 활동 속에서 소수 개념을 구성하게 됨

$$10장\ 1\text{mm},\ 20장\ 2\text{mm},\ 30장\ 3\text{mm} \Rightarrow \frac{1}{10}\text{mm} = \frac{2}{20}\text{mm} = \frac{3}{30}\text{mm}$$

㉣ 공식화, 정당화하여 소수 개념 구성하기

④ 이 활동에 이어 그림을 확대, 축소하는 활동을 통해 소수의 본질, 곧 비를 보존하는 선형사상의 의미가 보다 명확히 구성되도록 시도한다.

119) 1960년대의 지도 방법인 '미터법을 이용한 측정상황'과 1970년대 '새수학'의 지도 방법인 Dienes 블록을 이용한 넓이 측정 상황을 비판하면서 소개하였다.

⇒ 이 수업은 제시된 교수학적 상황이 학생들의 참여를 어렵게 할 정도로 인위적으로 구조화되지 않았다는 점, 그러므로 상황에 맞는 문제해결 전략을 학생 나름대로 찾고 적용할 수 있다는 것이 특징이다.

(5) 교사의 역할

① 학생 나름의 접근을 통하여 문제 상황을 이해하고 구성한 것을 표현하며 바람직한 방향으로 수학화 하도록 안내하기 위해 교사는 지도 내용에 대한 교수의도를 분석하여 재구성하여야 한다.

② 교사는 학생에게 비교수학적 상황을 제공해주려 노력해야 하고 좋은 문제를 제시해주어야 한다.

참고

교수의도적 측면에서 본 교수 상황 두 가지

(1) 교수학적 상황 – 하나 이상의 문제상황과 교사의 교수학적 의도가 담긴 상황

㉠ 일단의 규칙을 가진 일종의 게임의 형태로 이루어진 문제상황이며 교수학적 의도가 명백하게 드러나는 상황이다.

㉡ 학습자는 환경에의 적응을 통해 학습을 진행하며 이에 교사는 학습자가 잘 적응할 수 있는 좋은 상황을 구성해야 한다.

㉢ 좋은 상황이란

- 가르치고자 하는 개념과 내용의 본질이 담겨져 있고 학생들에게 관심을 끄는 상황
- 막연한 학습 배경이나 환경이 아닌 학생들 스스로 발견하는 일련의 환경, 그와 그의 환경을 통합하는 관계, 행동이나 전개를 특징짓는 일련의 '주어진 것들'
- 학생들의 반응 과정에서 주위 환경이 진술이나 명제로 환원될 수 있는 상황
- 학생들이 해결해야 할 과제나 어떤 목표를 갖고 있는 문제를 포함한 상황

㉣ 처음으로 수학적 지식을 만들게 한 상황이다. 따라서 역사적으로 최초의 해결을 실행하였던 수학자의 지식에 가까워야 한다.

예 "오늘 배울 내용은 분수입니다"라고 교사가 배울 내용을 명백하게 밝히는 상황

(2) 비교수학적 상황 – 교수학적 의도와 가정이 제거된 상황

㉠ 지식의 수준에서는 교사의 중재 없이도 학생들 스스로 다양한 유형의 수학적 개념이나 지식을 획득할 수 있는 상황을 의미한다.

㉡ 학생들은 주어진 문제상황의 조건에 적용해야 할 필요성을 느끼고 그것에 부응해야 한다.

㉢ 비교수학적 상황을 통한 지식의 구성으로 학생들은 교수 맥락 밖에서 어떤 의도적인 방향이 없는 상황을 만날 때 자기 스스로 그러한 지식을 사용할 수 있게 된다.

⇒ 학생들은 교수학적 상황에서 비교수학적 상황으로 이행되어 교사가 존재하지 않는 상황에서도 학생들이 지식을 적용시킬 수 있는 능력을 갖도록 해야 한다. 즉 교수학적 상황론에서 수학적 개념의 본질이 담겨져 있고 그것이 기능하게 될 수 있는 좋은 상황이란 궁극적으로 비교수학적 상황을 의미한다.

(6) 교수학적 상황이 갖추어야할 조건(각 상황들간의 연계성과 일관성)

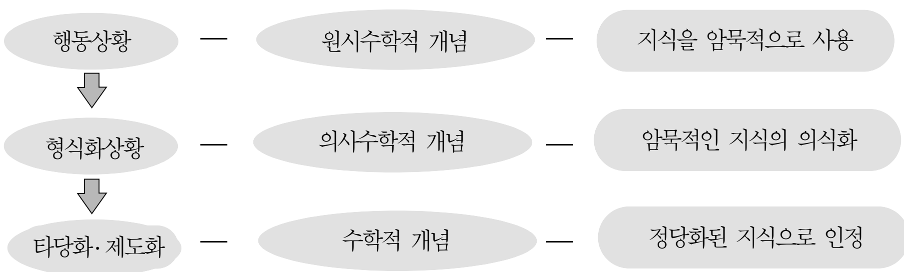
① 수학적 개념이나 내용이 담겨지도록 계획되어야 하며 그 개념이나 내용이 학생들에 의해 상황 속에서 발생하여 기능할 수 있도록 구성되어야 한다. 즉, 가르칠 지식, 가르쳐야할 개념 · 내용의 역사적 발생근원과 발달 과정, 의미와 동기 · 용도 · 기능, 이 개념에 대한 오개념과 장애요인 등을 파악해야 한다(인식론적 · 역사적 · 교수학적 분석 선행 필요).

② 교수학적 상황내의 일련의 활동을 통해 수학적 개념이나 성질들이 분리되지 않도록 광범위한 맥락들이 충분히 고려되어야 한다. 즉, 본질적인 개념이 '발생'하고 '기능' 할 수 있도록 교수학적 상황을 계획해야 한다.

③ 지적활동의 추진력이 되고(동기유발) 문제를 찾는 출발점이 되는 '불확실'한 상황이나 '통제 불가능'한 상황이 필요하다.

④ 다른 상황에서 발생하게 되는 새로운 지식이 이전에 획득된 지식과 관련지어질 수 있어야 한다.

(7) 교수학적 상황의 발전과정



① 수학적 개념 발달과정

㉠ 원형(원시)수학적 개념: 무의식적인 사용

연구의 주제나 도구로서 인식될 수 없는 다소 불완전하고 폭넓은 단계로 개념을 문제의 해결에 암묵적으로 사용하고는 있지만 의식하고 있지는 못한 수준의 상태이다. 아직 이 개념을 증명해줄 확연한 용어가 존재하지는 않지만 징후나 흔적은 존재한다. 즉, 연구의 주제나 도구로서는 인식될 수 없는 다소 불완전하고 폭넓은 수준이다.

예 함수의 원형수학적 개념 = Galileo의 함수개념

: Galileo는 운동을 중심 문제로 한 역학 연구를 하면서 두 변화하는 양 사이의 관계

를 탐구하는 가운데 함수 개념에 도달하였다. 또 비례라는 단어를 사용하여 그와 같은 아이디어를 개념화하고자 하였다. 비록 함수 개념이 명확하게 존재하지 않고 암묵적이지만 매우 명확하게 발전한 것을 분명히 볼 수 있다.

㉡ 의사(범)수학적 개념: 연구의 도구

암묵적으로 사용했던 개념들이 어떤 수단이나 도구로 의식되는 단계로 개념의 특성이나 성질이 연구되고는 있지만 완전히 조직화되거나 이론화되지는 않은 상태이다. 용어나 언어가 다소 불완전한 개념이나 지식들을 좀더 명확하게 하기 위해 또는 의사소통을 최대한 적절히 하기 위해 사용된다.

예 함수의 의사수학적 개념 = Euler나 Cauchy 등의 함수개념

: Euler나 Cauchy 등은 양 사이의 관계나 대수식으로 함수개념이 정의되는 것으로 생각하였다.

㉢ 수학적 개념: 연구의 대상

개념이 수학적 이론의 통제 하에 놓이게 됨으로써 하나의 완전한 구조를 가지게 되는 상태이다. 이 개념이 삽입되는 구조들과 그 구조를 만족하는 성질들에 의해 정확하게 정의될 수 있기 때문에 모호함이나 오류로부터 보호된 상태로 유지된다.

예 함수의 수학적 개념 = Bourbaki의 함수개념

: 20세기에 들어와 대응으로 정의되면서 명확한 수학적 지식의 지위를 부여받았다.

② 비교수학적 상황의 발전과정 – 행동, 형식화, 타당화, 제도화 상황

㉠ 행동 상황

게임의 처음 부분, 처음에는 아무런 생각 없이 즉각적으로 행동하지만 점차적으로 상황 내의 여러 관련성이나 게임의 규칙으로부터 정보를 이끌어내어 게임에서 이기기 위한 전략을 개발하고 학습자가 의식하지 못하고 암묵적으로 사용하는 암묵적 모델에 의해 상당히 규칙적이고 적절한 방법으로 결정을 하게 된다(단, 지식이 무의식적인 적응의 결과일 뿐 학습자는 그러한 지식이 규칙적이라는 것조차 주목하지 못함). 따라서 형식화되지 않은 형태로 희미하지만 자신의 사고의 근거가 될 수 있는 아이디어, 모델, 전략들은 모두 나중에 본질적인 개념이나 지식이 될 수 있다.

㉡ 형식화 상황

행동 상황에서 암묵적으로 사용했던 지식을 의식하고 게임의 전략을 다른 사람과 서로 나누고 전달하기 위하여 학생들 사이에 의사소통과 상호작용이 활발히 일어나는 상황이다(전략을 타당화 하는 것은 행동의 수단이며 의식화되지는 않음). 따라서 상

황내의 주어진 조건을 만족시키면서 확립될 지식이 되기 위한 준비단계이다. 이 때 의사소통과 수학적 언어 능력이 발생한다.

㉢ 타당화 상황

형식화 상황에서 의식되고 표현된 전략이 타당한 것인지를 확인하고 증명하는 상황이다. 여기서 학생들은 나름대로의 의견에 대하여 그 근거를 확인하고 구성하고 형식화하고 논의하는 가운데 타당성을 확인하면서 자신의 의견을 수정하게 되고 다른 사람의 동의를 얻을 수 있는 명제를 만들어간다.

㉣ 제도화 상황

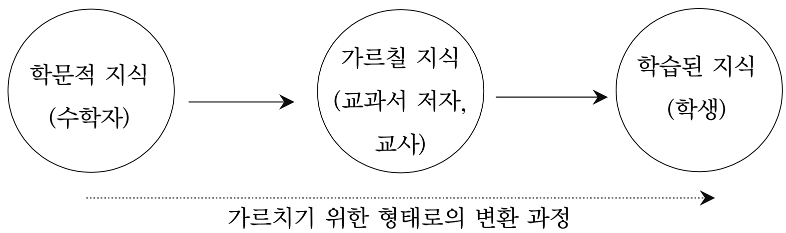
교사의 개입 없이 문제를 풀던 상황을 벗어나 앎의 대상을 공식적으로 고려하고 동시에 교사가 학생들의 학습을 공식적으로 고려하는 상황이다(교수학적 과정의 본질적 단계). "그것이 바로 우리가 이야기한 방법입니다", "그것들은 유지할 가치가 있습니다"라는 말로 공식화할 수 있다.

7.2. 수학적 지식의 교수학적 변환론(didactic transposition theory)

1) 교수학적 변환론(쉐바야르, Yves Chevallard, 1988)

① 교육적 의도에 의해 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것을 지식의 교수학적 변환이라 한다. 그러나 교육적 의도를 가진 지식의 변형은 어느 것이나 교수학적 변환이라고 할 수 있다.

② 교수학적 변환이란 교육적 의도와 교수학적 계약[120]의 요구에 따라 교사가 지식을 수정하고 지식의 조직, 상대적인 중요성, 그 지식의 제시 방식 등을 바꾸는 과정이다. 즉 '학문으로서의 수학(=학문적 지식, 전문 수학자가 연구 대상으로 삼는 학문수학)'이 '교육의 대상으로서의 수학(=교수학적 지식, 학교에서 교사와 학생이 교수 · 학습의 대상으로 삼는 학교수학)'으로 변환되기 위해 겪는 일련의 과정이다.



[교수학적 변환 과정]

120) 교수학적 계약: 교사와 학생이 문제가 되는 지식에 관하여 명확하게 혹은 암묵적으로 서로에게 부과하는 의미와 인가(=교사는 가르쳐야 하고 학생은 배워야 한다)

㉠ 학문적 지식: 전문 수학자가 연구 대상으로 삼는 '학문 수학'을 의미, 교육 내용으로 재구성되기 이전의 지식을 의미

㉡ 교수학적 지식: 학교에서 교사와 학생이 교수 · 학습의 대상으로 삼는 '학교수학'을 의미

· 가르칠 지식: 교육과정 개발자, 교과서 저자, 교사에게 대상이 되는 지식, 교육 내용으로 선정되어 재조직된 지식

· 학습된 지식(가르쳐진 지식): 학생에게 대상이 되는 지식, 교육이 이루어진 후에 학습자에게 구성되어 있는 지식

(cf) 쉐바야르는 학문적 지식 가운데 교육의 내용으로 선정되고 조직되는 과정을 설명하기 위하여 학문적 지식과 가르칠 지식을 구분하였으며, 교육 내용이 가르치는 활동에 의하여 어떻게 변화되는가를 확인하기 위해 가르칠 지식과 학습된 지식을 구분하였다.

③ 수학적 지식의 교수학적 변환의 주체는[121] 교과서 저자와 교사이다.

㉠ 교과서

· 교과서는 지식의 교수학적 변환의 구체적인 모습을 알아볼 수 있는 전형적인 자료로서 교과서에서의 수학적 지식의 교수학적 변환은 학생의 사고와 실제적인 상황을 고려한 의사(擬似) 개인화와 의사 문맥화의 결과이다.

· 초등화/단순화/구체화된 전개, 형식적인 연역적 전개, 설명과 연습형태의 전개, 발생적 전개, 명제와 이유를 나란히 기술하는 2단 형식의 증명 서술, 폴리아가 제시한 문제해결 방법과 전략의 해설과 예시 등은 교과서에 나타난 교수학적 변환의 흥미 있는 형태이다.

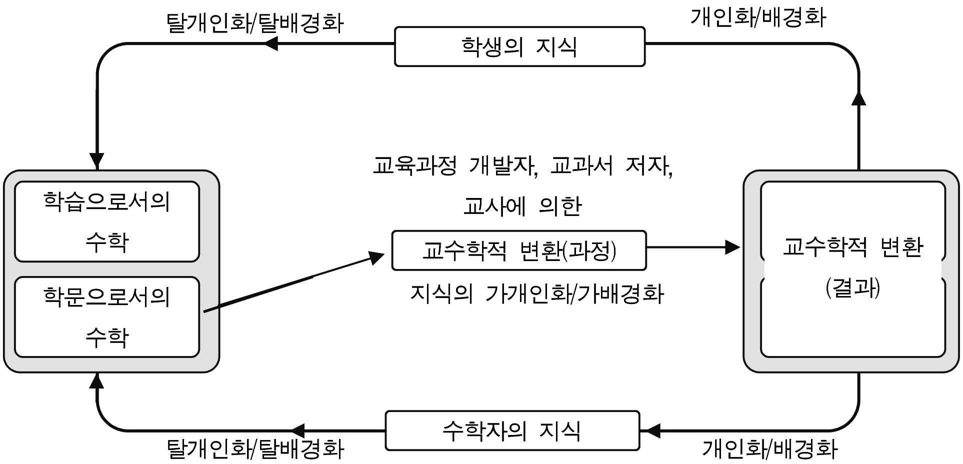
㉡ 교사

· 수학자의 수학활동처럼 수학적 지식이 등장하게 되는 실제적인 상황을 연구하고 학생에 맞게 제시한다. 학생들은 그러한 상황 속에서 탈개인화, 탈문맥화된 형식적인 지식을 개인화, 문맥화하여 활성화시킴으로써 의미를 파악해야 한다.

· 교사는 학생을 위해 지식을 재문맥화, 재개인화 하여야 한다.

· 수업에서 수학자의 소사회(microsociety)를 흉내내어 문제 상황 속에서 가르치고자 하는 지식을 재발견하는 기회를 제공해야 한다. 학생들은 거기서 발견할 지식을 다시 탈맥락화 탈개인화하여 수학사회에서 통용되고 있는 지식으로 재구성해야 한다.

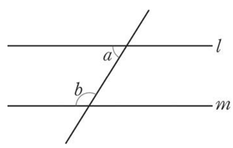
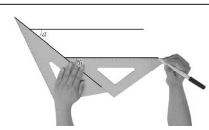
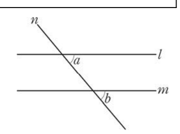
121) 가르친 내용이 목표로 하는 지식을 알게 하는데 실패하는 것은 가르치고자 하는 지식의 적절한 교수학적 변환에 실패했기 때문이기도 하므로 그 과정은 주의 깊게 진행되어야 한다.



〈교수학적 변환을 둘러싼 수학적 지식의 흐름〉

④ 교수학적 상황의 예

㉠ 중학교 1학년 평행선의 성질

〈학문수학〉	〈학교수학〉
명제: 두 직선이 평행이면 동위각의 크기는 같다. (증명) 평행인 두 직선 (l, m)에서 동위각의 크기가 같지 않다고 하자. 그러면 다음 그림과 같이 어느 한 쪽에 있는 내각의 합$(\angle a = \angle b)$이 두 직각(180°)보다 작게 된다.  제5공준(평행선 공준)에 의해 두 직선 l, m은 만나게 되고 평행하지 않게 된다. 이것은 두 직선 l, m이 평행이라는 것에 모순이 된다. 그러므로 평행인 두 직선에서 동위각의 크기는 같다.	[활동해 봅시다] 오른쪽 그림과 같이 두 개의 삼각자를 사용하여 평행선을 그어 보고, $\angle a$와 $\angle b$의 크기를 비교하여 보자.  오른쪽 그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l, m과 다른 한 직선 n이 만날 때 생기는 동위각인 $\angle a$와 $\angle b$의 크기는 서로 같다. 즉 $\angle a = \angle b$이다.  한편, 한 직선 n에 대하여 동위각인 $\angle a$와 $\angle b$의 크기가 서로 같도록 직선 l, m을 그으면 두 직선 l, m은 서로 평행하다. 위의 내용을 정리하면 다음과 같다. 평행선과 동위각 **1.** 평행선과 다른 한 직선이 만날 때, 동위각의 크기는 서로 같다. **2.** 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각의 크기가 서로 같으면 그 두 직선은 서로 평행하다.

ⓛ 함수의 연속[122)]

〈학문수학〉	〈학교수학〉
집합 E가 실수의 집합 R의 부분집합일 때, 함수 $f:E \to R$에서 '임의의 양수 ϵ에 대하여 적당한 양수 δ 가 존재하여 $\lvert x-a \rvert < \delta,\ x \in E \Rightarrow \lvert f(x)-a \rvert < \epsilon$ 이 성립한다.' 을 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.	함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 (i) $x=a$에서 함숫값 $f(a)$이 정의됨 (ii) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$이 존재 (iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

⑤ 교수학적으로 변환하는 과정에서 첫째, 교사 · 학생 · 지식 사이의 삼원적 관계 속에서 교수 상황을 고려해야 하며 둘째, 가르치려는 의도에 따라 지식이 변형될 때 지식의 의미가 손상되지 않도록, 지식의 파손성을 고려해야 한다.

2) 극단적인 수학 교수 현상

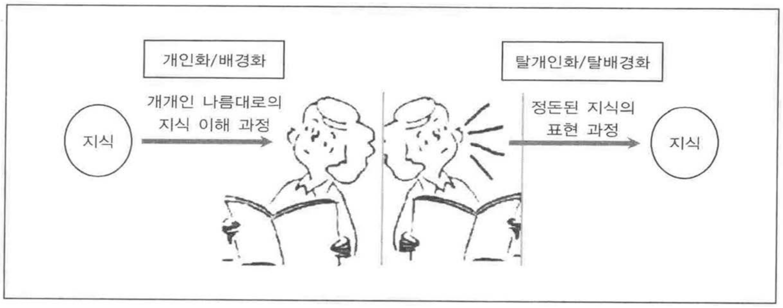
교과서 저자나 교사에 의한 수학적 지식의 교수학적 변환 가운데 의사 개인화/의사 배경화 과정 혹은 탈개인화/탈배경화 과정을 과도하게 강조하였거나 경시하는 데에서 비롯되는 극단적인 현상을 의미한다.

개인화/배경화의 과정	메타-인지적 이동	가상적 학생의 개인화/배경화의 과정을 지나치게 강조한 결과
	형식적 고착	학생의 개인화/배경화의 과정의 중요성을 과소평가한 결과
탈개인화/탈배경화의 과정	토파즈 효과	학생의 탈개인화/탈배경화의 과정을 간과한 방편적 조치의 결과[123)]
	죠르단 효과	학생의 탈개인화/탈배경화의 과정을 과대평가한 결과

122) 해석학의 '산술화' 결과로 만들어진 함수의 연속성에 대한 정의이다.

123) 강완, 수학적 지식의 교수학적 변환(1991), 한국수학교육학회지 〈수학교육〉 제30권 제3호, 71-89

[참고] 개인화/배경화 및 탈개인화/탈배경화



124)

〈학습자에게의 지식의 변형 과정〉

i) 개인화/배경화(personalization/contextualization)

㉠ 개인에게 의미 있는 지식이 형성되는 과정

㉡ 수학적 지식의 이면에 들어 있는 아이디어를 살려내어 다루는 것

㉢ '형식적 수학 지식'이라는 뼈대 위에 살을 입혀서 수학 지식의 맥락과 의미를 보다 풍부하게 하는 것

ii) 탈개인화/탈배경화(depersonalization/decontextualization)

㉠ 방만하게 확장된 지식이 형식적으로 안정된 형태로 정돈되는 과정

㉡ 아이디어를 살려낸 지식을 구조적으로 정돈하는 것

㉢ 여러 가지 맥락과 개인적 의미를 제거함으로써 개인화/배경화된 지식을 형식적인 수학적 지식으로 이해하는 것

(1) 토파즈 효과(Topaze effect)

① 교사가 가르쳐야 한다는 '교수학적 계약'의 압박 때문에 풀이에 대한 명백한 힌트를 주거나 유도 질문을 하거나 문제와 함께 해답을 제시함으로써 학생들이 지식을 구성하는 것을 방해하거나 그러한 학습 환경을 일소하게 되는 것을 말한다.

② 교사가 유도 질문이나 힌트 또는 정답을 제공한다.

: *[교사는 동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 사각형이 원과 만나는지를 보여준다.]*

교사: 한 점에서 만날 수도 있고 아닐 수도 있군요. 그럼 어떤 사각형일 때 한 점에서 만날까요? 삼각형 세 변의 수직이등분선의 교점이 삼각형의 어떤 중심인지 한번 생각해 보세요.

124) (개정판) 수학교육학 신론, p.345

[대답 없음]

교사: 삼각형에서 세 변의 수직이등분선의 교점인 외심입니다. 만약 사각형의 네 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다면 그 점이 이 사각형의 외심이 되지 않을까요? 실제로 외심이 됩니다. 이 외심은 삼각형의 외접원의 중심입니다. 정리하면 사각형이 원에 내접한다면 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만납니다.

③ 문제집에 힌트가 포함되어 있다.

: 이차항의 계수가 1인 두 이차 다항식의 최대공약수가 $x+1$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-x+2일 때, 두 다항식을 구하여라.

[힌트] $AB=LG$의 관계를 이용한다.

④ 상호작용의 깔때기 패턴(funnel pattern of interaction, Bauersfeld, 1988)이라고도 한다.

(2) 죠르단 효과 (Jourdain effect)

① 토파즈 효과의 심각한 퇴행이다.

② 학생과 가르치고자 하는 지식에 대해 토론하기도 어렵고 그렇다고 가르칠 수 없다는 것을 인정하기도 어려운 상황에서 학생의 행동이나 대답이 사실은 사소하고 평범한 단서나 의미로부터 야기된 것임에도 불구하고 교사는 학생의 그러한 반응을 어떤 특정한 수학적 지식이 형성되었음을 보여주고 있다고 인정해버리는 것을 말한다.

③ 작은 요구르트 병이나 색칠한 그림들에 약간 기이한 조작을 수행한 아동에게, "너는 방금 클라인 군(Klein group)을 발견했어" 라고 말하면서 학생의 조작을 과대평가하는 교사의 모습이다.

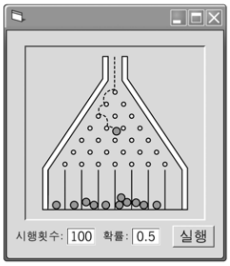
④ 1960년대 '새수학'의 모습 등에서 확인된다.

㉠ 학생들은 단지 계산 문제를 다루고 있는데 교사는 그 안에서 학생들이 구조를 발견하고 구조를 파악했다고 규정하는 현상

㉡ 교육학자나 수학자의 철학적이며 과학적인 정당화가 교사들의 평상적인 교육실천에 부과되어 특별하지도 않는 수업을 교육학적으로 수학적으로 신성하게 만든 경우

⑤ 모의실험 프로그램을 활용하여 중심극한정리(central limit theorem)를 학습하는 환경에서 교사가 밑줄 친 부분의 학생 설명만으로 '근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요'라고 학생 반응을 과대평가하였다.

교사: 오늘 수업에서는 컴퓨터로 모의실험을 해 볼 거예요. 위쪽에서 공을 떨어뜨리면 판 위에 규칙적으로 부딪혀 바닥에 있는 빈칸 가운데 하나로 들어가게 돼요. 100개의 공을 하나씩 떨어뜨렸을 때 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수는 어떻게 분포될지 한번 예상해 보세요.



학생: 각 칸에 들어가는 공의 개수가 비슷할 것 같습니다.

교사: 그럼 이 프로그램으로 실험해 볼까요?

(모의실험 프로그램을 실행한다.)

교사: 자, 어떤 결과가 나왔나요?

학생: 각 칸에 들어간 공의 개수가 비슷하지 않습니다.

교사: 왜 그럴까요?

학생: 아무래도 가운데 칸으로 떨어지기가 쉬울 테니까 공이 양 끝에 있는 칸으로 떨어질 가능성이 가운데 칸으로 떨어질 가능성보다 낮을 것 같습니다.

교사: 그렇지요. 지금 여러분은 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수가 따르는 분포가 근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요.

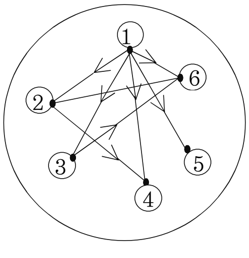
(3) 메타-인지적 이동(meta-cognitive shift)

① 진정한 수학적 지식을 가르치기 어려운 경우 교수학적 고안물이나 발견적 수단 자체를 지도의 목적으로 삼게 되는데 이 때, 교사의 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식으로부터 그가 고안한 교수학적 수단으로 이동하는 현상을 의미한다.

② 문제해결 지도에서 발견술 자체가 지도 목적이 되는 것도 유사한 현상으로 이해할 수 있다.

③ 학생들의 활동을 강조하는 수업에서는 주석이나 활동의 규약을 더 많이 만들어낼수록 메타인지이동의 문제가 발생하기 쉽다.

④ 1960년대 Papy의 「화살표 도태」: 집합 {1, 2, 3, 4, 5, 6 }에서 ‘a는 b의 약수이다’라는 관계를 나타낸 그래프는 기대했던 역할도 해주지 못했을 뿐만 아니라 가르치는데 어려움만 유발시켰다.



⑤ 음수 지도 시 사용되는 셈돌 놀이에서 학생들이 셈돌의 조작만을 연습시킨다.

⑥ 컴퓨터나 그래픽 계산기 등을 이용한 수업에서 컴퓨터나 그래픽 계산기의 조작에만 치우쳐, 색을 넣는다거나 모형을 보기 좋게 꾸미는 등의 활동에만 관심을 보인다.

⑦ 조합의 개념을 도입하는 수업에서 학생들이 다음과 같은 모습을 보인다.

: 5명씩 이루어진 각 모둠에서 2명을 대표로 뽑는 방법이 몇 가지인지 모둠별로 알아보려고 하였는데, A모둠에서는 가위바위보를 하자, 제비뽑기를 하자는 등 의견이 분분하였고, B모둠에서는 각 경우를 수형도로 나타낼 것인지, 표로 나타낼 것인지 결정하느라 많은 시간을 소비하였다.

(4) 형식적 고착(formal abidance)

① 메타인지적 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려고 시도하는 교사의 모습이다.

② '메타인지적 이동'과 반대로 논리적 · 형식적으로 표현된 수학적 지식을 곧바로 제시하는 현상이다.

③ 형식적 고착은 학생들로 하여금 수학적 활동이 가진 귀납적 성격을 이해하는 데 도움이 되지 않을 수 있으나, 탈개인화/탈배경화의 과정에서의 어려움을 줄여줄 수는 있다.

④ ·수학적 지식의 연역적 표현 및 공리적 전개

· $(a+b)^m$에 대한 이항공식이 주어지고 난 후 $(x+y)^5$이나 $(x-y)^{-5}$과 같은 특수한 경우의 전개 방법 설명: 수학적 법칙이 적용되는 논리적 과정만을 상세히 설명

· 이차방정식의 근의 공식을 유도하고 이를 이용하여 여러 가지 이차방정식의 해를 구하고 근과 계수와의 관계를 유도하는 것

· 분배법칙을 $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$와 같이 표현하는 것

· 함수를 집합 사이의 대응으로 곧바로 제시하는 것

7.3. 수학의 인식론적 장애(Epistemological obstacle)

1) 인식론적 장애의 정의

(1) Bachelard의 정의

① Bachelard(1884~1962)는 인간의 인식을, '소박한 경험'으로부터 단절(rupture)되어 어떤 이론적 틀(예를 들어, 수학적 이데아)에 흡수됨으로써 이루어지는 불연속적인 과정으로 설명하였다.

② 이러한 '인식론적 단절'을 방해하는 요소를 설명하는 개념이 '인식론적 장애'이다.

(2) Brousseau와 Sierpinska 등의 정의(수학교육의 맥락에 도입)

① 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용한 지식으로서 학생의 인지구조의 일부가 되어 있지만, 새로운 문제 상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식이다.

② 이 지식은 학생에게 부적합해져 분화, 조정이 용이하지 않으며 인지적 갈등을 야기한다.

③ 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인하는 것이므로 피할 수도 없고 새로운 지식이 성장 발달하기 위해서는 반드시 극복해야 하는 장애이다.125)

④ 수 개념을 '크기'와 연관 짓는 것은 자연수를 학습하는 상황에서는 유용한 방법이지만 음수를 학습하게 될 때는 오히려 그것이 수 개념을 확장하는 학습에 방해가 된다.

2) 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인 – 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유 등

> 인식론적 장애 형성에 영향을 미치는 요인은 지식의 본질(본성)과 밀접히 관련된 불가피한 것으로 피할 수도 없고 피해서도 안 되는 요인이며, 이를 조절하고 제어하는 능력을 개발하는 것이 요구된다.

① 일상어: '집합, 극한, 무한 등'이 일상어로 사용되지만 수학에서 사용될 때는 일상어와 똑같은 의미로 사용되지 않으므로 이러한 일상어가 새롭게 도입된 수학적 개념과 뒤섞여서 부적절한 개념 이미지를 형성하게 되어 수학 학습의 장애로 전환된다.

② 직관: 무한 개념이나 극한 개념은 직관적으로 받아들이는데 어려움이 있다.

③ 과도한 일반화: 유한에서 성립하는 성질이 무한과 극한에서도 성립한다고 할 경우 그렇지 못한 경우에 대해 인지적 장애가 발생한다.

④ 은유: 함수와 수열의 극한에서 '화살표', '수렴한다', '발산한다', '증가한다' 등과 같은 운동 은유로 인해 $\epsilon-\delta$식 정의로 엄밀하게 전개하기까지 오랜 시간이 걸린다.

3) 수학의 인식론적 장애의 예

① '급수에서 일반항이 0으로 향한다면 그 급수는 수렴한다'를 인정하고 이와 어긋난 급수의 극한에 대해 수용하지 못한다.

⇒ "만일 x_i가 0으로 향한다면 어떤 n이 존재하여 그 이후의 항 x_i들은 무시할 만큼 작게 되고 이 n 다음부터는 실제로 더 이상 더해지는 것이 거의 없어서 그 급수는 수렴한다"는 생각은 초등학교와 중학교 수학에서 다룬 $\pi=3.14\cdots$와 같은 소수관념에 의

125) Tall, Herscovics 등은 '인지장애(cognitive obstacle)'라는 용어를 사용하여 정의하였다.

존하고 있기 때문이다.

② '0.999… = 1'임을 단순한 계산에 의해 확인할 수 있으면서도 혼란과 갈등을 느끼며 이를 수용하지 못한다.

⇒ 0.9, 0.99, 0.999 등은 모두 1보다 당연히 작고 0.999…라 할지라도 분명히 1보다 작은 수들이 계속되므로 무조건 작다고 느낀다.

③ '무한 집합과 극한 개념을 바탕으로 한 실수 개념의 이해'에서 무한의 존재성에 대 해 혼란과 갈등을 느낀다.

⇒ 인식론적으로 잠재적 무한에서 실무한으로 이행하는 인식론적 장애 극복과정이 필요하다.

(예) 0.999 … = 1

④ '자연수와 소수의 숫자의 유사성'으로 말미암아 다음의 (예)처럼 판단하여 혼란과 갈등을 느낀다.

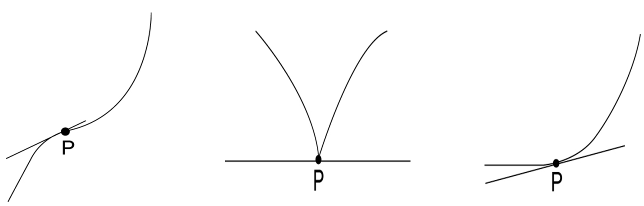
(예) · 두 소수 사이에 있는 또 다른 소수를 생각하기 어렵다.
· 어떤 소수의 바로 다음 소수가 존재한다고 인식한다.

⇒ 자연수를 다루던 방식으로 소수를 다루어 생긴 장애이다.

⑤ 없는 수보다 작은 수인 '음수'를 받아들이는 부분에서 많은 갈등을 느끼며 특히 음수와 음수의 곱이 양수임에 대해 인식론적으로 장애를 일으킨다.

⇒ 음수는 양수와 대칭적인 의미를 부여하여 자연스럽게 사용되기 시작하였으며, 음수의 '상대적인' 특성이 음수의 수용에서 중요한 수단이 되었지만 음수의 존재성을 문제 삼게 됨으로써 장애가 발생되었다.

⑥ 미분계수의 기하적 의미를 확인하기 위해, 몇 개의 그래프를 주고 주어진 점 P에서 접선을 그리도록 한 결과 다음의 오류가 발생했다.



⇒ 과거에 배운 원에서의 접선에 익숙해져 '모든 접선은 곡선을 스치지만 곡선을 가로지르지 않으며 곡선의 한쪽 편에 있어야 한다'는 것으로 일반적인 접선을 인식하고 있기 때문이다.

4) 인식론적 장애에 대한 긍정적 시각과 수학 학습-지도

(1) 긍정적 시각

: 인식론적 장애는 새로운 지식의 구성을 방해하는 부정적인 측면이 있는 반면에 이를 깨닫게 되면서 그것을 토대로 새로운 방식으로의 앎이 시작되며 그 극복을 통해 보다 높은 수준의 이해가 가능해진다는 긍정적인 측면이 있다.

(2) 인식론적 장애와 수학 학습-지도

① 학교 수학과 관련된 인식론적 장애를 밝히고 이를 극복하는 방안에 대해 연구한다.

② 역사를 연구해서 개념의 발생에 대한 장애를 확인한 후에 학생들의 행동 속에서 대응하는 장애 지식의 흔적을 학생의 관점을 고려하면서 찾아본다.

[참고] 교수체계에서 나타나는 인지적 장애

① 개체 발생적 기원을 가진 장애: 개체의 각 발달기의 한계(특히, 신경생리학적인 한계) 때문에 생기는 장애이다.

② 교수학적 기원을 가진 장애: 교육체계 내에서의 어떤 선택이나 행위에 기인하는 듯이 보이는 장애들이다.

(예) 소수: ‘단위가 바뀐 자연수’, ‘소수점이 있는 자연수’, ‘측정수’와 관련 지어주고 연습으로 자동화시킴

③ 인식론적 기원을 가진 장애: 탐구되어야 할 지식에서의 그 형성적 역할 때문에 피할 수도 없고 피해서도 안 되는 장애이다.

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 형태주의 심리학자들이 강조하는 것은?

: 문제의 전체적인 구조 즉, 분리, 분류, 조직화 등의 사고 조작에 의해 문제의 내적인 관련성(=내적인 구조적 관계)을 파악해 가는 것을 강조하였다. 따라서 학생들은 구조적인 내적 관련성을 보는 통찰력을 가져야 한다.

(cf) 전통 논리학이나 연합주의 이론과는 근본적으로 다르다. 전통 논리학에서는 개념을 파악하고 판단을 하는 다수의 상황에서 공통 성질을 찾아내어 보편적인 원리를 확립하는 것에 주목하여 연합주의에서는 연결을 수립하기 위한 많은 문제에 대한 반복적 훈련이 특징이다.

2. 가네의 인지학습을 나열하면?

: 인지학습은 신호학습, 자극 반응 학습, 연합 학습, 언어적 연합 학습, 다중식별 학습, 개념 학습, 원리 학습, 문제해결학습이다.

3. 피아제의 반영적 추상화의 예는?

㉠ 구체적인 세기를 통한 덧셈 활동이 덧셈 알고리즘으로 공식화되는 과정

㉡ x를 $2x$로 대응시키는 활동이 함수 $y=2x$의 그래프 전체로 대상화(encapsulation)되는 과정

㉢ 다양한 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분이 밑변의 길이의 반이 되고 밑변과 평행하다는 점을 확인하여 '삼각형의 중점연결정리'에 대한 가설을 설정하는 활동

㉣ 원 모양으로 배열되어 있는 공깃돌을 시계 방향으로, 시계 반대 방향으로 각각 세어 본 후 결과가 같음을 확인하여 '세는 순서에 관계없이 개수는 일정하다.'고 인식하는 활동

4. 피아제의 반영적 추상화란?

: 활동과 조작에 대한 일반적 조정으로부터 이루어지는 추상화이다.

5. 피아제의 경험적 추상화란?

: 아동의 외부 대상이 갖는 성질들로부터 일반화된 지식을 이끌어내는 추상화이다.

6. 피아제의 의사경험적 추상화란?

: 아동의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 추상화이다. 이는 자신이 학인 할 수 있는 구성 결과에 근거하지 않고는 구성을 실행할 수 없는 전조작적 수준의 아동이나 구체적 조작 수준의 아동에게 확인되는 추상화이다.

7. 피아제의 반영적 추상화를 학생들이 경험하기 위해 교사가 해야 할 일은?

: 학습자의 인지 발달이나 개념의 발달은 인지적 불균형의 해소를 위한 동화와 조절의 균형화 과정에 의해 가능하므로 교사는 일시적 균형 상태에 있는 학습자의 인지 발달 수준보다 조금 더 높은 수준의 활동을 경험하게 해야 한다.

8. 피아제의 동화와 조절이란?

㉠ 환경에 적응한다는 것은 '동화'와 '조절'을 한다는 것이다.

㉡ 동화란 기존의 어떤 쉠을 고수하면서 가능한 한 넓은 범위의 상황을 그에 종속시키려고 시도하는 기능이다.

㉢ 조절이란 당면한 문제를 해결하기 위하여 자신의 쉠을 조절, 분화하는 기능이다.

9. 피아제의 입장에서 본 인지발달이란?

: 환경에 적응하는 과정에서 끊임없이 일어나는 인지적 균형의 파괴와, 동화 및 조절에 의한 새로운 균형화가 반복되는 쉠의 끊임없는 재구성 과정이 인지 발달이다.

10. 피아제가 구분한 추상화는?

: 피아제는 아동의 외부 대상이 갖는 성질로부터 일반화된 지식을 끌어내는 경험적 추상화, 아동의 활동에 대한 일반적 조정으로부터 이루어지는 반영적 추상화, 그리고 아동의 활동으로부터 구성이 이루어지지만 그 구성 결과의 확인은 외부 대상에 대해서 행해지는 의사경험적 추상화로 구분하였다.

11. 논리-수학적 개념과 반영적 추상화와의 관계는?

: 피아제는 논리-수학적 개념은 사물의 속성을 추상함으로써 얻어지는 것이 아니라 사물에 대한 인간의 행동을 추상하는 반영적 추상화에 의해 얻어진다고 주장하였다. 예를 들어, 아동이 사과를 어떤 모양으로 늘어놓고 어떤 순서로 세어 보아도 개수가 같다는 것을 발

견하였을 때, 아동은 논리-수학적 경험을 한 것이다. 이러한 성질은 사과 자체와는 무관한 것으로 아동은 자신의 활동과 그 결과에 대한 경험을 한 것이다. 이와 같은 경험으로부터 집합의 원소와 순서와는 관계없는, 원소의 개수라고 하는 개념을 추상하였을 때 아동은 '반영적 추상화'를 하였다고 본다.

12. 전조작적 수준의 아동이나 구체적 조작수준의 아동이 논리-수학적 개념을 학습하려면?

: 전조작적 수준의 아동이나 구체적 조작수준의 아동은 자신이 확인할 수 있는 구성 결과에 근거하지 않고는 구성을 실행할 수가 없다. 이 경우에 그 결과의 확인이 대상에 행해진다고 하는 점에서는 경험적 추상화와 관련된 것처럼 보이지만 확인된 성질은 주체의 활동에 의해서 그 대상에 도입된 것으로 아동은 '의사경험적 추상화'를 하였다고 본다.

13. 구체적 조작기 아이들의 특징은?

㉠ 여러 가지 특성이 있는 대상들을 구체적인 특성에 따라 집합과 부분집합으로 분류할 수 있으며, 한 대상의 여러 가지 특성을 동시에 생각할 수 있다.

㉡ 물질량, 수, 길이, 넓이 등의 여러 가지 보존 개념이 형성된다.

㉢ 다른 사람의 견해를 이해하기 시작하며, 이 단계의 말기에서는 구체적인 예를 통하여 귀납추론과 연역추론을 하기 시작한다.

㉣ 역연산, 대입, 집합의 합집합과 교집합 구하기, 구체물을 크기 순서로 배열하기 등과 같은 계산을 수행할 수 있다.

14. 피아제의 구체적 조작단계 아이들에게 부족한 부분은?

㉠ 판단과 논리적 추론 능력이 부족하다. 예를 들면, "영희는 순희보다 크다. 영희는 정희보다 작다. 세 사람 중 누가 제일 작은가?" 같은 문제를 잘 해결하지 못한다.

㉡ 정의를 잘 이해하지 못하며, 몇 개의 구체적 사실로부터 일반화를 할 수 없다. 예를 들면, 2+3=3+2, 8+11=11+8을 이해하면서도 이로부터 일반화된 교환법칙 $a+b=b+a$를 이끌어내지 못한다.

㉢ 변수를 포함한 수학적 기호 조작을 어려워하며, 대수를 의미의 이해를 통해서 보다는 공식의 암기에 의해 학습한다. 예를 들면, $(x+y)^2=x^2+y^2$, $\frac{a+b}{a}=b$, $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$라고 생각하는 경향이 있다.

15. 피아제의 형식적 조작단계 아동의 특징은?

㉠ 가설–연역적 추론이 가능하다. 즉, 추상적 사고가 가능하기 때문에 어떠한 형식의 가정이나 가설도 받아들일 수 있어, 어떤 문제에 직면할 때 가설을 설정하고 결론을 유도해 낼 수 있다.

㉡ 귀납적 사고, 연역적 사고, 함의적 사고(만일 …이면 …이다.) 등을 할 수 있다.

16. 스켐프의 수학적 개념의 이해는?

① 도구적 이해(instrumental understanding): 적당히 규칙을 기억하고 있으면서 그 규칙이 적용되는 이유를 모르고 그것을 문제해결에 적용할 수 있다.

② 관계적 이해(relational understanding): 무엇을 해야 하는지 그리고 왜 그런지를 알고, 일반적인 수학적 관계로부터 특정한 규칙이나 알고리즘을 끌어낼 수 있다.

17. 관계적 이해의 장점은?

: 관계적 이해를 하면(또는 반영적 지능에 의해 학습이 이루어지면) 새로운 지식을 접했을 때, 기존에 알고 있던 지식과 관련을 맺으면서 지식을 이해하고 범위를 확장시키는 것이 가능하므로 새로운 과제에 더 잘 적응하며 새로운 지식 학습에 자신감을 갖는다.

18. 관계적 이해의 단점은?

: 반영적 지능을 활용하여 새로운 지식을 관계적으로 이해할 때, 이 새로운 지식을 관련지을 사전 지식이 충분히 준비되어 있지 않거나 잘못된 지식을 소유하고 있다면 올바른 지식 형성이 불가능하게 된다.

19. 딘즈가 주장한 교수·학습 원리는?

㉠ 역동적 원리(dynamic principle)

: 수학적 개념에 구성되도록 실제적인 경험과 학습 상황을 "예비적인 게임 → 구조화된 게임 → 연습 게임"이라는 자연스러운 과정에 따라 조직되도록 해야 한다.

(예) 정적분 도입 전에 분할을 통해 도형의 넓이를 구한다.

㉡ 구성의 원리(constructive principle)

: 수학의 학습에서는 구성이 분석에 선행되어야 한다. 즉, 새로운 개념은 이미 알고 있는 개념으로부터 구성되도록 해야 하며 그 논리적 관계는 그 후에 분석될 수 있어야 한다.

(예) 공간 도형이나 그 단면을 종이로 만들어 보거나 그림으로 그려보는 활동이 선행되고,

이어서 그 성질의 분석이나 성질의 근거를 조사하는 학습이 이루어지는 것이 좋다.

㉢ 수학적 다양성의 원리(mathematical variability principle)

: 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화시켜서 (가능한 한 많은 경우를 다루는 경험 제공) 다양하게 제시해야 한다는 것이다.

(예) 평행사변형의 지도에서 변의 길이, 각, 위치 등 가변적인 요소는 여러 가지로 변화시킨 것을 보여줘야 한다.

(예) 유리수의 연산을 지도할 때, 정수, 유리수, 분수, 소수 등 다양한 수의 꼴을 포함시켜 연산을 경험시킨다.

㉣ 지각적 다양성의 원리(perceptual variability principle)

: 수학적 개념 형성에 있어서는 하나의 개념을 지각적으로는 다르지만 구조적으로는 동치인 다양한 구체적인 자료(평행사변형의 경우, 종이, 대나무 살, 고무줄 등으로 만든 것)로 제시해야 한다.

(예) 평행사변형을 지도할 때, 종이 위에 그릴 수도 있고, 두 개의 합동인 나무로 된 삼각형으로 만들 수도 있고, 점판 위에 표시할 수도 있고, 벽지의 패턴에서도 찾을 수 있다.

20. 딘즈가 주장한 원리를 활용하여 직육면체 개념을 지도한다면?

㉠ 역동적 원리: 아동들에게 직육면체 모양의 다양한 구체물을 이용하여 3단계의 놀이 경험을 제공할 필요가 있다.

㉡ 구성의 원리: 직육면체를 두고 성질을 분석하게 하는 활동보다는 쌓기 나무나 마분지에 그린 전개도 등을 이용하여 직육면체를 구성해 보는 경험을 먼저 제공할 필요가 있다.

㉢ 수학적 다양성의 원리: 직육면체를 이루는 변인 중에서 변화시킬 수 있는 것, 즉 밑면이 정사각형인 경우와 정사각형이 아닌 경우, 가로의 길이보다 높이가 큰 경우와 작은 경우의 직육면체 등 수학적으로 다양한 모양의 직육면체를 제공할 필요가 있다.

㉣ 지각적 다양성의 원리: 쌓기 나무로 만든 직육면체, 플라스틱 빨대를 연결하여 구성한 직육면체, 종이를 이용하여 만든 직육면체 등 지각적으로 다양한 소재를 이용하여 구성된 직육면체를 제시할 필요가 있다.

21. 브루너의 EIS 표현이란?

: EIS 표현이란 지식의 세 가지 표현 즉 행동적 표현, 영상적 표현 그리고 상징적 표현을 의미한다. 행동적 표현이란 아동이 자료를 직접 다루어 지식을 발견하고 정리하는 것이며, 영상적 표현이란 대상을 직접 다루는 것이 아니라 대상의 이미지를 다루어 정리하는

것이며 상징적 표현이란 개념, 원리, 법칙을 나타내는 문장이나 여러 가지 기호, 문자와 그 식을 다루어 지식을 정리하는 것이다.

22. 브루너가 구분한 수학과 학습-지도 이론은?

: 브루너는 수학과 학습-지도 이론으로 구성 이론, 기법 이론, 대조와 변화 이론 그리고 연결 이론을 소개하였다.

23. 오수벨의 수업 원리는?

㉠ 점진적 분화의 원리

: 학습할 새로운 개념이나 원리를 포함하는 가장 포괄적이고 일반적이며 설명력 있는 통합 개념과 원리를 먼저 제시하고 점차로 특수화되고 세분화되는 방안으로 교수 · 학습 지도를 조직화해야 한다.

(예1) 일반삼각형의 성질을 먼저 학습한 뒤 직각삼각형의 성질을 학습한다.

(예2) 함수를 먼저 정의한 뒤 일차함수를 학습한다.

㉡ 통합적 조정의 원리

: 새로운 학습내용과 이미 학습된 내용 사이에 유사성과 차이점을 분명하게 하여 새로운 학습내용이 인지구조 내에서 의식적으로 조정되고 명확히 분별되어 통합되어야 한다.

(예) 삼각함수의 정의를 새롭게 학습할 때, 이전에 배운 삼각비의 정의와 어떻게 유사하고 차이가 있는지를 충분히 식별하는 기회를 가져야 한다.

㉢ 선행조직자의 활용

: 새로운 내용을 학습할 경우 인지구조 내에 이미 확립된 배경적 아이디어를 고려한 적절한 수준의 일반성, 추상성, 포괄성을 갖는 개념을 먼저 제시해야 한다.

(예) 두 집합 사이의 일대일 대응을 지도하기에 앞서 '사다리 타기 게임'의 기회를 제공하여 일대일 대응의 아이디어를 미리 경험하는 기회를 제공한다.

24. 딘즈의 교수 · 학습 과정 6단계를 나열하면?

: 딘즈의 교수 · 학습 과정 6단계는 '자유 놀이-게임-공통성 탐구-표현-기호화-형식화'이다.

25. 라카토스는 수학적 지식의 성장과정 4단계는?

㉠ 1단계: 수학적 추측을 제기하는 단계

㉡ 2단계: 추측을 부분추측으로 분해하는 단계(사고실험)

㉢ 3단계: 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계
㉣ 4단계: 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계

26. 프로이덴탈의 이론에 근거한 수리철학은?
: 프로이덴탈은 전통적인 플라톤적인 관념(수학은 절대적으로 확실하고 객관적으로 존재하는 완전한 지식체계이며 상기, 곧 발견을 통해 알게 됨)을 수용하지 않고, 직관주의 수리철학적 입장(수학은 기본적인 직관을 바탕으로 일련의 정신적 활동에 의해 구성되어 감)을 그의 수학화 학습-지도론의 기초로 삼고 있다.

27. 프로이덴탈이 역사를 분석한 결과는?
: 수학적 개념, 구조, 아이디어 등의 본질(nooumenon)은 물리적, 사회적 정신적 세계의 현상(phainomena)을 조직하기 위한 수단으로 발견되었음을 확인하였다.

28. 수학적 개념, 수학적 구조 또는 수학적 아이디어의 현상학이란?
: 본질을 그 본질이 조직되는 어떤 현상과 관련지어 기술하는 것으로서, 조직화의 수단으로서의 본질이 어떤 현상을 조직하기 위해 만들어졌는지, 그리고 본질이 어디까지 확장될 수 있는지, 본질이 현상에 어떻게 작용하는지, 본질이 현상에 대해 어떠한 힘을 우리에게 부여하는지를 나타내는 것이다.

29. 프로이덴탈의 교수학적 현상학이란?
: 교수학적 현상학이란 수학적 개념과 구조라는 본질을 그 본질이 조직의 수단으로 작용하는 어떤 현상과 관련하여 기술하고 교수학적으로 적용하는 것이라고 할 수 있다.

30. 프로이덴탈의 수학화란?
: 현상이 그것을 정리하는 수단인 본질로 조직되는 과정이다.
(또는, 수학화란 수학자들이 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 경험을 체계화시켜 나가는 것을 의미한다.)

31. 수학화를 이용해 함수지도에 대하여 글을 쓴다면?
: "교사는 학생들이 익숙한 실생활 내용이나 초등학교에서 배웠던 내용을 학생들이 표나 식으로 나타내보도록 현상을 준비하고, 이 상황을 학생들이 표나 식으로 나타내면서 '…

값이 커짐에 따라 …값이 커지는 것 같다', '…작아지는 것 같다'거나 '…가 변함에 따라 …도 변한다고 보면 될 것 같다'는 등의 심상을 얻고 최종적으로 함수의 본질인 '변하는 두 양 x, y 사이에 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 정해지는 대응 관계'를 학생 스스로 재발명하고 있다."고 전개하면 된다.

32. 실행수학이란?

: 수학화 활동에 초점을 둔 수학을 실행수학이라 한다. 따라서 학생들이 학습해야 하는 수학은 수학화 활동으로서의 실행수학이다. (↔기성수학이란 수학적 활동의 결과로 보는 수학이다.)

33. 교수학적 현상학에 따른 A 내용 지도란?

: A 내용의 다양한 현상에 대한 직관적 경험을 제공하고, 학생들에게 그러한 현상에서 나타나는 A 내용의 특성을 인식하게 하고, 이를 좀 더 수학적으로 분석하여 좀 더 구체적인 특성을 파악하게 한 후 A 내용에 대한 여러 경험을 바탕으로 A 내용이 무엇인지에 대해 논의를 통해 적절한 A 내용 개념을 도입한다. 즉, 다양한 현상을 출발점으로 점차적으로 A 내용의 형식적 지도로 나아가는 방향을 생각해 볼 수 있다.

34. 구조주의적 관점에 따른 A 내용 지도란?

: 교사가 학생들에게 A 내용을 정의하고 이와 관련한 수학적 용어를 지도하고 A 내용의 특정한 예를 다루면서 응용문제를 푼다.

35. 반 힐레의 기하적 사고 5단계를 나열하면?

: 시각적 인식 수준, 분석적 인식 수준, 관계적/추상적 인식 수준, 형식적 연역 수준, 엄밀화 수준이다.

36. 반 힐레의 학습 단계는?

① 1단계 질의 안내 단계(Inquiry/Information): 자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙하기 위한 활동을 함으로써, 교사와 학생들이 학습목표를 확인하는 단계이다.

(예) 마름모는 무엇인가? 정사각형은? 평행사변형은? 어떻게 그들은 같은가? 정사각형은 마름모가 된다고 생각하는가?

② 2단계 안내된(제한된) 탐구단계(Directed Orientation): 제시된 자료를 통해 탐구 분야를 연구하면서 그 진행방향을 감지하고 탐구분야의 구조가 점진적으로 파악된다.

㉠ 교사가 제시하는 짧은 발문으로 이루어진 활동 자료를 보며, 학생들은 자기 나름대로 과제를 탐구한다.

㉡ 교사는 제시하는 자료를 학생들의 수준에 따라 다르게 제시한다.

(예) 모눈종이를 주면서 대각선이 같은 여러 크기의 마름모를 그리게 한다든지, 4개의 각이 같은 마름모를 그리게 한다.

③ 3단계 명료화 단계(Explication): 전 단계에서 경험하고 관찰한 사항에 대해 표현하는 활동을 통해 그를 명확히 하며 전문적인 용어를 학습한다. 이 때, 교사는 학생의 토론하는 활동만 지켜보고 어떤 설명도 하지 않는다.

(예) 모눈종이의 마름모의 활용에서 학생들은 자기가 한 활동에서 어떤 도형과 그 도형이 가지는 성질을 토론한다.

④ 4단계 자유로운 탐구 단계(Free Orientation): 많은 사고 단계가 들어 있는 과제를 제시하고, 여러 가지 해결방법을 찾아봄으로써 탐구분야의 구조에 정통하게 된다.

(예) 모눈종이를 활용하여 평행사변형, 마름모 사이의 성질을 비교해보고 마름모만의 성질을 정확히 경험하거나 컴퓨터 소프트웨어를 활용하여 마름모를 다양하게 경험하여 성질을 확인 및 경험한다.

⑤ 5단계 통합 단계(Integration): 탐구활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약의 일보 직전에 이르게 되므로 5단계가 끝나면 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

(예) 마름모의 성질이 학생들에 의하여 종합되며 평행사변형과 마름모 사이의 관계를 이해한다.

37. 교수학적 변환론이란?

㉠ '학문으로서의 수학', 즉 '학문적 지식'이 '교육의 대상으로서의 수학', 즉 '교수학적 지식'으로 변환되는 일련의 과정에 대한 연구이다. 여기서 '학문적 지식'은 전문 수학자가 연구 대상으로 삼는 '학문 수학'을 의미하며, '교수학적 지식'은 학교에서 교사와 학생이 교수·학습의 대상으로 삼는 '학교 수학'을 의미한다. 이 때, '교수학적 지식'은 교육과정 개발자, 교과서 저자, 교사가 대상으로 하는 '가르칠 지식'과 학생이 대상으로 하는 '학습된 지식(가르쳐진 지식)'으로 구분할 수 있다.

㉡ 학문적 지식은 교육 내용으로 재구성되기 이전의 지식을 의미하며, 가르칠 지식은 교육

내용으로 선정되어 재조직된 지식을 의미하며, 학습된 지식은 교육이 이루어진 후에 학습자에게 구성되어 있는 지식을 의미한다.

학문수학	→	가르칠 지식	→	학습된 지식
	학문적 지식 가운데 교육의 내용으로 선정되고 조직되는 과정 설명		교육 내용이 가르치는 활동에 의하여 어떻게 변화되는가를 확인	

38. 교수학적 변환론에서 주의해야 할 사항은?

㉠ 교수 체계가 삼원적 관계라는 것 즉, '교사'와 '학생' 그리고 '지식' 모두를 고려해야 한다.

㉡ 지식의 파손성을 주의해야 한다. 즉, 가르치려는 의도에 따라 지식이 변형될 때에도 지식의 의미가 상당히 손상될 수 있음에 주목해야 한다. 가르치기에 적합하도록 지식을 변형하는 동안 본래의 지식의 의미가 심각하게 왜곡된다면, 교육은 분명히 실패할 것이고 학생들에게 잘못된 지식을 소유하게 함으로써 그 다음 단계로 발전하는 데 치명적인 악 영향을 끼치게 될 것이다.

39. 극단적인 수학 교수 현상을 나열하면?

: 메타인지 이동, 형식적 고착, 토파즈 효과, 쥬르뎅 효과이다.

40. 메타인지 이동이란?

: 교사의 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식에 있는 것이 아니라 이를 교수하기 위한 모델에 있는 경우이다.

41. 형식적 고착이란?

: 공식화된 지식의 논리적 표현에만 의존하는 교수현상으로서 메타인지 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려는 시도로 일어난다.

42. 토파즈 효과란?

: 소위 교수학적 계약(didactical contract)에 의한 압박에서 일어나는 전형적인 현상으로 교사가 학생이 인지적 내용에 대한 학습을 할 수 있는 환경을 일소하는 것을 말한다.

43. 쥬르뎅 효과란?

: 토파즈 효과의 퇴행으로, 교사가 학생들의 행동이나 반응에서 특정한 과학적 지식이 형성되었음을 확인하는 듯이 행동하게 되는 경우를 말한다.

44. 인식론적 장애란?

: 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용하였던 지식으로 학생의 인지구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제상황이나 더 넓어진 문맥(또는 새로운 문제해결이나 개념 이해의 상황)에서는 부적합해진 지식이다.

45. 인식론적 장애의 원인은?

: 특별한 교수방법의 부족함 때문이 아니라 개념의 의미 그 자체(본성)에 기인한 것으로 일부의 사람들에게 한정된 것이 아니라 다른 문화권이나 다른 시대의 사람들에게도 발견된다. 따라서 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인한 것이므로 결코 피할 수 없는, 새로운 지식이 성장 발달하기 위해서는 반드시 극복해야 하는 장애이다.

46. 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인은 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유 등이다.

㉠ 일상어: '집합, 극한, 무한 등'이 일상어로 사용되지만 수학에서 사용될 때는 일상어와 똑같은 의미로 사용되지 않으므로 이러한 일상어가 새롭게 도입된 수학적 개념과 뒤섞여서 부적절한 개념 이미지를 형성하게 되어 수학 학습의 장애로 전환된다.

㉡ 직관: 무한 개념이나 극한 개념은 직관적으로 받아들이는 데 어려움이 있다.

㉢ 과도한 일반화: 유한에서 성립하는 성질이 무한과 극한에서도 성립한다고 할 경우 그렇지 못한 경우에 대해 인지적 장애가 발생한다.

㉣ 은유: 함수와 수열의 극한에서 '화살표', '수렴한다', '발산한다', '증가한다' 등과 같은 운동 은유로 인해 $\epsilon-\delta$식 정의를 이용해 엄밀하게 전개하기까지 오랜 시간이 걸린다.

47. 인식론적 장애를 극복하도록 도우려는 교사의 자세는?

: 수학의 역사적 발생과정에서 나타난 인식론적 장애가 학생들에게도 매우 유사하게 나타나고 있다고 하므로, 수학사에서 나타난 인식론적 장애를 분석하여 학생들이 부딪히는 장애를 찾아내고 그것을 극복하도록 도와줌으로써 수학 학습-지도를 개선할 수 있도록 하는데 도움이 될 것이다.

48. 인식론적 장애를 극복하기 위해?

: 학생은 인식론적 장애가 느껴지는 지식을 피할 것이 아니라 자신이 성공했던 지식과 새로운 상황에서 지식의 활용을 비교 분석하여 스스로 반성함으로써 자신의 지식을 조절하고 제어하는 능력을 개발시켜야 한다. 즉, 교사가 수정해주거나 고쳐줄 수 없다.

49. 인식론적 장애를 이용해 글을 쓸 때에는?

: "인식론적 장애란 (xx)에서 항상 성공적이고 유용하였던 지식이기에 (xx)를 학생이 확신하고 있지만, (yyy)와 같은 새로운 문제상황이나 더 넓어진 문맥에서 부적합해진 경우이다."라는 문장을 이용한다.

06

수학과 평가

1. 수학과 평가의 목적과 원리

1.1. 평가의 의미

평가란, 추진 성과를 목표에 비교 · 검토하고 그 결과를 모든 관계에 환류(feedback)시켜 보다 발전적인 계획의 수립 · 추진 · 결과를 낳게 하려는 일련의 활동이다.

① assessment

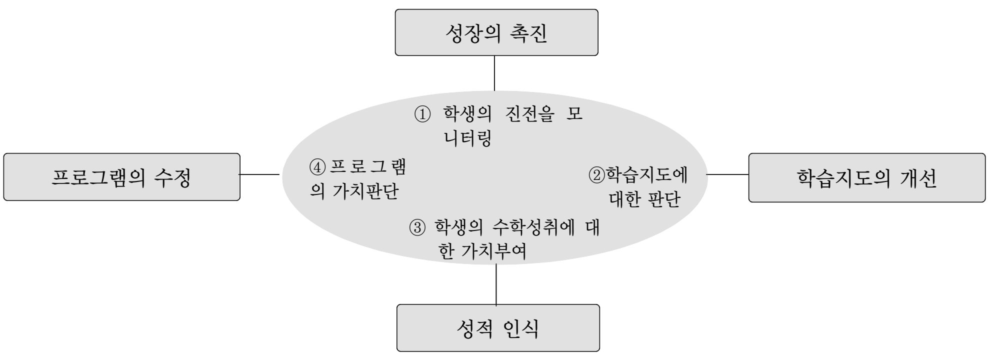
어떤 대상에 대한 학생들의 지식, 그것을 사용하는 능력, 그것에 대한 성향 등에 관한 증거를 수집하는 과정이며 다양한 목적을 위해 수집한 증거에서 추론하는 과정이다.

② evaluation

주의 깊은 검사와 판단에 의하여 어떤 것에 대한 가치를 부여하는 과정이다.

1.2. 수학과 평가의 목적

1) NCTM(1995)의 목적



① 학습목표에 대한 학생의 진전을 모니터링 한다.

② 학습지도의 판단을 내린다.

③ 어떤 시점에서 학생의 수학성취에 대한 가치를 부여한다.

④ 프로그램에 대한 가치판단을 한다.

2) 2015 개정 수학과 교육과정의 목적

수학과의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 수집 · 활용하여 학생의 수학 학습과 전인적 성장을 돕고 교사의 수업방법을 개선하는 것을 목적으로 한다.

1.3. 수학과 평가의 원리

1) 일관성의 원리

① 평가도구는 의도하는 평가 목표와 일치해야 한다.
② 수학교육의 목적 · 교육과정 · 학습목표가 잘 통합되는 하나의 수학 학습 기준을 마련하여 평가할 학습내용을 선정해야 한다.

2) 균형성의 원리

수학내용에 대한 지식, 문제해결능력 등 인지적인 영역과 창의력, 가치관, 태도 등 정의적인 영역의 조화가 필요하다.

① 문제해결에서의 아이디어 창출과 수학적인 의사표현력
② 수학적 과제를 꾸준히 수행하려는 의지력
③ 스스로 탐구하여 추론하는 능력 및 수학적인 사고력
④ 수학 학습에 대한 바람직한 가치관이나 관심, 흥미도

3) 다양성의 원리

① 평가내용의 성격과 목표에 따른 다양한 평가 방법을 이용한다.
② 타당도와 신뢰도를 갖춘 다양한 평가 방법을 개발한다.
③ 지필 고사 외 조별 활동, 관찰과 면담, 구술 고사, 프로젝트 결과 보고서 등을 다양하게 이용한다.
④ 오픈 엔드 어프로치(open and approach) 학습지도와 평가를 이용한다.
⑤ 다양한 조작물이나 컴퓨터를 사용하여 평가한다.

4) 유용성의 원리

수학과 평가활동을 통하여 학습자의 학습능력이나 학습상태를 파악하고 동시에 교사의 학습지도활동에 대한 평가가 이루어져 앞으로의 교수·학습방법의 '개선'을 위한 자료로 활용되며, 평가결과로부터 지도계획과 지도방법 등을 검정하고 진단할 수 있는 유용한 정보를 획득할 수 있다.

학습지도목표 설정 ➡ 진단평가 ➡ 학습지도계획 작성 ➡ 학습지도활동 ➡

형성평가 ➡ 학습지도활동 수정 ➡ 총괄평가 ➡ 학습지도방법 개선

5) 객관성의 원리

어떤 형태의 평가가 실시되어지든 평가의 객관성을 확보하기 위하여 문항 당 평가의 단계를 구체적으로 세분화시키며, 각 평가단계에서의 성취기준과 평가기준을 정확히 기술하고 이에 따라 채점기준을 미리 정하는 세부적인 준비가 요구된다.

2. 수학과 평가방향의 변화와 수행평가

2.1. 잘못된 평가방향

① 수학을 학습하는 것은 고정된 기본기능을 익히는 것이다. 따라서 수학평가는 학생이 이러한 기본기능을 익혔는가에 초점을 맞추어야 한다.
② 문제를 해결하고 응용하는 것은 기능을 숙달한 이후에 해야 한다.
③ 먼저 가르치고 나서 평가한다.
④ 학생은 모방과 암기를 통해서만 학습한다.
⑤ 수학문제의 답은 유일하다.
⑥ 선택형만이 수학적 수행능력의 타당하고 믿음직스러운 지표가 된다.
⑦ 평가의 목적은 어느 학생이 어떤 것을 알고, 또는 알지 못하는가를 결정하여 점수를 매기고 그에 따라 배치하기 위한 것이다.
⑧ 선택형은 수학의 중요 개념을 측정하기 위한 가장 좋은 방법이다.
⑨ 학급의 점수분포는 정규분포를 이루어야 한다.
⑩ 교실에서 교사만이 학생의 진전도를 정확하게 평가할 수 있다.
⑪ 대안적인 평가 방법은 전통적인 평가에 비해 객관적이지 못하고 단지 교육적인 책임을 회피하려는 최근 동향일 뿐이다.

2.2. 지향해야 할 평가방향

① 발달적 교육관을 중시한다.
㉠ 학생의 선발이나 개인차를 구분하기 위한 평가보다 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습방법을 배치하고 주어진 수업목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업목표 달성도를 평가한다.
㉡ 다양한 수준의 아동들이 그들 자신의 수준에서 문제해결을 조직할 수 있는 상황이 포함된 과제를 제시한다. 수학적으로 자신 있는 학생은 계속해서 탐구할 수 있는 문제가 제시되어야 하며, 수학적으로 덜 발달된 학생은 자신의 수준에서 문제해결의 일정 단계를 수행할 수 있는 상황이 포함된 과제를 제시한다.

② 문제해결과정을 중시한다.

㉠ 학생들의 수학적 사고능력, 문제해결력을 향상시키고, 학생 개개인이 지닌 사고과정의 결합을 확인하며 교사의 교육방법을 반성하는 기회를 갖기 위해 다양한 풀이과정과 방법을 평가한다.

㉡ 다양한 전략을 사용하여 문제를 풀 수 있는 상황을 포괄하는 과제, 학생들에게 새로운 수학을 창출하는 과제, 수학을 사용하고 응용하는 기회를 제공하고 학생들이 할 수 있는 것을 보여주는 과제를 제시한다.

③ 다양한 평가 방법을 수반한다.

㉠ 평가 방법이 반드시 지필일 필요가 없다. 교사가 말로 제시할 수 있고, 컴퓨터나 구체물을 통해 제시할 수 있으며 비디오테이프를 이용할 수도 있다.

㉡ 수학적 의사소통의 개념이 강조되는 평가 방법을 활용한다. 자신의 아이디어를 명확하게 제시하고 적절하게 표현하며 주어진 상황이나 아이디어를 합리적으로 비판할 수 있는지의 여부가 평가될 수 있는 과제를 제시한다.

㉢ 각 개개인이 혼자서 해결할 수 있는 상황뿐 아니라 소집단별로 동료들과 문제를 해결할 수 있는 능력이 있는지를 평가할 수 있는 탐구과제를 제시한다.

④ 정의적 영역능력을 평가한다.

㉠ 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 갖고 공부를 하며 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다.

㉡ 수업에 잠재적으로 이용될 수 있는 과제, 내용과 수업방법에 있어서 교사도 도움을 받을 수 있고 학생들도 자신감이나 나중의 수업에 대한 기대감을 높일 수 있는 과제 · 평가가 수업에 포함한다.

㉢ 학생들의 수학적 힘이 총체적으로 평가될 수 있는 과제를 제시한다.

2.3. 수행평가

① 수행평가(遂行評價: Performance Assessment)란 “평가자가 학습자들의 학습과제 수행과정 및 결과를 직접 관찰하고, 그 관찰 결과를 전문적으로 판단하는 평가방식”을 의미한다.

② 수행평가는 다음과 같은 특징을 갖는다.

㉠ 학생이 문제의 정답을 선택하는 것이 아니라, 자기 스스로 답을 작성(서술 혹은 구성)하거나 행동으로 나타낸다.

㉡ 추구하고자 하는 교육목표의 달성 여부를 가능한 한 실제 상황에서 파악한다.

㉢ 교수 · 학습의 결과뿐만 아니라 과정도 함께 중시한다.

㉣ 단편적인 영역에 대해 일회적으로 평가하기보다는, 학생 개개인의 변화 · 발달과정을 종합적으로 평가하기 위해 전체적이면서도 지속적으로 이루어지는 것을 강조한다.

㉤ 개개인을 단위로 해서 평가하기도 하지만, 집단에 대한 평가도 중시한다.

㉥ 학생의 학습과정을 진단하고 개별학습을 촉진하려는 노력을 중시한다.

㉦ 학생의 인지적인 영역(창의성이나 문제해결력 등 고등사고기능을 포함)뿐만 아니라, 학생 개개인의 행동발달상황이나 흥미 · 태도 등 정의적인 영역, 그리고 운동기능 영역에 대한 종합적이고 전인적인 평가를 중시한다.

㉧ 기억, 이해와 같은 단순사고능력보다는 창의, 비판, 종합과 같은 고등사고능력의 측정을 중시한다.

3. 수학과 평가의 종류

3.1. 2015 개정 수학과 교육과정의 '평가 방법'

① 수학과의 평가는 학습결과평가뿐만 아니라 과정중심평가도 실시하여 종합적인 수학 학습평가가 될 수 있게 한다.

② 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가를 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통해 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

③ 학생의 수학 학습과정과 결과는 지필평가, 프로젝트평가, 포트폴리오평가, 관찰평가, 면담평가, 구술평가, 자기평가, 동료평가 등의 다양한 평가 방법을 사용하여 양적 또는 질적으로 평가한다.

㉠ 지필평가는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력과 문제해결, 추론, 창의·융합, 의사소통능력 등을 평가하는데 활용할 수 있고, 선택형, 단답형, 서·논술형 등의 다양한 문항형태를 활용한다.

㉡ 프로젝트평가는 수학 학습을 토대로 특정한 주제나 과제에 대해서 자료를 수집하고 분석, 종합, 해결하는 과정과 결과를 평가하는 방법을, 문제해결, 창의·융합, 정보 처리 능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

㉢ 포트폴리오평가는 일정 기간 동안 수학 학습수행과 그 결과물을 평가하는 방법으로, 학생의 학습내용이해와 수학교과역량을 종합적으로 판단하고 학생의 성장에 대한 정보를 얻는데 활용할 수 있다.

㉣ 관찰평가, 면담평가, 구술평가는 학생 개인 및 소집단을 관찰, 학생과의 대화, 학생의 발표를 통해 학생의 이해 정도와 사고방법, 수행과정 등을 평가하는 방법으로, 의사소통, 태도 및 실천능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

㉤ 자기평가는 학생 스스로 자신의 이해와 수행을 평가하는 방법으로, 문제해결과 추론과정의 반성, 자신의 생각 표현, 태도 및 실천능력 등을 평가할 때 활용할 수 있다.

㉥ 동료평가는 동료 학생들이 상대방을 서로 평가하는 방법으로, 협력학습상황에서 학생 개개인의 역할 수행 정도나 집단 활동에 기여한 정도를 평가할 때 활용할 수 있다.

④ 평가내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다.

3.2. 수업전개 국면에 따른 평가

내용	진단평가	형성평가	총괄평가(등급결정)
기능	· 선행기능의 수준 결정 · 학습 전 성취수준 결정 · 교수방법 대책에 관련된 특성에 따른 학생의 분류 · 계속적 학습곤란의 원인결정	· 학습단위에 관련된 학생의 진보 상태를 교사, 학생에게 피드백 · 학습단위의 구조에 따른 오해의 확인 및 교정 그리고 교수방법의 대안 제시	· 학습단위, 학기, 학년의 말에 학생 성적의 판정 및 자격 부 여
실시시기	· 학습시초(학기, 학년의 시초에 배치를 위하여) · 교수 도중(정상수업으로는 학생이 계속해서 도움을 못 받을 경우)	· 수업이나 학습 진행 중	· 학습단위, 학기, 학년의 말
강조점	· 지적, 정의적, 심리운동적 행동 평가 · 신체적, 환경적, 심리적 요인 강조	· 지적행동평가	· 일반적으로 지적 행동 평가 · 교과에 따라 심리적 행동이나 때때로 정의적 행동평가
검사 도구의 형태	· 표준화 학력검사 · 표준화 진단검사 · 교사 제작의 평가도구, 관찰 및 체크리스트	· 학습목표에 맞게 특별히 고안된 형성평가도구	· 총괄평가도구
문항 난이도	· 선행기능 및 능력의 진단 : 대부분 쉬운 문항, 65%이상의 난이도	· 미리 구체화 할 수 없음	· 평균 난이도가 35~70%이고 대단히 쉬운 문항, 대단히 어려운 문항도 포함
채점	· 규준지향 및 목표지향 겸용	· 목표지향 · 준거지향	· 일반적으로 규준지향이나 준거 지향도 사용
점수처리 방법	· 하위기능별 개인 프로파일	· 학습위계에 포함된 각 과제에 대한 급락의 개인점수 유형	· 목표에 비추어 본 총점 혹은 하위점수
평가문항 유형	(학생 개인별 · 집단별) 관찰 구술평가 간단한 지필검사	(학생개인별 · 집단별) 관찰 구술 평가 간단한 지필검사 서술형 지필검사 학급발표 숙제 제시 수학 학습일지 작성 소집단 활동이나 프로젝트 제시	표준화된 성취도검사 포트폴리오

3.3. 지식 전개의 초점에 따른 평가

① 결과중심평가: 활동을 수반한 결과와 지식, 기능의 습득을 중요시하는 평가 방법은 비교적 객관적인 평가 방법이 많이 쓰이고 질적인 평가 방법보다는 양적인 평가 방법을 많이 쓰게 된다. 주로 사용되는 방법으로는 단답형검사, 선택형검사, 주관식 지필검사, 논술형검사 등이 있다.

② 과정중심평가: 활동의 결과보다는 그 과정을 중요시하고, 지식, 기능의 습득보다는 학생의 태도나 행동의 변화를 대상으로 하며, 이런 이유로 비교적 주관적인 평가 방법이 많이 쓰이고, 양적인 평가 방법보다는 질적인 평가 방법을 많이 쓰게 된다. 주로 사용되는 방법은 활동 상황의 관찰, 질문지를 이용한 조사, 학생의 작품과 기록 등이 있다.

3.4. 지식을 보는 관점에 따른 평가

1) 개념적 지식의 평가

① 개념을 나타내는 용어, 기호, 정의를 바르게 기억하고 있는지, 그 개념을 적절한 상황에 사용할 수 있는지 그리고 개념과 다른 개념들 사이의 관계성의 파악을 평가한다.

② 개념들 사이의 관계로 이루어진 수학적 일반성, 즉 수학적 법칙이나 원리가 성립하는 것을 추론하고 증명할 수 있는 능력도 평가한다.

③ 용어나 기호를 적절한 상황에서 사용할 수 있는지 평가하기 위해 선다형 또는 단답형 지필검사를 사용할 수 있다.

④ 개념들 사이의 관계 및 수학적 일반성의 증명능력을 평가하기 위해 서술식 지필검사가 유용하게 사용될 수 있다.

⑤ 개념적 지식의 평가를 위해 면담이나 관찰법도 적절히 사용할 수 있다.

⑥ 개념적 이해 평가의 채점기준(Kulm, 1994)

개념적 이해와 거리가 멀다	· 크게 잘못 이해함 · 개념을 표현하기 위한 용어, 그림, 기호를 거의 사용하지 않았음 · 관련된 수학적 절차에 대한 개념적 이해가 부족함
개념적 이해와 다소 거리가 있거나 잘못 이해한 증거가 있다	· 한 모드에서 다른 모드로 전환하기 위해 모델, 그림, 기호를 사용하여 개념을 표현하려고 시도하였음 · 수학적 절차는 적정하게 사용되었으나, 실수가 있으며, 개념적 이해가 약함을 보여줌
개념적 이해에 갭이나 오개념이 거의 없다	· 한 모드에서 다른 모드로 전환할 때에 모델, 그림, 기호를 정확하게 사용하였음 · 개념과 관련된 절차의 의미와 해석을 이해함
개념을 이해하고 사용한 증거가 있다	· 한 모드에서 다른 모드로 전환할 때 모델, 그림, 기호를 광범위하게 사용하였음 · 개념의 의미와 해석을 인식한 강한 증거가 있음

2) 절차적 지식의 평가

① 수학적 법칙이나 알고리즘을 단순히 암기하고 처리하는 기계적 처리기능과 그 절차의 타당성을 이해하고 있는지를 평가한다.

② 어떤 절차를 수행한 결과만을 평가할 것이 아니라 절차의 처리과정을 분석하고 오류의 배경을 파악할 수 있어야 한다.

③ 절차적 지식의 평가를 위해 지필검사, 관찰, 면담, 계산기나 컴퓨터의 활용 등 다양한 방법을 사용할 수 있다.

④ 절차적 지식평가의 채점의 기준(Kulm, 1994)

절차의 단계에 대한 이유를 알고 있는 증거가 거의 없음	연산과 절차를 잘못 사용하였거나 중요한 실수가 있음
절차를 설명하고 표현하는 능력이 어느 정도 있음	경미한 실수가 있으나 절차의 연산을 적절히 사용하였음
절차를 표현하고 그것이 어떻게 작용하는지를 설명할 수 있음	실수 없이 절차와 연산을 바르게 사용하였음
새로운 절차로 확장하거나, 새로운 절차를 수용하거나 창안할 수 있음	절차와 연산을 광범위하게 사용하여 절차의 각 단계에 대한 다른 설명과 이유를 보여줄 수 있음

3) 문제해결력 평가

① 문제해결력이란 문제 특히 비정형 문제를 이해하고 적절한 계획을 수립하여 바른 풀이를 구하며 그 결과의 타당성을 확인하고 확장하며 일반화하는 능력을 의미한다.

② 문제해결력의 발전된 의미는 주어진 문제의 해결능력뿐만 아니라 주어진 상황에서 적절한 문제를 구성하는 능력도 포함한다.

③ 문제해결력을 평가하기 위해 서술형 필답검사방법을 주로 사용하며, 서술형 필답검사는 풀이의 과정과 결과를 평가하기에 적절하다.

㉠ 분석적 채점법: 문제해결의 과정을 몇 개의 단계로 나누고 각 단계에 점수를 할당하여 이것을 기준으로 채점하고 점수를 부여하는 방법

문제의 이해	0 - 문제를 완전히 잘못 이해하였다 1 - 제의 일부를 잘못 이해하였거나 잘못 해석하였다 2 - 문제를 완전히 이해하였다
풀이 계획	0 - 계획을 시도하지 않거나, 완전히 틀렸다 1 - 문제의 일부를 바르게 해석하여 부분적으로 옳은 계획을 세웠다 2 - 바른 실행을 하면 옳은 답을 얻을 수 있는 계획을 세웠다
답 구하기	0 - 답이 옳거나, 부적절한 계획에 의하여 답이 틀렸다 1 - 기록 실수, 계산 실수, 또는 다수의 답 중 일부만 제시하였다 2 - 잘못된 계획으로부터 바른 논리를 따라 하여 답이 틀렸다 3 - 답이 옳으며, 적절한 라벨을 사용하였다

㉡ 총체적 채점법: 풀이 전체를 몇 개의 수준으로 나누고 각 수준에 도달하기 위한 구체적인 기준을 마련한 다음 학생의 풀이가 어느 수준에 속하는지를 평가하는 방법

0 - 아무것도 하지 않았음
1 - 문제해결을 시도하였음
2 - 아이디어는 옳으나 실행은 미약함
3 - 계산 실수를 제외하고는 거의 맞음
4 - 완벽함

④ 소집단별 문제해결을 평가한다.

(예) 소집단별 문제해결 → 결과를 평가하여 집단 구성원 각자에게 같은 점수 부여 → 유사 문제를 개별적 해결 및 평가 → 개별 점수를 소집단 점수와 합하여 각자의 점수로 결정

4) 수학적 의사소통능력 평가

① 수학적 의사소통능력은 수학적 지식을 발전시키고 활용하기 위해 탐구하고, 토론하고, 기술하고, 실제로 해 보는 활동을 의미한다.

② 수학적 아이디어들을 말로 표현할 수 있으며, 기록으로 표현할 수 있으며, 시각적으로 묘사할 수도 있어야 한다.

㉠ 말로 표현하기: 수학적 아이디어를 전화를 통하여 상대방이 이해할 수 있도록 적절하고도 정확하게 전달할 수 있는지를 평가한다.

㉡ 기록으로 표현하기: 수학적 아이디어를 다른 사람들이 이해할 수 있도록 글로 표현해 보게 한다. 또, 학생들의 수학 학습에 대하여 기록한 일지(수학 학습일지)를 분석함으로써 문장을 통한 수학적 의사소통능력을 평가할 수 있다.

③ 기록으로, 구술로, 또는 시각적 형태로 제시된 수학적 아이디어를 이해하고, 해석하고, 평가할 수 있어야 한다.

(예) 신문, TV, 영화 또는 인터넷 속의 무수히 많은 수학적 지식이나 정보를 찾아보게 하고 이들을 바르게 이해하고 있는지를 평가한다.

④ 수학적 아이디어를 표현하고 관련성을 기술하고 상황을 모델로 나타내기 위해 수학적 언어와 기호 및 구조를 사용할 수 있어야 한다.

㉠ 학습과제의 결과를 분석한다.

㉡ 학생들과 어떤 수학적 주제에 대해 면담하거나 학생의 수학적 활동을 관찰한다.

㉢ 학생들이 작성한 수학 학습일지(journal)[1]를 분석한다.

5) 수학적 성향의 평가

① 수학적 성향은 정의적 영역이며, 수학에 대한 전형적인 태도 및 감정 표현의 방식과 관련된 특성이다.

② 주관식 지필검사나 설문지조사보다는 관찰 및 면접법이 더 바람직하다.

㉠ 관찰 기록지(=일화 기록지): 각 학생에 대한 관찰 기록 카드를 만들고 적절한 수학적 성향을 보일 때마다 날짜와 구체적인 관찰 사실 등을 기록한다.

---

1) 수학 학습일지(Journal)란, 그 시간에 학습한 수학내용, 중요한 개념의 뜻과 표시 방법, 가정 학습 과제와 그 풀이 등을 나타낸 공책을 의미한다.

성명 ______________ 날짜 ______________ **일화기록지**		
학생이 경험한 수학적 성향	**날짜 및 활동내용**	**날짜 및 활동내용**
1. 자신감	10/29: 모든 숙제를 완벽하게 하였음	11/2: 소집단 활동에서 문제해결에 적극적으로 참여했음
2. 유연성		
3. 인내성		
4. 호기심		
5. 사고의 반성		
6. 수학응용의 가치인식		
7. 수학의 역할인식		

㉡ 체크리스트: 행으로는 학생의 이름을 열로는 수학적 성향의 요소를 기술한 관찰표를 만들고 관 찰된 결과를 해당하는 칸에 체크하는 방법이다.

성명 ______________ 날짜 ______________ **체크리스트**						
관찰한 활동		**학생 1**	**학생 2**	**학생 3**	**학생 4**	**…**
자신감	수학시간에 적극적이다		∨	∨		
유연성	수학적 문제를 다양하게 풀이하려한다	∨			∨	
인내성	시간이 오래 걸려도 주어진 문제를 끝까지 푼다					
호기심	새로운 문제 푸는 것을 좋아한다					
사고의 반성	문제풀이과정에 활용한 사고에 대해 설명한다					
수학응용의 가치인식	…					
수학역할인식	…					
기타	…		문제를 만듦			

㉢ 평정척도법: 행으로는 척도를 열로는 수학적 성향의 요소를 기술한 관찰기록표를 만들고 관찰된 결과를 해당하는 칸에 체크하는 방법이다.

성명 ________________ 날짜 ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭

관찰(면담) 요목		1	2	3	논평
자신감	수학시간에 적극적이다			∨	
유연성	수학적 문제를 다양하게 풀이하려 한다		∨		
인내성	시간이 오래 걸려도 주어진 문제를 끝까지 푼다.				
호기심	새로운 문제 푸는 것을 좋아한다				새로운 문제 만듦
사고의 반성	문제풀이과정에 활용한 사고에 대해 설명한다				
수학응용의 가치인식	…				
수학역할인식	…				

수학적 성향 및 사고력에 대한 평정척도

성명 ________________

관찰(면담) 요목		매우 그렇다	그렇다	모르겠다	그렇지 않다	전혀 그렇지 않다
흥미와 호기심	수학에 대해 상당히 흥미와 호기심을 가지고 있다					
	수학시간에 선생님의 말씀을 경청한다					
	수학문제 푸는 것을 좋아한다					
자신감 의지	수학문제를 자신 있게 푼다					
	어려운 수학문제도 두려워하지 않는다					
	문제풀이 결과에 자신 있어 한다					
과제 집착력과 끈기	시간이 오래 걸려도 주어진 문제를 끝까지 푼다					
	교사에게 질문하거나 친구에게 물어봄으로써 모르는 문제를 알려고 노력한다					
직관적 통찰	문제풀이의 결정적인 단서를 순간적으로 떠올린다					
	문제해결의 핵심적인 방법이나 전략을 구사하는 능력이 뛰어나다					
	문제를 이해하는 속도가 빠르다					
공간화	도형에 관한 문제 푸는 것을 좋아한다					
	도형의 변환이나 회전 등에 관련된 공간적사고능력이 뛰어나다					
추상화	수학적 문제 상황을 적당한 수학적 개념, 기호, 수식으로 표현하는 능력이 뛰어나다					
	주어진 문제를 풀 때, 그림이나 그래프를 이용하여 푼다					

6) 수학적 힘의 평가

① 수학적 힘을 평가하기 위해서는 문제해결력, 추론능력, 의사소통능력, 개념의 통합능력을 종합적으로 필요로 하는 과제를 제시하고 이를 소집단별로 또는 개인별로 해결하는 과정을 관찰, 기록, 분석한다.

㉠ 수학과 타교과목에 있는 문제들을 해결하기 위하여 수학적 지식을 응용하는 능력
㉡ 아이디어를 교환하기 위하여 수학적 아이디어를 사용할 수 있는 능력
㉢ 추론하고 해석할 수 있는 능력
㉣ 개념과 절차에 대한 지식과 이를 이해하는 능력
㉤ 수학에 대한 성향
㉥ 수학의 본질에 대한 이해

② 학생의 수학적 힘은 다양한 평가 방법을 활용하여 점검되어야 한다.

〈표〉 Kentucky 수학 총체적 채점표

수학적 능력		매우 약함	약함	강함	매우 강함
문제해결	· 문제의 특성을 이해하고 자기 자신의 언어로 재진술할 수 있다. · 문제의 구성을 탐색할 수 있다. 즉, 문제를 그림으로 나타내거나 표로 나타낼 수 있으며, 자료를 기록하고 패턴을 찾을 수 있다. · 적절한 문제해결전략을 선택할 수 있다. 흔히 사용되는 전략으로는 예상과 확인, 표 만들기, 그림 그리기, 단순화하기, 거꾸로 풀기, 식 세우기, 추론하기 등이 있다. · 해결계획을 실천하여 풀이를 구한다. · 풀이를 반성하고 수정하거나 일반화한다.				
추론	· 자료를 관찰하고 패턴을 인식함으로써 수학적 예측을 한다. 귀납적 추론. · 논리적 증명이나 반례를 통하여 수학적 예측을 검증한다. 연역적 추론.				
수학적 의사소통	· 적절한 수학적 기호나 용어를 사용한다. · 주어진 과제에 대한 질적인 설명을 한다. · 개념이나 아이디어를 분명하게 나타내고 들을 수 있다. · 다양한 수학적 표현을 할 수 있다.				
개념의 통합	· 풀이의 결과나 결론 또는 활동 등을 다른 측면에서 평가한다. · 창의적인 유추를 하거나 연결을 한다. · 수학적으로 중요한 개념들 사이의 연결을 인식하거나 응용한다. · 수학과 타교과목 및 실생활과의 연결을 인식하고 응용한다.				

4. 수학과 평가절차

1단계	**평가목적 설정**	· 어떤 목적으로 평가를 할 것인가' 결정 · 평가의 목적에 따라 평가내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선적으로 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 함
↓		
2단계	**평가영역 및 목표 선정**	· 평가목적에 따라 평가하고자하는 영역(이하 '평가영역'이라 칭함)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육목표가 무엇인지 확인 · 교육목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라, 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가영역의 교육목표를 설정하는 것임
↓		
3단계	**평가틀 개발 및 평가 방법선정**	· 균형 있는 평가도구개발을 위하여 평가틀 개발 · 평가영역의 교육목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동영역과 내용영역, 평가 목표, 평가문항유형 그리고 각 요소별 문항 출제비율 등을 포괄적으로 포함 · 평가하고자 하는 목적과 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정
↓		
4단계	**평가도구개발**	· 평가틀에 부합하는 평가도구개발 · 평가도구개발 시 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항 개발 · 모범답안 및 채점기준 개발
↓		
5단계	**평가실시**	
↓		
6단계	**채점 및 결과 보고**	· 평가실시 후, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정, 보완한 후 이를 참고로 실제적으로 채점 · 평가목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고

4.1. 평가목적설정

① 어떤 목적으로 평가를 할 것인가' 즉, 평가목적에 따라 평가내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라진다.

② 수업 전개 국면에 따라 '진단평가', '형성평가', '총괄평가'를 활용한다.

㉠ 진단평가: 학습목표를 성취하는 데에 필요한 선수학습의 정도와 기초 기능의 소유 여부 평가

[목적] 수업이 시작되는 시점에 학생의 준비 정도를 파악, 그에 상응하는 수업 전략 결정

[방법] 시험, 구두 질문, 관찰 등

㉡ 형성평가: 수업 중 학습목표의 성취 여부 평가

[목적] 지식의 재투입, 학습과정에서 교사와 학생 사이에 발생하는 오류나 곤란에 관한 정보를 피드백 · 교정 · 보상

[방법] 시험, 구도 질문, 고개의 끄덕임, 칭찬 등

㉢ 총괄평가: 학습성과가 어느 정도인지를 종합해 보는 평가

[목적] 학생의 점수를 판정하여 등급 제시, 자격을 부여, 보상 제공 및 한 집단과 다른 집단의 성취 결과 비교 · 분석

[방법] 여러 가지 자료로 활용

③ 진단평가와 형성평가는 그 평가결과를 수업 개선에 활용하여야 하며, 총괄평가는 보다 객관적인 평가 방법을 바탕으로 한 학기 또는 일 년 동안의 학습전체내용을 포괄해야 한다.

4.2. 평가영역 및 목표 선정

① 평가목적에 따라 평가하고자 하는 영역을 선정하고, 해당 영역의 주요 교육목표가 무엇인지를 확인한다.

② 평가 목표는 교사와 학생 모두가 기대하는 것이 무엇인지를 명확히 알 수 있도록 행동적 용어로 진술한다.

4.3. 평가틀 개발 및 평가 방법선정

1) 평가틀 개발

① 일관성을 유지하면서 효율적으로 평가하기 위해서 평가틀을 개발한다.

② 평가틀이란 평가도구개발 및 평가의 전 과정에서 평가의 방향과 평가 관련 항목을 선택 또는 결정할 때 판단의 준거가 되는 지침이다.

③ 평가영역의 교육목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동영역과 내용영역, 성취기준(performance standard, 평가 대상의 학생들이 해당 평가영역에서 성

취하기를 바라는 교육목표, 내지 내용을 보다 상세하고 구체적으로 진술한 형태), 평가에 활용될 문항유형, 그리고 각 요소별 문항출제비율을 포함한다.

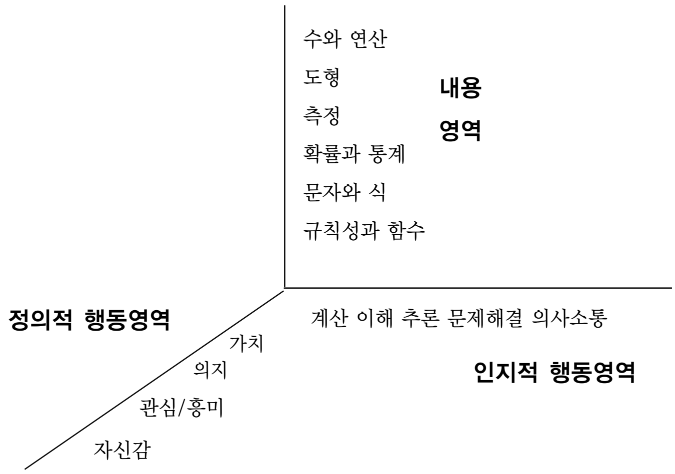
④ 평가틀의 예

㉠ 2차원의 평가틀

행동영역 / 내용영역		계산	이해	추론	문제해결	의사소통

행동영역	정의
계산	· 여러 가지 계산능력에 관한 것 · 문제해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	· 기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성의 이해를 바탕으로 유의미한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	· 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력 · 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제해결	· 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 · 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합교과적인(수학 외적) 소재의 응용문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것
의사소통	· 계산, 개념, 추론 또는 문제해결영역에 관한 문제를 해결하는 상황에서 주어진 문제상황과 관련된 수학적 내용을 토대로 수학적 용어, 기호, 문장 등을 이용하여 그 해결과정의 근거 및 이유를 표현할 수 있는 능력에 관한 것

㉡ 3차원의 평가틀



2) 평가 방법선정

평가영역	평가 방법		주체자	기록법
인지적	선택형검사		학생	답안지
	서답형검사	단답형	학생	답안지
		서술형	학생	답안지
	프로젝트	예상답안작성	학생	답안지
정의적		학생자기평가	학생	자기평가기록지
	관찰 · 면담		교사	일화기록법 평정척도법 체트리스트
인지 · 정의적	포트폴리오		학생	기록지 모음

(1) 지필검사(선택형, 서술형 검사 포함)

① 학생들에게 일련의 문제를 제시하고 종이와 펜을 이용하여 응답하게 하는 검사이다.

② 학생들이 중요한 수학적 개념과 기능을 얼마나 습득하고 있는지를 평가할 수 있다.

③ 단순한 기억이나 암기력 평가가 되지 않도록 주의하며, 가능한 한 사고력 중심의 문항

을 통해 수학적 개념과 기능의 습득 정도를 평가하도록 한다.

④ 서술형 문항의 채점기준은 '문제이해', '문제해결과정', '답구하기' 등의 과정이 반영된 채점요소에 따라 작성하는 것을 선호한다(분석적 채점기준법).

〈표〉 서술형 문항의 채점기준표

채점영역	채점요소	배 점
문제이해	… ①	
해결과정	… ②	
	… ③	
	… ④	
답구하기	… ⑤	
총 점		

㉠ 평가목적

ⓐ 학생들의 강점과 약점을 파악하기 위해 사용한다.

ⓑ 특정 기능을 잘 습득했는지 평가하기 위해 사용한다.

ⓒ 제한된 인원의 학생을 선발하거나, 자격증 인증을 위하여 사용한다.

ⓓ 교육적 성취기준을 도달하였는지를 확인하기 위해 사용한다.

㉡ 종류로는 선택형(진위형, 배합형, 선다형), 서답형(완성형, 단답형, 논술형), 탐구형, 빈칸 채우기형, 리커르트 척도, 자기보고 등을 포함한다.

ⓐ 빈칸 채우기형: 학생들로 하여금 텍스트의 빈 부분을 채우게 하는 방법이다. 예전에는 텍스트의 첫 부분에 상황을 설정하여 그 부분은 도입 부분으로 두고, 뒷부분에서 특별한 단어나 구를 제거하여 의미론적인 구조에 대한 평가를 자주 실시하였으나 요즘에는 지식이나 내용에 대한 이해에 대한 정도를 평가하기 위해 특별한 단어나 혹은 숙어를 제거하기도 한다.

ⓑ 연결형: 대개 어떤 개념과 그것을 설명한 목록으로 구성되는데, 학생들이 지시문을 읽고 이 두 개의 목록에서 관련되는 항목끼리 연결하게 된다. 일반적으로 연결형 문항은 지 식 기억, 관련성 파악 등의 능력을 평가하는데 유용하다.

ⓒ 선택형: 몇 개의 선택지 중에서 답을 고르도록 하는 문항 형식으로서 사실적 지식이

나 글에 대한 내용 이해를 주로 평가한다. 그러나 복잡한 추론능력이나 이해능력을 평가하기 위한 목적으로도 쓰인다.

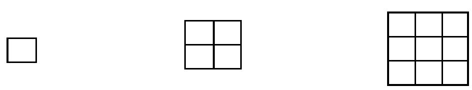
[주의] 학생이 답을 고르는 과정에서 추측이 개입될 수 있으므로 주의한다. 또한 문항이 제작되는 과정에 이미 답이 결정되어 있으므로 채점자가 학생의 답안을 보고 판단할 수 없다는 것도 단점으로 지적된다.

ⓓ 단답형: 학생들이 짧은 응답을 하도록 요구하는 문항 형태이다. 단답형의 유형은 크게 '폐쇄형 과 자유반응형'으로 나눌 수 있는데, 폐쇄형은 단지 하나의 답만을 허용하는 반면, 자유반응형은 정답이 하나 이상 존재한다. 단답형은 주로 사실적 지식과 개념을 어느 정도 이해했는지를 평가하는데 쓰인다.

ⓔ 논술형: 주어진 주제에 대해 학생들이 길게 응답하게 하는 형식으로, 깊이 생각하여 내용을 구성하는 능력을 평가하고자 할 때 사용한다. 예컨대, 논쟁을 논리적으로 구성하거나 혹은 문제에 대한 해결방안에 대한 제시 등이 여기에 해당한다. 논술형은 '간단 하게 설명하라','세 가지 방법으로 설명하라' 등과 같은 폐쇄형과 학생들이 자유롭게 응답할 수 있는 자유반응형으로 구분해 볼 수 있다.

ⓕ 탐구형: 익숙한 개념과 기능을 익숙하지 않은 상황에 적용하는 능력을 평가하는 자유반응형 과제이다. 내용을 토대로 결론을 끌어내어 보고서로 작성하는 것이 여기에 해당하는데 수학적 이해, 문제해결능력, 수학적 언어의 사용 등을 평가하는데 활용할 수 있다.

(예) 다음 그림을 이용하여 질문을 해결해 보세요.



–어떤 유형을 발견할 수 있습니까?

–위의 사각형을 이용하여 다른 유형의 모양을 만들어 보시오.

구분	선택형 문항	서답형 문항(주로 논문형)
주요 특징	· 수험자가 여러 답 중에서 선택하는 것이 대부분이다 · 문제 수가 많고 통계적 의미의 검사신뢰도가 높다 · 수험자가 문제를 읽고 생각하는데 대부분의 시간을 보낸다(읽는데 관계되는 기능의 영향을 받는다) · 검사의 질적 수준은 검사 제작자의 수준에 의존한다 · 출제 과정이 어렵고 지루한 반면 채점하기가 다소 쉽다 · 문항 제작자는 출제 과정 중에서 표현의 자유가 많으나, 채점자가 답안을 채점하는데는 자유가 거의 없다 · 수험자의 응답 방향과 응답 기준이 명료하다 · 정답을 모를 때 추측할 가능성이 매우 크다 · 전체 집단의 점수분포가 거의 전적으로 검사 자체에 의해 결정된다	· 수험자가 답안을 직접 계획하여 작성하고 자신의 말로 표현한다 · 문제 수가 적고 상당히 광범위한 대답을 요구한다 · 수험자가 답을 생각하고 쓰는 데 대부분의 시간을 보낸다(답안을 쓰는 데 필요한 기능이 요구된다) · 검사의 질적 수준은 주로 채점자의 수준에 달려 있다 · 출제가 비교적 쉬운 반면 정확하게 채점하는 것은 다소 어렵고 지루하다 · 수험자는 표현의 자유가 많고, 채점자는 답안 채점의 자유가 많다 · 응답 방향과 응답 기준이 불명료한 편이다 · 그럴듯한 표현으로 채점자를 혼란시킬 가능성이 많다 · 전체 집단의 점수분포가 채점자에 의해서 상당히 임의적으로 조정될 수 있다(채점 시 '표준의 오류'를 범할 가능성이 크다)

(2) 프로젝트

① 일정 기간 동안 교과 내 또는 범교과 영역에서 학습자의 능력이나 흥미에 따라 연구 주제를 선택하여 그 주제에 대해서 자기 나름의 자료를 수집하고 분석, 종합하여 보고서를 작성하거나 발표하는 수행평가의 한 방법이다.

② 연구 주제와 범위에 따라 개인연구를 계획할 수도 있고, 소집단을 구성하여 공동연구를 수행할 수도 있다.

③ 교사는 학생이 제출한 연구계획서에 따라 진행 상황을 수시로 점검하고 지도하며, 결과를 발표할 수 있는 기회를 주어 학생 간에 서로 피드백을 주고받을 수 있도록 지도할 수 있다.

④ 프로젝트 작업은 주로 자료를 탐구하는데 활용되므로 탐구력을 강조하며 다른 사람과의 협동이 필수적이다.

⑤ 프로젝트 평가의 특징

㉠ 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

㉡ 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고, 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고능력을 신장시킬 수 있다.

㉢ 프로젝트는 소그룹의 협동학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에(말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통능력을 신장시킬 수 있다.

⑥ 프로젝트가 갖추어야 할 특징

㉠ 창의적이어야 한다. 창의적으로 모든 가능성을 검증할 것, 특히 가설 설정, 실험 설계, 모델 설정을 하고 이를 다른 상황에 적용하는 등 일련의 탐구과정과 문제해결과정이 독창적이어야 한다.

㉡ 체계적이어야 한다. 학생들은 작업을 계획하고 실행하는데 있어서 주의 깊고, 조직적이고, 논리적이어야 한다. 주어진 문제를 깊이 생각하여 어떠한 전략을 사용하고 어떻게 접근할 것인지 결정하여야 한다.

㉢ 여러 도구를 이용하여야 한다. 실험실 장비, 측정 도구, 도표, 그래프, 차트, 컴퓨터 등 여러 도구를 적절하게 사용할 수 있어야 한다.

(3) 관찰 및 면담

① 관찰의 특징

㉠ 관찰은 수학적인 수행능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있다.

㉡ 관찰은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있으며, 관찰 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다.

㉢ 관찰은 개인, 소집단, 학급 등을 대상으로 정규수업시간 중에도 자연스럽게 이루어질 수 있으며, 다른 평가기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

② 면담의 특징

㉠ 면담은 지필검사나 관찰과 더불어 학생들과 직접 대화함으로써 문제해결상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의'결과'를 도출해 내기까지의 사고'과정'에 대한 통찰을 가능하게 한다.

㉡ 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있

고, 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가목적에 부합하는 정보를 얻을 수 있다.

(4) 자기평가 및 동료평가

① 자기 평가(self-evaluation): 특정 주제나 교수 · 학습영역에 대하여 자기 스스로 학습 과정이나 학습결과를 평가한다. 학생 스스로 반성적 평가문을 작성하는 '학생자율평가'라고도 한다. 이때, 학생 스스로 자신을 평가할 수 있도록 기록지를 제공한다.

학생자율평가 기록지	
주제(문제)	
해설(풀이)	
반성 및 소감	
자기평가	아주 못함( ) 못한 편임( ) 잘한 편임( ) 아주 잘함( )
교사 논평	

② 동료 평가(peer-evaluation): 동료 학생들이 상대방을 서로 평가한다.

③ 자기평가 및 동료평가의 종류

㉠ 수업활동 중심의 자율평가: 수업시간에 공부한 내용 또는 문제 중에서 이해하기 어려웠거나 의외로 쉽게 이해하게 된 내용, 새롭게 경험한 내용, 흥미를 유발한 내용 등을 중심으로 진행한다.

㉡ 과제 중심의 자율평가: 교사가 문제를 주고 풀게 하거나 주제만 제시하여 학생 스스로 문제를 만들어 풀게 하여 진행한다.

(5) 포트폴리오

① 포트폴리오(portfolio)란 자신이 만든 작품을 지속적으로 모아 둔 작품집을 이용한 평가 방법이다.

② 학생 자신이 학습한 내용을 스스로 반성한 내용, 학습내용에 있어서의 향상 결과, 또는 학습자의 학습성향의 장단점을 나타내는 학습자 자료 등의 총괄된 수집물로 학생들의 진전된 수행기록의 모둠이다.

③ 포트폴리오의 특징

㉠ 수학 학습에 있어서의 자기 자신의 수학적 능력의 변화과정을 알 수 있다.

㉡ 자신의 문제 풀이에 있어서의 장점이나 약점, 성실성 여부, 잠재 가능성 등을 스스로 인식할 수 있다.

㉢ 교사들은 학생들의 과거와 현재의 상태를 쉽게 파악할 수 있다.

㉣ 앞으로의 발전 방향에 대한 조언을 할 수 있다.

④ 포트폴리오 내용표

포트폴리오 목차

이름 : ________________

______학년 _____반 ___번

주제	완성한 날짜	평가상황 및 평가내용	비고
1. 학년 초 과제 선정		· 과제 선정 이유 – 과제 수행 및 방법의 서술 – 자기평가문	0-5%
2. 수업내용에 관한 형성평가		· 수업 중 – 틀린 문항 풀기 – 자기평가 및 반성	0-5%
3. 1학기 중간고사		· 중간고사 기간 중 – 시험지 제출 – 틀린 문항 풀기 – 자기평가 및 반성	0-10%
4. 1학기 기말고사		· 기말 시험기간 중 – 틀린 문항 풀기 – 틀린 개수/푼 문항의 수 · 평가 시 틀린 이유 및 반성	0-10%
5. 학기말 프로젝트 (연구보고서)		· 과제 수행에 대한 절차 및 결과 – 자기평가문 – 자기평가점수 기입	0-60%
6. 교사의 논평			10-60%

4.4. 평가도구(문항)개발

① 평가문항출제와 함께 문항에 대한 모범답안 및 채점기준이 개발되어야 한다.

평가영역별로 적합한 평가 방법선정	↔	구체적인 평가문항개발	↔	모범답안 작성	↔	채점기준표 작성

[문항] 어떤 공장에서 제품 A, B를 P, Q 두 팀으로 나누어 생산하고 있다. 이때 제품 A, B를 각각 톤 생산하는 데 필요한 시간과 제품에서 얻는 이익은 아래표와 같다.

제품			이익
	P팀	Q팀	
A	2시간	2시간	30만원
B	1시간	3시간	20만원

하루에 일하는 시간이 P팀은 8시간, Q팀은 12시간을 초과할 수 없다고 할 때, 이 공장에서 하루에 제품 A, B를 생산하여 얻을 수 있는 최대이익은 얼마인지 구하여라. 풀이과정과 답을 쓰시오. [10점]

[문항 정보]

평가 목표	행동영역			
부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.	계산	이해	추론	문제해결

[채점기준]

채점요소	배점
문제상황을 연립부등식으로 나타낸다.	2점
연립부등식이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.	3점
하루 이익이 최대인 경우를 찾는다.	3점
최대 이익(130만원)을 구한다.	2점

② 채점법(=채점기준표)는 크게 분석적 채점법과 총체적 채점법으로 구분된다.

㉠ 채점기준표란 학생들이 수행한 것들을 채점하고 등급을 매기는데 이용하기 위해서 설정한 일련의 기준들이다. 각 성취의 규준에 도달하기 위해서 학생들이 어느 정도 수준의 수행을 해야만 하는지를 설명하는 것이다.

㉡ 채점기준표는 관찰 가능한 구체적인 수행의 특징들을 기술함으로서 부정확한 채점의 가능성을 줄일 수 있고 학생들 스스로 자신이 성취한 척도의 수준을 확인하고 어떻게 자신의 수행을 향상시킬 것인지에 대해서도 알게 된다.

㉢ 평가로 선발이나 배치를 하거나 순위를 정하거나 많은 대상자를 평가하는 경우에는 총체적(holistic) 채점법이 사용된다.

㉣ 개인 또는 집단의 진단이나 숙련 정도를 파악하는 경우에는 분석적(analytic) 채점법이 사용된다.

[총체적 채점법 예1]

<table>
<tr><th rowspan="2">채점기준</th><th colspan="2">배점</th></tr>
<tr><th>4점</th><th>5점</th></tr>
<tr><td>백지 상태</td><td rowspan="3">0점</td><td rowspan="2">0점</td></tr>
<tr><td>오답 이외에 아무 것도 제시하지 않는 경우</td></tr>
<tr><td>문제의 조건만 단순히 옮겨 놓은 경우</td><td rowspan="2">1점</td></tr>
<tr><td>풀이과정의 일부를 제시했으나, 그 과정도 틀린 경우</td><td rowspan="3">1점</td></tr>
<tr><td>문제를 이해한 듯하나, 풀기 시작한 상태에서 멈춘 경우</td><td rowspan="2">2점</td></tr>
<tr><td>풀이과정과 답이 모두 틀린 경우</td></tr>
<tr><td>정답만 제시한 경우</td><td rowspan="3">2점</td><td rowspan="3">3점</td></tr>
<tr><td>정답을 제시했으나, 풀이과정이 틀린 경우</td></tr>
<tr><td>풀이과정은 옳지만, 답을 제시하지 않은 경우</td></tr>
<tr><td>풀이과정은 옳지만, 문제의 조건에 맞지 않은 답을 한 경우</td><td rowspan="2">3점</td><td rowspan="2">4점</td></tr>
<tr><td>풀이과정은 옳지만, 계산상의 오류로 오답을 한 경우</td></tr>
<tr><td>풀이과정과 답의 숫자는 옳으나, 단위가 없거나 잘못 쓴 경우</td><td rowspan="2">4점</td><td rowspan="2">5점</td></tr>
<tr><td>풀이과정과 답이 모두 옳은 경우</td></tr>
</table>

[총체적 채점법 예2] 성숙한 토끼 한 쌍은 한 달이 지나면 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼 한 쌍은 2개월 후부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳기 시작한다고 한다. 1월 1일에 성숙한 토끼 한 쌍을 사서 기르기 시작하면, n 개월 후에는 몇 쌍의 토끼가 있게 되는가? (단, 토끼들은 죽지 않는다고 가정한다)

[채점기준]
1점 - 문제이해부족, 부정확한 수학적 표현
2점 - 그럴듯한 추론, 관찰을 수반한 풀이
3점 - 명확한 추론, 풀이과정의 경미한 실수
4점 - 명확한 추론, 바른 답

[분석적 채점법 예1] A중학교의 작년의 학생 수는 1050명이고, 금년은 작년보다 남학생은 4% 증가하고, 여학생은 2% 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남 · 여 학생 수를 각각 구하여라(10점).

[문제 풀이와 답안]

작년의 남학생 수를 x, 여학생 수를 y라 하면

$$x+y=1050 \quad \frac{4x}{100}-\frac{2y}{100}=9 \quad \therefore x=500,\ y=550$$

따라서, 금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times 500=520$(명)

금년의 여학생의 수 : $550-\frac{2}{100}\times 550=539$(명)

[채점 기준 - 10점 만점]

채점영역	채점요소	배점
문제이해	작년의 남학생 수를 x … ① 작년의 여학생 수를 y … ②	① 1점 ② 1점
계획실행	$x+y=1050$ … ③ $\frac{4x}{100}-\frac{2y}{100}=9$ … ④ $\therefore x=500,\ y=550$ … ⑤, ⑥	③ 1점 ④ 1점 ⑤ 1점 ⑥ 1점
답구하기	금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times 500=520$(명) … ⑦ 금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times 550=539$(명) … ⑧	⑦ 2점 ⑧ 2점
총점		총 10점

[분석적 채점법 예2] 조건 p, q, r, s에 대하여 (p 또는 q) $\Rightarrow r$, $\sim p \Rightarrow \sim s$가 성립한다고 할 때, r은 s이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

[풀이 및 정답]

(p 또는 q) $\Rightarrow r$ 로부터 $p \Rightarrow r$ 이고 $q \Rightarrow r$ 이다.

한편, 참인 명제의 대우는 반드시 참이므로, $\sim p \;\Rightarrow\; \sim s$ 에서 $s \;\Rightarrow\; p$이다.

$s \;\Rightarrow\; p$, $p \;\Rightarrow\; r$ 로부터 삼단논법에 의해 $s \;\Rightarrow\; r$ 이다.

따라서 r 은 s 이기 위한 필요조건이다.

[채점기준]

채점영역	채점요소	배점
문제이해	$p \Rightarrow r$ 이고 $q \Rightarrow r$ 임을 알기 … ①	
해결과정	참인 명제의 대우는 참임을 알고 대우 구하기 $\sim p \;\Rightarrow\; \sim s$ 에서 $s \;\Rightarrow\; p$ … ②	
	삼단 논법 알기 $s \;\Rightarrow\; p$, $p \;\Rightarrow\; r$ $\therefore s \;\Rightarrow\; r$ … ③	
답구하기	r 은 s 이기 위한 필요조건임을 구하기 … ④	
총 점		

〈총체적 채점법과 분석적 채점법 비교표〉

	전체적(총체적, holistic) 채점법	분석적(analytic) 채점법
특징	· 학생의 활동을 전체적으로 보았을 때의 종합적인 인상을 바탕으로 채점한다. · 문제를 해결하는데 필요한 특정 사고과정에 관한 기준에 따라 문제풀이 전체에 점수를 부여한다. · 학생이 문제를 해결한 것에 대하여 하나의 수치를 만들어 내는 것으로 대규모의 평가에서처럼 비교적 빠르면서도 일관된 채점 방법이 요구될 때 이용된다.	· 각 학생들의 활동에서 서로 다른 특징과 측면에 대해서 따로 채점한다. · 문제풀이과정을 몇 단계의 영역으로 나누고 각 단계(영역)에 점수를 할당하여 이것을 기준으로 채점한다. · 전체적인 채점법보다 더 많은 시간이 소요되지만 더 자세한 정보를 제공한다. · 진단평가나 학생들의 강점과 약점에 대한 구체적인 피드백이 필요할 때 이용된다.
장점	· 학생들의 답안에 대하여 비교적 신속한 평가를 할 수 있다. · 해답뿐만 아니라 풀이과정을 중시할 수 있다. · 답안을 채점하는 구체적인 기준을 제공한다. · 학생들의 수행에 대하여 하나의 수치를 만들어 낸다.	· 단순한 답이 아닌, 문제해결의 여러 과정을 고려할 수 있다. · 학생들의 답에 대하여 점수를 배정하는 수단을 제고할 수 있다. · 교사가 특정한 영역에 있어서의 학생들의 강점과 약점을 지적하는데 유익하다. · 다양한 지도 활동의 효율성에 대하여 구체적인 정보를 준다. · 등급을 구성하는 범주에 대하여 차별화된 가중치를 줄 수 있다.

단점	· 학생의 특정한 장점이나 단점을 날카롭게 지적할 수 없다. · 일부 학생의 답안은 사고과정에 대하여 충분한 정보를 주지 못하기 때문에 교사가 확신을 가지고 채점을 할 수 없다. · 문제해결을 위한 사고과정에 대하여 다른 가중치를 적용할 수 없다.	· 어떠한 경우에는 학생의 답이 개개인의 사고과정에 대하여 충분한 정보를 주지 못하므로 교사가 확신을 가 지 고 한두 개의 범주에 대하여 점수를 배정할 수 없다. · 학생들의 점수가 조심스럽게 비교되어야 한다. · 학생 개개인의 문제풀이 답지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는데 많은 시간이 든다(교사의 정신적 스트레스).

③ 평가문항을 개발할 때 다음에 유의해야 한다.

㉠ 학생들이 이해하는 언어를 사용한 명쾌하고 단순한 문장을 사용한다. 이때, 복잡한 문장은 두 개 또는 그 이상의 분리된 문장으로 쪼갠다.

㉡ 목표를 분명히 할 수 있는 문항을 개발한다. 중요하지 않은 세부적 상황이나 관련되지 않은 정보 또는 부적절한 자료를 평가하지 않도록 해야 한다.

㉢ 평가문항에 부적절한 단서나 불필요하거나 비기능적인 단서가 포함되지 않도록 개발한다.

㉣ 문항 속에 포함된 지시사항은 학생들에게 명확하고, 간결하고, 완전하게 만들어 제시한다.

㉤ 평가문항 배열 시 학생들에게 쉽고 단순하며 분명한 문장의 문항을 먼저 제시하고 어렵고 복잡하며 난해한 문장의 문항을 뒤에 배열한다(단, 쉬운 문항과 어려운 문항을 섞을 수도 있다).

㉥ 선택형 문항 배열시 정답이 규칙적인 패턴을 나타내지 않도록 배열한다.

4.5. 평가실시(가채점)

① 최종채점 전에 가채점을 실시하여 채점기준을 검토하고 수정한다.

채점기준(안) 계획 ⇒ **평가실시** ⇒ **가채점 실시** ⇒ **채점기준(안) 검토 및 수정** ⇒ **평가 (최종채점)**

② 이미 작성된 채점기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'한다. 이는 채점기준의 요소 중에서 채점자인 교사가 미처 생각하지 못하였던 채점요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고 미비한 부분을 보완하고 수정하기 위함이다.

4.6. 채점 및 결과 보고

① 평가결과는 타당하고 객관적인 방법에 의해 해석되어야 하고, 해석의 결과는 학생에게 환류(feedback)되는 것은 물론이고 이후 지도계획에 활용될 수 있도록 기록, 보관되어야 한다.

② 평가결과는 학생 지도를 위해 학부모와의 협의 자료로 활용되어야 한다. 이를 위해 교사는 학부모에게 평가결과를 자세하고 구체적으로 알려 주며 가정과의 연계 지도를 도모해야 한다.

③ 학생에 대한 '관찰 누가 기록부' 등을 만들어 평소의 활동에 대한 지속적인 정보 수집이 이루어지도록 하고, 발달과 성장의 정도와 관련되는 결과물들도 함께 수집한다.

5. 수학과 평가의 다양한 예

선택적 반응 요구	구성적 반응 요구	특정 산출물 요구	특정 활동 요구	과정을 밝힘
· 선택형 문항 · 진위형 문항 · 배합형 문항	· 완성형 문항 (빈칸 채우기) · 도표나 그림에 제목붙이기 · 과제물 제시 · 시각적 자료 만들기(개념도나 흐름도, 그래프나 표, 도안 등)	· 수필 · 연구보고서 · 과제일지 · 실험보고서 · 이야기/극본 · 시(poem) · 포트폴리오 · 미술작품 전시 · 과학 프로젝트 · 모형(model) 구성 · 비디오 구성/ 오디오 구성	· 구두발표 · 무용/동작발표 · 실험 시연 · 경기 · 연극 · 토론 · 음악 발표	· 구두질문 · 관찰 · 면담 · 회의 · 과정(process)에 대한 기술 생각하는 과정을 말로표현(think aloud) · 학습일지
결과중심평가	**과정과 결과 모두를 중시하는 평가**			

5.1 서술형(주관식) 검사

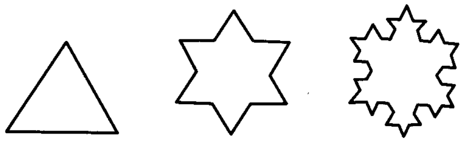
[문항] 다음 문제를 풀이과정을 자세히 써서 제출하시오.

① 농도가 8%인 소금물과 5%인 소금물을 섞어서 7%인 소금물을 300g 만들었다. 이때 각각의 소금물은 몇 g 씩 섞었는가?

② 연립방정식 $3x-4(x+2y)=5,\ 2(x-y)=3-5y$를 풀었을 때, $|x-y|$의 값을 구하면?

5.2. 논술형 검사

[문항] 다음 그림을 이용하여 적당한 수학문제를 만들어보고 좋은 문제인지 논하여라.



5.3. 구술시험

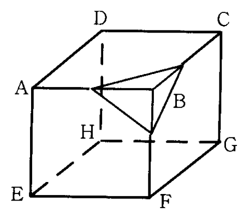
[문항] 다음 계산 문제를 쉽게 풀기 위한 적당한 그림을 그린다면 어떤 그림이 적당한가? 자신의 의견을 발표하여라.

$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin 7\theta$ 의 값은?

5.4. 실기시험

[문항] 다음 문제를 지시에 따라 풀이하시오.

아래 그림과 같이 정육면체에서 AB, BF, BC의 중점을 지나는 평면으로 점 B가 있는 쪽을 잘라냈을 때의 절개도형의 모양을 알아보고자 한다. 잘라진 두 도형의 전개도를 그려서 만들어 보고 잘린 단면의 모양을 확인하시오(준비물: 두꺼운 도화지, 자, 컴퍼스, 테이프, 가위나 칼, 연필).



•잘려진 두 입체도형의 겨냥도를 그려보아라.

•잘려진 두 입체도형의 전개도를 그려보아라.

5.5. 실험 · 실습법

[문항] 꼭짓점의 좌표가 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(4,2)$인 삼각형 ABC를 그려라. 이 삼각형을 다음 식에 의하여 $\triangle A'B'C'$으로 변환할 때, $\triangle A'B'C'$을 좌표평면 위에 그려라. [단, (x, y)는 $\triangle ABC$, (x', y')은 $\triangle A'B'C'$ 위의 임의의 점이고 꼭짓점 A, B, C는 A', B', C'으로 각각 변환된다]

$x' = y,\ y' = x$

5.6. 면접법

[문항] 선생님이 보는 곳에서 다음 문제를 풀어라. 필요하면 힌트를 요구해도 좋다.

> 그림은 좌표평면 위의 서로 다른 여섯 개의 점으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는?
>
> ① 9개 ② 12개 ③ 15개 ④ 19개 ⑤ 20개

[문항] (Paul Ernest(1992)) 면담지

면 담 안 내

학생 이름: ____________________ 일자: ____________

1. "직사각형의 둘레는 무엇을 뜻하는가?"

학생 반응	코드	논평

2. 직사각형이 그려진 종이를 제시하여라. "이 직사각형의 둘레를 보여줄 수 있는가?"

학생 반응	코드	논평

3. "직사각형의 둘레를 어떻게 측정하려고 하는가?"

학생 반응	코드	논평

4. "이 직사각형의 둘레의 길이를 어떤 방법으로 어림할 것인지 보여라. 그 어림값을 얼마인가?"

학생 반응	코드	논평

5. 학생들에게 자를 제공하여라. "당신이 어림한 것을 측정하여 비교하여라."

학생 반응	코드	논평

6. "네 변을 모두 측정하지 않고 둘레의 길이를 찾는 다른 방법이 있는가? 설명해 보아라."

학생 반응	코드	논평

코드: S(successful) – 성공적임: 자연스런 옳은 반응
P(prompted) – 암시를 받음: 힌트나 암시를 받은 후 옳은 반응
U(unsuccessful) – 성공적이지 못함: 틀렸거나 부적절한 답
N(no answer) – 답이 없음: 반응이 없음: 아는 것이 없음
T(teach) – 지도하였음: 진행하기 전에 지도를 하였음

5.7. 연구보고서(프로젝트)

[문항] 25만 원을 가지고 세 명이 관광지 A를 구경하려고 한다. 최소비용을 산출하고 그것이 25만 원 내에 가능한지 보고하여라.

[문항] 우리 집 식탁에 가장 적은 비용으로 식구들이 하루에 필요한 칼로리를 채우려 한다. 시장을 보고 그 결과를 보고하여라.

5.8. 포트폴리오

영역	일자	과정
1. 유리수와 순환소수		수업 중
2. 지수법칙		수업 중
3. 미지수가 2개인 일차방정식		과제
4. 걸리버 여행기를 읽고 나서		수업 중
5. 소띠의 60세 회갑		과제

6. 정의적 영역의 평가

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수 · 학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력

(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

(6) 수학적 사고과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치인식 등의 정도를 파악한다.

6.1. 정의적 영역 평가의 필요성

① 정의적 영역이란 수학적 성향과 같은 의미로 다음을 포함한다.

㉠ 아이디어를 교환하고 추론하는데 대한 자신감

㉡ 문제해결에서 수학적 아이디어를 탐구하고 다른 방법을 찾으려는 융통성

㉢ 수학적 과제를 꾸준히 수행하려는 의지

㉣ 수학에 대한 호기심

㉤ 끈기

㉥ 문화에서의 수학의 역할과 도구와 언어로서의 수학적 가치에 대한 이해

② 21세기 정보화 · 지식기반사회에서는 학생들의 무한한 고등정신기능의 함양과 창의성 신장이 무엇보다도 요구되며 이는 종래와 같은 선택형, 단답형 등과 같은 지식 위주의 평가도 중요하지만 충실성, 의지, 호기심, 자신감, 흥미, 끈기 등과 같은 정의적 영역에 대한 평가를 강조해야 함을 의미한다.

6.2. 평가 방법

1) 구술시험

① 구술시험은 말하는 능력과 제시된 주제에 대하여 개인의 의견을 발표할 수 있는 능력 등을 직접 평가하는 방법이다.

② 학생으로 하여금 특정 교육내용이나 주제에 대하여 자신의 의견이나 생각을 발표하도록 하여 학생들의 발표내용에 대한 충실성, 주제 해결에 대한 의지, 자신이 알고 있는 내용에 대한 자신감, 근거에 대한 호기심, 흥미 등을 직접 평가하는 방법이다.

평가요소	평가기준
흥미	· 수학문제에 대하여 흥미를 가지고 있다 · 주어진 질문에 대하여 상당히 적극적인 태도로 임한다 · 교사와 질의, 응답하는 것을 좋아한다
호기심	· 주어진 문제에 대하여 호기심을 보인다 · 주어진 문제에 대하여 깊이 있게 생각하기를 좋아한다
자신감	· 문제에 대한 반응이 매우 자신이 있다 · 반응의 결과에 대해서 자신감이 넘친다 · 어려운 문제를 대하는 태도가 자신감이 있어 보인다
의지	· 주어진 문제를 끝까지 해결하려는 의지가 있다 · 응답할 수 없는 상황에서도 당황하지 않는다 · 혼자서 해결하려는 의지가 돋보인다
끈기	· 시간이 오래 걸려도 끝까지 답변하려는 태도를 보인다 · 주어진 문제와 비슷한 상황을 생각한다
충실성	· 답변하는 태도가 매우 충실하다 · 평소 예습과 복습의 충실함을 알 수 있다

[평가과제] 이원일차연립방정식의 해는 기하학적으로 어떤 의미를 가지는가?

[평가 방법] 연립방정식의 해가 가지는 기하학적 의미에 대하여 답변하는 자신감, 의지 등의 수학적 성향을 평가한다.

[채점기준표]

채점요소		배 점		
		상	중	하
흥미	주어진 질문에 대하여 흥미를 가지고 접근한다	2	1	0
호기심	연립방정식의 해와 그래프에 대하여 호기심을 나타낸다	2	1	0
자신감	자신의 생각을 자신 있고 설득력 있게 전달한다	2	1	0
의지	주어진 문제에 대하여 정확한 답변은 못하지만 해결하려는 의지가 돋보인다	2	1	0
충실성	발표하는 태도에 충실성이 보인다	2	1	0

2) 토론법

① 특정 주제에 대하여 학생들이 서로 토론하는 것을 보고 평가하는 것이다.

② 사회적으로나 개인적으로 서로 다른 의견을 제시할 수 있는 토론 주제를 가지고 개인별로 찬반 토론을 하거나 집단을 나누어 집단별 찬반 토론을 하도록 한 다음, 찬성과 반대의견을 토론하기 위해 사전에 준비한 자료의 다양성과 충실성, 반대 의견에 대한 흥미와 호기심, 융통성, 자신의 의견에 대한 자신감 등을 총체적으로 평가한다.

평가요소	평가기준
흥미	· 상대방과의 토론에 대하여 흥미를 가지고 있다 · 토론에 상당히 적극적인 태도로 임한다 · 주제에 대하여 질의-응답하는 형식을 좋아한다
호기심	· 토론 주제에 대하여 호기심을 가지고 접근한다 · 주어진 문제에 대하여 자신의 의견을 깊이 있게 생각한다
자신감	· 주제에 대한 자신의 의견을 자신있게 말한다 · 자신의 의견에 대하여 자신감이 넘친다 · 어려운 주제를 대하는 태도가 자신감이 있어 보인다
의지	· 자신의 생각을 끝까지 주장하려는 의지가 있다 · 상대방의 질문에 응답할 수 없는 상황에서도 당황하지 않는다 · 같은 생각을 가진 동료가 없어도 해결하려는 의지가 돋보인다
끈기	· 시간이 오래 걸려도 끝까지 답변하려는 태도를 보인다 · 상대방을 이해시키려는 끈기가 보인다
충실성	· 주제에 대한 답변 자료의 준비가 충실하다 · 평소 예습과 복습의 충실함을 알 수 있다 · 상대방의 의견을 충실하게 받아준다

③ 교사가 특정 주제를 제시하고 이에 대한 찬반 토론을 진행하는 방법도 있으나, 한 가지 주어진 문제에 대하여 다양한 풀이법을 제시한 후 이에 대한 합리성, 간결성 등을 서로 비교 · 검토하는 토론을 유도한 후 이에 대해 평가하는 방법도 있다.

3) 관찰법

① 수학적 토론이 일어나는 생생한 장면이나 문제를 해결하는 자연스러운 과정, 수업에 임하는 진지한 태도 등을 관찰하여 지필검사나 프로젝트 등을 통해 얻기 어려운 정보를 얻는다.
② 학생들로 하여금 구체적인 수학적 주제를 제시하여 개인별 또는 소집단별로 토론의 기회를 마련하고 이를 관찰한다(관찰대상, 장면, 시간 등을 선택하는 통제 관찰).
③ 평소 수업시간에 학생들이 문제를 풀이하는 과정이나 수업태도 등을 수시로 관찰한다(대상, 장면, 시간 등에 구애 없이 수시로 관찰하는 비통제 관찰).
④ 여러 학생들의 관찰 결과를 짧은 시간에 기록할 경우, 필요한 부분을 발췌하여 약식의 체크리스트를 만들어 활용한다.

평가요소	평가기준
흥미	· 평소 수학에 대하여 흥미를 가지고 있다 · 주어진 질문에 대하여 상당히 적극적인 태도로 임한다 · 교사와 질의, 응답하는 것을 좋아한다
호기심	· 다양한 형태의 문제해결 전략에 대하여 호기심을 보인다 · 주어진 문제에 대하여 깊이 있게 생각하기를 좋아한다 · 수학시간을 좋아한다 · 실생활 문제를 수학적으로 해결하려는 태도를 보인다 · 항상 사물을 호기심을 가지고 대한다
자신감	· 항상 수학시간에 자신이 있다 · 반응의 결과에 대해서도 자신감이 넘친다 · 어려운 문제를 대하는 태도가 자신감이 있어 보인다
의지	· 주어진 문제를 끝까지 해결하려는 의지가 있다 · 응답할 수 없는 상황에서도 당황하지 않는다 · 동료의 도움 없이 혼자서 해결하려는 의지가 돋보인다
끈기	· 시간이 오래 걸려도 끝까지 해결하려는 태도를 보인다 · 주어진 문제와 비슷한 상황을 생각한다 · 어떤 상황에서도 포기하지 않고 해결하려는 끈기가 돋보인다
충실성	· 주어진 상황의 해결과정을 다른 상황에 적용한다 · 평소 예습과 복습의 충실함을 알 수 있다

[평가과제] 이차방정식 $x^2-2ix-a=0$가 중근을 가질 때, 실수 a의 값을 다음과 같이 두 가지 방법으로 구하였다.

> [풀이 A] 주어진 이차방정식은 계수 전부가 실수가 아니므로 판별식을 사용할 수 없다. 따라서 주어진 이차방정식의 근을 근의 공식에 대입하여 구한 다음, 두 근이 같아야 한다는 방법을 사용한다. 근을 구하면
>
> $x=\dfrac{i\pm\sqrt{i^2+a}}{1}=i\pm\sqrt{-1+a}$, $i+\sqrt{-1+a}=i-\sqrt{-1+a}$, $-1+a=0 \quad \therefore a=1$
>
> [풀이 B] 계수에 비록 허수가 있다하더라도 중근을 가질 경우에는 판별식 사용이 가능하므로 다음과 같이 계산할 수 있다.
>
> $$\frac{D}{4}=i^2+a=0, \quad -1+a=0, \quad \therefore\ a=1$$

이차방정식의 근의 판별식을 활용하는 과정에서 토론에 임하는 자신감, 충실성, 의지, 호기심 등의 수학적 성향을 평가하시오.

[채점기준표]

채점요소		배점		
		상	중	하
흥미	토론 활동에 관심을 갖고, 자신에게 기회가 주어졌을 때, 자신의 의견을 발표한다	2	1	0
호기심	뭔가 이상한 점을 발견하고 이를 해결하려는 호기심을 보인다	2	1	0
자신감	이차방정식의 판별식에 대하여 자신의 의견을 충실히 제시하고 있다	2	1	0
의지	자신의 의견을 고집하지 않고, 반대의 의견도 존중한다	2	1	0
끈기	토론 활동에 대하여 흥미과 관심을 가지고 적극적으로 참여한다	2	1	0
	다양한 풀이법이 있다는 것을 이해하고 여러 가지 방법으로 접근한다	2	1	0
충실성	토론 후에 자신의 생각과 다른 의견에 대하여 비교 · 검토한다	2	1	0
	또 다른 풀이 방법이 있는가를 고민한다	2	1	0

7. NCTM(1989) 평가규준

일반평가	학생평가	프로그램 평가
1. 일반성(alignment) 2. 정보의 다양한 출처 3. 적절한 평가 방법과 사용	4. 수학적 힘 5. 문제해결 6. 의사소통 7. 추론 8. 수학적 개념 9. 수학적 절차 10. 수학적 성향(disposition)	11. 프로그램 평가의 지표 12. 교육과정의 수업 자원 13. 수업 14. 평가팀

[학생평가]

① 수업활동을 할 때 대화를 기초로 교사와 학생들은 서로에게 말하거나 행한 것을 바탕으로 반응한다. 이러한 대화에서 다루는 아이디어는 학생들이 어떤 의미를 부여하는가를 이해하는 과정이라 할 수 있다. 그리고 이러한 대화가 효율적인 수업의 통합적인 요소로 작용하려면 주기적으로 평가해야 한다.

② 학생평가 규준은 학생들이 어떤 수학을 아는가를 이해하기 위해 무엇이 관찰되고 측정되어야 하는가를 기술하는 규준으로 학생들로 하여금 교육과정 규준집에서 기술된 것과 같은 지식을 얻도록 하는 데 보다 도움이 된다.

③ 평가는 연속적이고 역동적이며 가끔 비형식적 과정이어야 한다. 그리고 분명한 결론을 내리는 것 이상이 되어야 한다. 평가는 관찰과 추측 그리고 학생의 이해에 대한 계속적인 판단이 반복되는 과정이다. 따라서 학생들의 발달적 판단을 내릴 수 있는 근거가 된다.

④ 일반적으로 등급을 정하는 시험은 있다. 그러나 평가는 학생들이 무엇을 알고 수학에 대해 어떻게 생각하는지를 결정하기 위해 고안된, 보다 넓고 기본적인 과제이며 결국 수업의 질을 개선하기 위해 학생들의 학습 '이력(biography)'을 산출하는 지표가 된다.

⑤ 수업시간에 교사와 학생, 학생과 학생들 사이의 지식적인 의사소통을 통해 교사의 수업전략을 바탕으로 학습을 향상시켜야 한다.

규준 4 수학적 힘

학생들의 수학적 힘에 대한 평가는 다음 정보를 산출할 수 있어야 한다.

- 수학문제나 다른 과목의 문제를 해결하는데 그들의 지식을 적용하는 능력
- 아이디어를 교환하기 위해 수학적 언어를 사용하는 능력

•추론하고 분석하는 능력
•개념과 과정에 대한 지식과 이해
•수학에 대한 성향(disposition)
•수학의 본질에 대한 이해
•수학적 지식의 이러한 측면들의 통합

어떠한 분야에서와 마찬가지로 수학에서 지식은 방법적 지식(know-how)을 포함한 정보들로 이루어진다. 수학적 힘으로 이끄는 방법적 지식은 추론하고 창조적으로 사고하며, 문제를 제기하고 풀며 비판적으로 반성하기 위해 정보를 사용하는 능력을 요구한다. 학생들의 수학적 힘에 대한 평가는 얼마나 많은 정보를 갖고 있는가 뿐만 아니라, 그 정보를 사용하고, 적용하며 의사소통하는 능력과 의지의 정도를 평가해야 한다. 평가는 추론과 창의적 사고를 요구하는 상황에 정보를 적용할 수 있는지와 학생들이 그들의 아이디어를 의사소통하는 데 수학을 이용할 수 있는지 그리고 학생들이 정보를 통합하고 의미있게 만드는 정도를 조사해야 한다. 또한, 수학에 대한 성향, 특히 수학을 행하는 것에 대한 자신감, 수학의 가치를 이해하는 정도를 포함해야 한다. 학생들의 수학적 힘에 대한 평가는 그 범위가 넓어야 하면 이 규준에서 명시된 모든 측면을 포함하고 그 측면들이 통합되는 정도를 결정할 수 있어야 한다. 수학적 힘의 평가는 분리되거나 고립된 능력의 평가여서는 안 된다. 특정 평가에서 수학적 힘의 한 측면이 다른 측면보다 강조될 수는 있겠지만 수학적 힘은 수학적 지식의 모든 측면과 그 측면들의 통합과 관련됨을 명백히 인식해야 한다.

■■ 규준 5 문제해결

문제해결에서 수학을 사용하는 학생들의 능력에 대한 평가는 학생들이 다음과 같은 것들을 할 수 있다는 증거를 보여야 한다.

•문제를 구성할 수 있다.
•문제해결에 있어 다양한 전략을 적용할 수 있다.
•문제를 풀 수 있다.
•결과를 증명하고 해석할 수 있다.
•해를 일반화할 수 있다.
•문제를 이해할 수 있다.
•반성할 수 있다.

문제해결이 학교수학의 초점이 되기 위해서는 당연히 평가의 초점도 되어야 한다. 문제를 해결하는 학생의 능력은 수업이 확대되고, 많은 문제를 풀어보고, 실생활 상황과 자주 접함으로써 발달되어 간다. 여러 가지 상황에서 문제를 푸는 학생들의 능력과 자신감에 대한 향상 정도가 체계적이고 신중하게 또 계속적으로 평가되어야 한다. 과정뿐 아니라 결과에 대한 평가결과를 학생들에게 피드백(feedback)하는 것은 그들을 좋은 문제해결자로 발전시키는데 중요하다. 또한 평가는 교사들로 하여금 학생들에게 도전할만하고 교훈적이고 흥미롭고 실패하지 않은 문제상황을 생각하는데 유익한 정보를 준다.

평가는 문제해결의 모든 측면을 수행하는 학생의 능력을 결정해야 한다. 주어진 질문을 하고 정보를 사용하고, 가설을 설정하는 능력에 대한 증거는 그들이 문제를 구성(formulate)할 수 있는가를 결정하는데 필수적이다. 또한, 평가는 학생들의 문제해결 전략과 기법을 사용하고 결과를 해석하고 증명하는 능력에 대한 증거를 줄 수 있어야 한다. 끝으로, 수학적 힘은 부분적으로 그것의 일반화로부터 얻어지기 때문에(예를 들어, 2차원 공간의 해는 3차원 공간의 해로 일반화될 수 있다) 문제해결의 이러한 측면도 평가되어야 한다.

•9-12학년에서의 문제해결 규준 활용

[문제 1] 문제를 제기하여라. 문제를 풀어라.

(a) 여러분은 상점에서 10가지 물건을 사려고 한다. 6사람이 급행계산대(expresslane)(10항목이하)에서 기다리고 있다. 계산대 1에는 한 사람이, 계산대 3에는 세 사람이 기다리고 있다. 다른 계 산대는 닫혀 있다. 어떤 계산대에 줄을 서겠느냐?

(b) 2가지 차 중에 하나를 사려고 한다. 둘 다 4년 된 것이다. 하나는 3000달러인데, 1갤런 당 20 마일을 갈 수 있고, 다른 것은 4500달러인데 1갤런 당 35마일을 갈 수 있다. 여러분이 2년 동안 쓰려고 한다면 어떤 차를 사는 게 좋겠느냐? 이 질문에 답하기 위해 더 필요한 정보는 무엇이냐?

문제를 제기하는 한 가지 측면은 부가되는 정보가 필요한가를 확인하는 것이다. 위의 문제 중 어느 것도 필요한 정보를 충분히 가지고 있지 않다. 학생들은 불분명한 정보를 구별할 필요가 있고 불분명한 양을 대략적으로 추정할 필요가 있다. 문제 (a)에서는 각각의 사람들이 가지고 있는 물건의 수와 계산하는 사람의 계산 속도 등이 고려되어야 한다. 문제 (b)에서는 매년 주행한 마일 수, 가솔린의 가격, 차를 사기 위해 현재 가지고 있는 돈 등이 고려되어야 한다. 더 비싼 차를 사기 위해 돈을 빌려야 한다면 차이가

생길 수 있다. 이러한 문제는 수업시간에 개인별, 소집단별 활동에 적당하다. 만들어진 질문의 다양성과 어떤 추가적인 정보가 가정되느냐에 대해 관찰이 이루어질 수 있다. 교실에서, 필요한 정보를 발견하는 데 대한 학생의 의지가 관찰될 수 있다. 질문 (b)에는 계산기가 필수적이다.

[문제 2] 문제를 풀어라. 해를 일반화하여라.

여기에 있는 각각의 문장을 증명하여라.

(a) 연속하는 두 범자연수의 합은 2로 나누어지지 않는다.

(b) 연속하는 세 범자연수의 합은 3으로 나누어진다.

각 문장에 대해 일반적인 것으로 생각되는 것을 진술해 보아라. 증명하거나 반례를 들어라.

이 과제는 평가에 이용될 수도 있으며 숙제로 부가될 수도 있다. 이것을 평가하는 것에는 문장을 증명하는 학생의 능력, 문장의 성격, 일반적인 문장을 증명하거나 반증하는 능력이 포함된다. 일반적인 경우의 가능한 문장은 다음과 같다.

(a') 범자연수에서 연속하는 수의 짝수 개의 합은 그 수에 의해 나누어지지 않고, 연속하는 수의 홀수 개의 합은 그 수에 의해 나누어지는 수가 있는 것이 참이냐?

이 문제는 문제해결과정의 각각의 부분에 대해 점수를 줄 수 있는데, 처음 문장을 표현하는 정확한 표상 [$\frac{n+(n+1)}{2}$ = 정수]을 한 경우 1점, 두 연속하는 범자연수에 대해 잘 알고 있는 경우 1점, 일반적인 경우를 언급한 경우 2점, 적당한 증명을 했을 때 2점, 자신이 사용한 전략이 무엇인지 설명했을 때 2점을 줄 수 있다.

규준 6 의사소통

수학에 대해 의사소통(communication)하는 능력의 평가는 다음의 증거를 제공할 수 있어야 한다.

- 수학적 아이디어를 말하고, 쓰고, 설명하고, 시각적으로 표현할 수 있다.
- 지필로, 구두로 또는 시각적 표현으로 제시된 수학적 아이디어를 이해하고 해석할 수 있다.
- 수학적 어휘와 기호 체계, 구조를 사용하여 아이디어를 표현하고, 관계성을 기술하고 상황을 모델링할 수 있다.

위의 규준들은 수업환경에 대한 역동적인 관심을 제시하고 있다. 그것은 학생들이 탐구하고, 토의하고, 묘사하고, 설명함으로써 수학적 지식을 발달시키는데 능동적으로 참여하는 상황을 요구한다. 이러한 사회적 과정을 집약한 것이 바로 의사소통이다. 이야기하

고, 쓰고, 말하고, 듣고, 읽는 과정을 통해 아이디어가 토의되고, 발견된 사실이 공유되고, 가설이 확인되고 지식이 획득된다. 의사소통의 행위는 사고를 명확히 하고, 학생들로 하여금 수학을 행하는데 참여하게 한다. 의사소통은 수학을 학습하고, 수학을 이해하는데 있어서 중요한 요소이다. 그러나 수학적으로 의사소통하는 것은 학생들에게 대단히 어렵다. 수학은 기호의 사용에 의존하고 일상적 언어와 비교할 때 특수하고 때로는 상이한 의미를 갖는다. 따라서 수학적 아이디어를 표현하는데 혼란스럽고 어려운 경우가 생긴다. 전통적인 평가 방법으로는 그러한 어려움과 혼돈을 확인할 수 없으며 수학의 사회적 의미가 무시된다.

수학적으로 의사소통할 수 있는 능력의 평가는 수학적 개념과 과정에 대한 의미와 수학적으로 표현된 아이디어에 대해 이야기하고, 이해하며, 평가하는데 있어서의 능숙함 모두에 초점을 맞추어야 한다. 평가는 의사소통의 여러 형태를 포함해야 하는데 사람끼리의 의사소통뿐 아니라, 다양한 형태의 기술공학을 사용한 의사소통도 강조해야 한다. 평가는 또한, 학생의 언어발달에도 민감해야 한다. 다른 언어에서와 마찬가지로, 수학에서의 의사소통은 아이디어와 관계성을 이해하고 표현하기 위해 수학적 어휘와, 기호 체계, 구조를 사용할 수 있음을 의미한다. 이러한 의미에서, 수학적 의사소통은 수학을 알고 행하는 것의 일부이다.

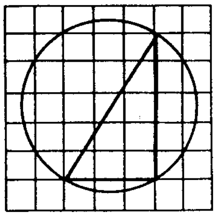
•9-12학년에서의 의사소통 규준 활용

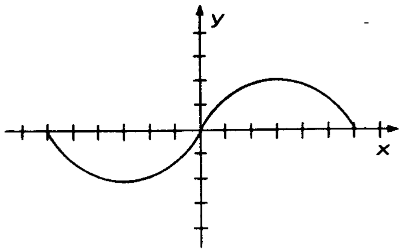
고등학교 수준에서, 학생은 보다 추상적인 아이디어를 접하게 되고 보다 형식적인 수학적 언어를 경험하게 된다. 평가는 수학적 아이디어를 교환하는데 있어서의 엄밀성과 정확성의 역할에 대한 인식뿐 아니라, 수학적 언어, 용어와 문장의 이해에 초점을 맞추어야 한다. 고등학교에서도 비형식적 관찰이 계속 중요하지만 형식적인 수학적 표현이 증가함에 따라 평가에 있어서 새로운 준거가 요구된다. 이 수준에서 학생의 지필 결과는 표현의 엄밀성, 명확성, 적합성에 의해 판단되어야 한다. 학생은 아이디어와 관계성을 다양하게 표현할 수 있어야 하고, 그들의 상대적 유용성을 인식해야 한다. 그러나 기호 사용에 대한 기대는 학생의 성숙도와 과제의 상황과 관련되어야 한다. 때로는 기호적 표현이 요구될 수 있으며, 기호와 자연 언어의 혼용이 적절할 경우도 있다. 또한, 기호 사용이 매우 부적당할 수도 있다.

수학적으로 의사소통 할 수 있는 능력은 학생들로 하여금 수학에 대해 글을 써보도록 함으로써 평가될 수도 있다. 글로 서술된 응답은 정확성, 명확성, 엄밀성과 수학적 용

어 및 기호의 적절한 사용에 따라 판단되어야 한다. 다음은 한 가지 예이다.

[문제] 학급의 친구에게 전화를 통해 도형을 그리게 한다고 하자. 그 학생은 도형을 볼 수 없다. 아래와 같은 그림과 그래프를 정확히 그릴 수 있게 하기 위한 지시 내용을 써 보아라.





평가는 글로 서술된 결과의 판단 이상이어야 한다. 수학교재와 논문을 이해하는 학생의 능력은 글로 서술된 요약물을 통해 평가될 수 있지만, 수업 또는 소집단 토론 중의 읽기 또는 듣기 과정에 능동적으로 참여하는지를 판단할 때는 토론이 보다 유용하다.

기술공학을 통한 의사소통능력의 평가 역시 중요하다. 과학 기술을 도구로써 사용하는 경우가 증가함에 따라 학생들은 정보를 구성하고 표현하기 위해 컴퓨터와 소프트웨어, 스프레드시트, 데이터 베이스 프로그램을 사용할 수 있어야 한다. 성취 준거는 학생들이 기술공학을 이용하여 의사소통을 할 수 있는가 하는 점이다. 이 능력을 평가하는 한 방법은 학생이 스프레드시트를 이용하여 상황을 시뮬레이션하고 결론에 대한 증거를 제시할 수 있는가를 알아보는 것이다.

[문제] 스프레드시트를 사용하여, 연료탱크를 매번 가득 채울 때마다 1갤런의 부동액을 붓는다면 탱크 내 부동액의 양의 극한은 2갤런임을 증명하여라. 운전자는 연료탱크가 반 차있을 때 습관적으로 연료를 채운다는 것을 가정하여라.

컴퓨터와 정확하게 의사소통할 수 있는 학생은 첫째 줄은 연료를 채운 횟수, 두 번째 줄은 부동액의 양을 기록하는데 사용할 것이다. 둘째 줄의 수치를 생성시키기 위해 첫째항이 1이고 공비가 0.5인 등비급수를 이용할 것이다.

규준 7 추론

수학적으로 추론하는 능력에 대한 평가는 학생들이 다음과 같은 것을 할 수 있다는 증거를 제시할 수 있어야 한다.

•규칙성을 인식하고 가설을 설정하는데 귀납적 추론을 사용할 수 있다.
•수학적 명제에 대한 개연적 논증(plausible arguments)을 전개하기 위해 추론을 사용할 수 있다.
•비례추론과 공간추론을 사용하여 문제를 해결할 수 있다.
•결론을 내리고, 논증의 타당성을 판단하며, 타당한 논증을 구성하는데 연역추론을 사용할 수 있다.
•상황을 분석하여 공통 성질과 구조를 결정할 수 있다.
•수학의 공리적 성질을 이해할 수 있다.

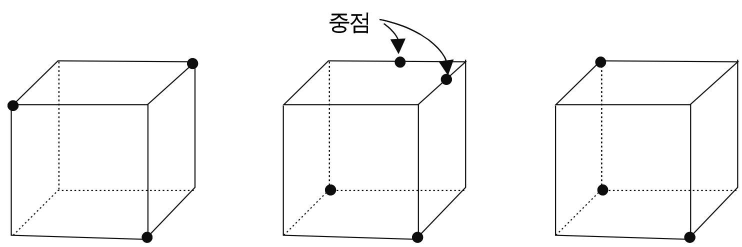
이 규준에서 확인된 유형의 추론은 수학을 행하는데 근본적이지만, 학생들이 구두 또는 지필로 행한 답에서는 항상 관찰되지는 않는다. 학생들은 당연히 그들이 알거나 다루어 본 예들을 근거로 가설을 세우며, 참인 것으로 알고 있는 것을 근거로 논증을 전개해 나간다. 그들은 또한 비례추론과 공간관계에 대한 직관적 개념은 갖고 있다. 모든 학생들은 그러한 직관적이고 비형식적인 추론을 할 명백한 기회를 가져야 하며 따라서 학생의 추론능력에 대한 어떠한 평가도 이러한 과정에 대한 증거를 얻을 수 있어야 한다.

평가기법은 특히 학생들이 사용하는 다양한 유형의 추론을 평가해야 한다. 어떤 학년 수준에서도 추론의 어떤 측면이 다른 측면보다 더 적절할 수는 있겠지만 어떤 학년에서도 모든 측면들이 사용될 수 있다. 그러나 저학년에서는 어떤 측면들은 직관적 의미로만 사용되어야 한다.

•9-12학년에서의 추론 규준 활용

① 공간추론

[문제] 아래 그림에서 나타난 점들을 포함하는 정육면체의 각 단면의 넓이를 구하는 공식은 무엇이냐?



평가과정은 서너 단계를 고려해야 한다. 첫째, 학생들은 지시된 점들을 포함하는 평면을 시각화할 필요가 있다. 둘째, 그들은 단면의 모양을 기술할 수 있어야 한다.

마지막으로 목표로 하는 넓이 공식을 찾아야 한다. 소집단이나 개인별로 생각할 수 있다.

② 연역추론

[문제] 로저는 각 학생들의 성적 점수에 같은 점수를 더하면 같은 점수만큼 평균점수가 높아지리라는 것 을 믿지 않는다. 로저에게 이것이 사실이라는 것을 납득시킬 타당한 논증을 써 보아라.

이 논증은 연역적이어야 한다. 특별한 경우나 서너 가지 경우는 충분치 않다. 어떤 학생들은 특별한 증가 점수를 택한 다음 그 경우에 대해 주장을 할 것이다. 그 특수성 때문에 이 논증을 일반적인 증가 점수를 택하여 평균 점수가 n점 증가한다는 것을 보이는 것만큼 강하지 못하다.

③ 수학의 공리적 성격을 음미한다.

모든 수준의 학생들은 수학이 설정된 규칙에 기초하여 수학을 가르치거나 개발하는 사람에게만 친숙한 '속임수'가 아니라는 직관적 감각을 발전시켜야 한다. 특히 우수한 아동은 규칙이 선택되는 것은 임의로 택할 수 있지만은 그 규칙을 둘러싼 체계는 무모순적이어야 한다는 점을 이해해야 한다. 기하교육의 목표 중의 하나는 학생들로 하여금 공리적 체계를 구성하고 있는 것에 대한 의미를 개발하는 것이다. 따라서 다음 문제들이 기하 시간에 주어질 수 있다.

[문제] 다음 내용에 대해 작문을 하여라.

비유클리드 기하를 발전시킨 사람들은 공리가 수학에서 임의로 선택될 수 있다는 개념에 어떤 방법으로 기여했는가?

이 작문은 평행성 공리(유클리드의 다섯 번째 공리)가 앞의 네 가지 공리와 정리에 기초해서 증명될 수 없으며 평행성 공리를 정의하는데 몇 가지 선택이 가능하다는 데 초점이 맞추어져야 한 다. 학생들은 소집단별로 작업한 다음, 수업 시간에 발표할 수도 있다.

[문제] 수학 체계가 다음 문장을 공리로서 가정한다고 하자.

만약 두 직선이 평행하고 한 직선에 의해 잘려진다고 한다면 내측 엇각은 같다.'이것을 이용하여 다음 문장을 정리로써 증명한다고 한다.

만약 두 직선이 평행하고 한 직선에 의해 잘려진다고 한다면 동위각은 같다.'

두 번째 문장을 공리라 하고 첫 번째 문장을 정리로써 증명하는 것이 가능

한가? 왜?
공리의 선택은 임의적이나, 한 번 선택되면 두 번째 문장은 선택된 공리를 근거로 증명될 수 있음을 강조해야 한다.

규준 8 수학적 개념

학생의 수학적 개념에 대한 이해와 지식의 평가는 다음을 할 수 있는가의 증거를 제시할 수 있어야 한다.

- 개념을 정의하고, 말로써 표현하고, 분류할 수 있다.
- 적당한 예와 거짓 예(non-example)를 확인하고 만들 수 있다.
- 개념을 표현하기 위해서 기호와 도식과 모델을 이용할 수 있다.
- 한 가지의 표현 방식을 다른 표현 방식으로 번안할 수 있다.
- 개념의 다양한 의미나 해석을 인식할 수 있다.
- 주어진 개념의 성질을 밝히고, 특정 개념을 결정짓는 조건을 인식할 수 있다.
- 개념을 비교하고, 대비시킬 수 있다.

개념은 수학적 지식의 본질이다. 학생들은 개념과 개념의 의미나 해석 등을 이해할 때만이 수학을 의미있게 만들 수 있다. 예를 들어, 학생들이 뺄셈 과정을 의미있게 하기 위해서는 자리 값의 개념을 이해하고 있어야만 한다. 비슷하게 주어진 상황이 뺄셈을 필요로 한다는 것을 인식하려면 뺄셈의 개념을 이해하고 상황 속에서 나타난 행위가 그것의 의미(비교 분해)와 일치한다는 것을 인식해야 한다. 수학을 의미있게 행하기 위해서는 개념적 이해가 근본이기 때문에 학생의 수학적 지식의 평가는 반드시 수학적 개념을 파악하고 있는지를 조사해야 한다.

수학적 지식의 이해는 단순히 정의를 떠올리거나 평범한 예제를 인식하는 것 이상의 것이다. 그것은 이 규준에서 확인된 광범위한 능력을 포함해야 한다. 평가 역시 개념적 이해의 이러한 측면을 강조하여야 한다. 평가과제는 예와 반례를 선택하는데 있어서 적절한 개념 또는 부적절한 개념의 속성을 구별할 줄 아는 능력과 개념을 다양하게 표현하는 능력 그리고 그들의 다양한 의미를 인식하는 능력에 초점을 맞추어야 한다. 학생들로 하여금 새로운 상황에서 주어진 개념에 관한 정보를 적용하도록 하는 과제는 그 개념의 지식과 이해에 관한 강력한 증거를 제공해 준다. 학생들이 가지고 있는 잘못된 개념에 대한 정보를 이끌어 내기 위해 고안된 문제는 수업을 수정하거나 계획하는

데 유용한 정보를 제공해 준다.

•9–12학년에서의 수학적 개념 규준 활용

① 개념의 예와 반례를 찾기

[문제] 다음 중 어느 것이 유리수인가?

$$\frac{2}{3} \quad \sqrt{\frac{4}{5}} \quad 0 \quad \sqrt{5} \quad 1.3434 \quad -5.6$$

$$1.121121112\cdots \quad \sqrt{-16} \quad \frac{7}{(9-3^2)} \quad \frac{-6}{-2} \quad 25\%$$

이 과제는 학생들이 유리수의 적절한 속성과 비적절한 속성을 판별할 줄 아는가를 결정하는 문항이다.

$\frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$, $\frac{7}{(9-3^2)}$ 그리고 $\frac{-6}{-2}$ 을 유리수로서 판단한 학생은 분수꼴과 유리수를 혼돈하고 있는 것이다. 1.121121112…를 유리수로서 판단한 학생은 규칙성을 가지는 비순환소수와 순환소수를 구별할 줄 모르는 것이다. 이 과제는 자신의 선택을 정당화하도록 요구하는 지필 문항을 포함하여 다양한 형태로 제시될 수 있다.

② 개념을 결정짓는 조건을 생각하기

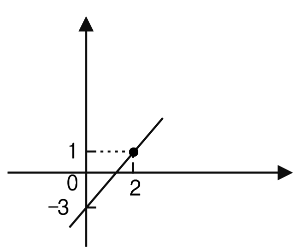
[문제] 나는 누구인가?

'나는 네 각이 같은 사각형입니다. 나는 어떤 사각형입니까?'

여기서 학생들은 어떤 사각형이 가지고 있는 성질과 그들을 정의하기에 충분한 성질들을 구별할 줄 알아야 한다. 예를 들어 이 문항에 대해 올바르게 대답하기 위해서 학생들은 비록 정사각형의 네 각이 같다고 하더라도 모든 직사각형도 이 성질을 가지고 있으므로 정답은 정사각형이 아니고 직사각형이라는 것을 인식해야 한다.

③ 한 가지 표현 방식을 다른 표현 방식으로 번안하기

[문제] 아래 그림에서의 직선의 방정식은?



이 과제는 학생들로 하여금 직선의 그래프 표상을 기호적 표상으로 번안하는 것을 요구한다. 이것을 효과적으로 하기 위해서 학생들은 그래프에서 직선의 기울기와 절편을 구하고 이들을 기호로 나타낸 다음 구하는 방정식 $y=\frac{1}{2}x-3$으로 표현할 수 있어야 한다. 이러한 재표현을 쉽게 하는 학생들은 해석기하에서 직선의 의미와 기울기와 절편의 관련된 개념을 확고하게 이해하고 있다고 할 수 있다.

④ 개념들을 통합하기

[문제] 등변사다리꼴의 네 변의 중점을 이으면 어떤 모양이 생기는가? 각자의 답을 정당화해 보아라.

이 과제는 학생들이 얼마나 기하에 대한 지식을 잘 통합하고 있느냐에 대한 정보를 제공하여 준다. 이 문제를 풀기 위해서 학생들은 등변사다리꼴을 그릴 줄 알아야 하고 각 변의 중점을 찾은 다음 각 중점을 이은 도형을 인식하여야 한다. 그 다음 학생들은 이 도형이 마름모인지를 결정하는 조건에 관한 추가적인 지식을 적용할 수 있어야 한다. 학생들은 목표하는 도형을 찾을 수 있어도 왜 그 도형인지를 정당화할 수 없을 수도 있다.

규준 9 수학적 절차

학생들의 절차에 대한 지식의 평가는 다음을 할 수 있다는 증거를 제공해야 한다.

- 언제 어떤 절차가 적절한지를 인식할 수 있다.
- 절차의 각 단계에서 이유를 제시할 수 있다.
- 절차를 확실하고 효율적으로 실행할 수 있다.
- 절차의 결과를 경험적으로 또는 분석적으로 입증할 수 있다.
- 옳고 그른 절차들을 인식할 수 있다.
- 새로운 절차를 만들고 기존 절차를 확장 또는 수정할 수 있다.
- 수학에서의 절차의 성질과 역할을 음미할 수 있다.

학교수학에서 절차는 일반적으로 계산방법을 의미한다. 그러나 수학교육과정에서 모든 절차가 계산적인 것은 아니다. 각을 이등분하는 것과 직선 위의 한 점에서 수선을 긋는 것과 같은 기하학적 작도는 절차적이지만 계산적이 아니다. 이 규준에서 확인된 절차적 지식의 다양한 측면은 비계산적 절차에 똑같이 잘 적용된다. 수학적 절차를 어떻게 확실하고 효율적으로 실행하느냐 하는 것 역시 중요하기는 하지만 절차적 지식은 단순

한 실행 이상을 포함한다. 학생들은 언제 절차를 적용하며, 절차가 작동하는 이유와 그 절차가 옳은 답을 준다는 것을 입증하며, 절차의 기초가 되는 개념과 그 절차를 정당화하는 논리를 이해해야 한다. 절차적 지식은 작동되는 절차와 작동되지 않는 절차를 구별하고, 절차를 수정하고 새로운 절차를 만드는 능력을 포함한다. 학생들은 수학에서 절차의 성격과 역할을 음미하도록 격려되어져야 한다. 즉, 절차는 특별한 필요성을 효율적으로 충족시키는 도구이며, 따라서 새로운 상황에 적합하게 확장, 수정될 수 있다는 것도 알아야 한다. 따라서 절차적 지식의 평가는 절차를 수행하는 능력의 평가뿐 아니라, 이 규준에서 주장된 절차적 지식의 모든 측면을 강조해야 한다.

*9-12학년에서의 수학적 절차 규준 활용

① 절차 안에서 단계에 대한 이유를 제시하기

[문제] $(x+4)$ 와 $(x+2)$ 의 곱셈에 대한 다음 각 단계를 정당화하여라.

$$(x+4)(x+2)=x(x+2)+4(x+2)$$
$$=x^2+2x+4x+8$$
$$=x^2+(2+4)x+8$$
$$=x^2+6x+8$$

이유는 구두로 혹은 지필로 설명될 수 있다. 평가는 각 단계에 대한 수학적인 이유(공리, 정의, 정리)를 얼마나 정확히 제시하느냐에 초점을 맞추어야 한다.

② 절차의 결과를 확인하기

[문제] (a) $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$의 역행렬을 찾아라.

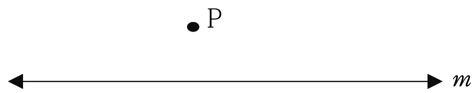
여러분이 제시한 행렬이 A의 역행렬이라고 어떻게 확인할 수 있는가?

(b) 선분을 그리고, 컴퍼스와 자를 사용하여 그것을 삼등분 하여라. 종이 접기(paper folding)를 이용하여 선분이 삼등분되었음을 확인하여라.

예 (a)에서 확인은 산술적인 방법으로 이루어지고, (b)에서는 경험적으로 결정된다. 여기서 주된 생각은 학생들이 교사나 교재에 의존하지 않고 독립적으로 결과를 확인해야 한다는 점이다. 특히 중요한 것은, 학생들이 자신의 답이 맞지 않는다는 것을 발견한 경우 원 래의 절차의 실행을 재검토하는 상황이다. 평가는 학생들이 결과를 확인하는 방법을 알고 있는지 또는 그 확인과정을 완수할 수 있는지에 초점을 맞추어야 한다.

③ 새로운 절차를 만들거나 친숙한 절차를 수정하기

[문제] 아래 그림에서, 직선 PX가 직선 m에 평행하게 되는 점 X를 컴퍼스만을 사용하여 찾아라. 각자 절차를 기술하고 정당화하여라.



이 문제를 풀기 위해 자가 사용되어서는 안 된다. 평가는 작도가 완전하고 정확한지, 학생들이 자신의 활동에 대해 잘 기술하는지 그리고 절차가 합당한지에 초점을 두어야 한다. 기술과 설명은 지필 또는 구두로 이루어질 수 있다.

④ 수학에서 절차의 성질과 역할을 음미하기

한 가지 항목과 과제로는 수학에서의 절차의 성질과 역할에 대한 학생들의 이해를 평가하기에 불충분하다. 타당한 평가는 장기적으로 이루어져야 하고, 잘 알려진 절차를 사용하거나 새로운 절차를 만들기를 요하는 다양한 수학적 활동 또는 과제를 바탕으로 해야 한다. 절차적 지식의 이러한 측면이 실현되기 위해서는 수업시간에 학생들에게 절차를 만드는 기회를 제공할 필요가 있다. 그러한 기회는 절차가 어떤 권위(예를 들어, 교사나 교과서)에 의해 전수된 미리 결정된 일련의 단계라는 믿음을 일소해야 한다. 학생들의 절차적 지식의 이러한 측면을 평가하는데 있어서 중요한 문제는 다음과 같다.

- 학생들이 의도적으로 또는 특정한 필요를 위해 절차가 만들어진다는 것을 알고 있는가?
- 학생들이 절차를 생성하거나 확장하는 일에 가치를 두는가?
- 특정한 절차를 생각하지 못할 때, 잊어버린 절차를 생각해 내려고 도움을 청하기보다는 그 절차를 재구성하거나 혹은 새로운 것을 만들려고 시도하는가?
- 대안적인 절차가 같은 필요를 충족시킬 수 있음을 아는가?
- 효율성이라는 측면에서 대안적인 절차의 상대적인 장점을 판단할 수 있는가?

더구나 새로운 절차가 도입되었을 때, 다음과 같은 문제들이 평가되어야 한다.

- 학생들은 각 단계들의 수행되는 절차를 의미있게 만드는 시도를 하는가?
- 학생들은 일련의 각 단계에서의 논리에 대해 의문을 가지는가?
- 왜 그 절차가 원하는 결과를 생성하는지 의문을 가지는가?
- 절차의 결과를 증명하고자 하는가?

이러한 행동들은 절차의 성질과 역할에 대한 학생들의 이해를 나타내는 것이다.

■■ 규준 10 수학적 성향

학생들의 수학적 성향에 대한 평가는 다음에 대한 정보를 제공해야 한다.

- 문제를 풀고, 아이디어를 교환하고, 추론하기 위해 수학을 사용하는 것에 대한 자신감
- 수학적 아이디어를 탐구하고, 다른 문제해결방법을 찾는데 있어서의 유연성
- 수학적 과제를 지속적으로 수행하려는 자세
- 수학을 행하는데 있어서의 흥미, 호기심, 창의성
- 자신의 생각과 수행 결과를 모니터하고, 반성하려는 경향
- 다른 과목과 일상의 경험에서 발생하는 상황에 수학을 적용하는 것의 가치를 아는 것
- 우리 문화에 있어서의 수학의 역할과, 도구와 언어로서의 수학의 가치에 대해 이해하는 것

수학을 학습하는 것은 단순히 개념이나 절차 및 그 응용을 학습하는 것 이상의 것이다. 그것은 수학적 성향을 발달시키는 것과, 상황을 판단하는 강력한 방법으로 수학을 파악하는 것을 포함한다. 성향은 단순히 태도가 아니라, 긍정적으로 사고하고, 행동하는 경향을 뜻한다. 학생들의 수학적 성향은 과제에 접근하는 방식이나 자신감, 다른 대안을 찾아보려는 자발성, 지속성, 흥미, 자신의 생각을 반성하려는 경향에서 나타난다. 수학적 지식의 평가는 이러한 성향이나 수학의 역할과 가치에 대한 학생들의 이해에 대한 평가를 포함하여야 한다.

이러한 종류의 정보는 학급 토의나, 문제해결의 시도, 개인 또는 학급 단위로 부여된 다양한 과제에 학생들이 참여하는 것을 비형식적으로 관찰함으로써 가장 잘 얻을 수 있다. 태도 설문지와 같은 평가는 성향의 배경이 되는 모든 범주의 인식(perception)이나 신념을 파악하지 못한다.

• 9-12학년에서의 수학적 성향 규준 활용

에세이와 연구 논문은 특별히 우리 문화에 있어서 수학의 역할을 이해하게 하고 평가하는데 유용하 다. 그 과제의 질에 대한 평가는 그것의 개념적 장점, 완전성, 독창성을 바탕으로 이루어져야 한다. 작문에 대한 평가에서 문법, 철자, 표현의 유창함, 아이디어의 설득력, 논리와 서술의 무모순성에 대한 것을 고려해야 한다. 기발한 풀이, 합리적인 주장, 과제의 어려움을 해결하려는 자발성은 옳은 해를 얻는 것만큼 중요한 것이고 인정받아야 한다. 평가의 주제를 예시하면 다음과 같다.

- 오늘날 우리 사회에 있어서 기하의 역할
- 수학과 컴퓨터
- 만일, 측정의 표준 단위가 만들어지지 않았다면?
- 스포츠에서 통계 이용의 변화

각 학년 수준에 대해 지금까지 고려한 것 중 어느 것도 수학적 성향에 대한 절대적인 모습을 제시하지는 않는다. 그러나 다양한 수학적 상황에서의 학생들의 노력과 상호작용에 대한 장기간에 걸친 관찰은, 수업 방법을 수정하고, 학생들로 하여금 지적인 가치를 획득해가도록 하는데 필요한 피드백과 정보를 교사에게 줄 수 있다.

[부록] Bloom의 교육목표 분류학

Bloom과 그의 동료들은 학습을 크게 운동기능 학습, 인지적 학습, 정의적 학습으로 나누고 각 학습의 도달 수준을 분석하여 교육목표 분류학을 정의하였다.

① 운동기능 학습: 감각과 육체적 활동의 통합적인 조정을 수반하는 학습으로 수학 학습에서는 자와 컴퍼스를 사용하여 도형을 그리거나 측정을 할 때와 같은 제한된 범위에서 이루어진다.

② 인지적 학습: 정신적 또는 지적 활동을 요하는 학습으로서 학습의 결과로 지식이 축적된다. 즉 지식의 회상 또는 인지, 지적인 능력과 기능의 개발을 취급하는 목표들을 포함한다. 사실상, 수학에서 가르치고 배우는 것의 거의 전부가 인지를 수반한다.

③ 정의적 학습: 흥미, 태도, 기호, 열심, 책임, 가치의 변화와 감상력의 개발, 적절한 반응 등을 묘사하는 목표들을 포함한다.

1) 인지적 목표: 지식 · 이해 · 적용 · 분석 · 종합 · 평가

① 지식

재생에 의하여 아이디어나 자료 또는 현상을 기억해 내는 행동으로 단순히 기억하고 재생시키는 것만 요구하며, 이해의 어떤 수준(정도)을 요구하지 않는다. 수학적인 사실, 용어, 정의, 정리, 해법 등의 기억과 재생은 이 범주의 목표에 속한다.

[학습목표]	[평가문항]
㉠ 짝수의 뜻을 말할 수 있다. ㉡ 분수에서 분모와 분자를 구별할 수 있다. ㉢ 삼각형의 뜻을 말할 수 있다. ㉣ 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 말할 수 있다.	㉠ 짝수란 어떤 수인가? ㉡ 2/3에서 분자와 분모를 말하여라. ㉢ 어떤 도형을 삼각형이라고 하는가? ㉣ 삼각형의 넓이를 구하는 식을 말하여라.

② 이해

하나의 수학적 아이디어를 다른 수학의 아이디어와 꼭 관계 지을 필요 없이, 또 그것이 내포하고 있는 모든 관련된 의미를 인식할 필요가 없는 형태에서 그 수학적 아이디어를 사용할 때, 수학적 아이디어를 이해했다고 말한다. 이해력의 행동은 번역, 해석, 추정으로 분류된다. 번역은 어떤 자료를 원래와는 다른 언어, 용어 및 다른 형태의 자료로 바꾸어 놓을 수 있는 능력을 뜻한다. 해석은 자료를 아이디어들의 구성체로 보고, 이를 다루는 능력을 뜻하는 것으로 수학적 관계를 파악하는 능력 등이 포함될 수 있다. 추정은 자료에서 서술된 경향, 추세, 조건들을 해독하고 이에 입각해서 추측을 하거나 예언을 하는 것을 말한다.

[학습목표]	[평가문항]
㉠ 수에 짝수, 홀수의 이름을 붙일 수 있다. ㉡ 두 진분수의 합을 구할 수 있다. ㉢ 삼각형의 모양을 구할 수 있다. ㉣ 두 자연수의 최소공배수를 구할 수 있다.	㉠ 다음 중에서 짝수인 것을 찾아내어라. "8, 11, 13, 16, 19" ㉡ 진분수의 예를 두 개 들고, 또 그것의 합을 구하여라. ㉢ 삼각형 두 개를 하나는 크게, 다른 하나는 작게 그려라. ㉣ 다음 두 수의 최소공배수를 구하여라. "12, 8"

③ 적용

수학적 사실, 기능, 개념, 원리 등을 어떤 상황에서 적절하게 선택하고 사용할 수 있는 능력을 말한다. 학생이 어떤 추상 개념의 사용법을 자세히 배우고 그것을 실제로 해 보라고 구체적으로 지시되었을 때, 그것은 이해의 문제이지만, 해결 방안이 구체적으로 주어지지 않은 상황에서 그 추상 개념을 정확히 사용할 수 있을 때 그것은 적용인 것이다.

[학습목표]	[평가문항]
㉠ 비율의 개념을 적용할 수 있다. ㉡ 비례 배분을 적용할 수 있다.	㉠ 연필 3자루를 190원에 살 때와 2자루를 125원에 살 때, 어떻게 사는 것이 유리한가? ㉡ 900원을 갑, 을, 병 세 사람이 나누는데, 을은 갑의 2배를, 병은 을의 3배가 되는 비율로 나눌 때, 각각 몇 원씩 갖게 되는가?

④ 분석

자료를 그 구성 부분으로 분해하고, 부분간의 관계와 그것이 조직되어 있는 방법을 말한다.

[학습목표]	[평가문항]
㉠ 두 홀수의 합이 짝수가 됨을 설명할 수 있다. ㉡ 자연수에서 덧셈과 뺄셈의 관계를 설명할 수 있다. ㉢ 세 자리의 수를 십진법의 전개식으로 나타낼 수 있는 이유를 설명할 수 있다.	㉠ 두 홀수의 합이 짝수가 됨을 설명하여라. ㉡ 두 수의 곱셈을 덧셈으로 바꾸어 나타낼 수 있는 예를 보아라. ㉢ $345=300+40+5$로 나타낼 수 있음을 설명하여라.

⑤ 종합

하나의 독특한 구조나 체계를 구성하기 위하여 여러 가지 아이디어를 결합시키는 능력을 말한다. 예를 들면, 자연수, 정수, 유리수, 실수 등의 개념을 수 체계의 확장된 개념에서 볼 수 있는 능력을 종합이라고 볼 수 있다.

[학습목표]	[평가문항]
㉠ 이진법에서 덧셈 방법을 개발할 수 있다 ㉡ 피타고라스의 정리가 참임을 보일 수 있다.	㉠ 이진법에서 다음 두 수의 합을 구하는 과정을 개발하여라. $1011_{(2)}+1001_{(2)}$ ㉡ 피타고라스의 정리를 증명하여라.

⑥ 평가

아이디어들의 가치, 구조, 절차, 방법 등에 관해서 판단을 내리는 능력을 요구하는 가장 높은 수준의 목표이다.

[학습목표]	[평가문항]
㉠ 생활에서 수학의 가치를 판단할 수 있다. ㉡ 수 체계에서 0의 중요성을 설명할 수 있다.	㉠ 만약 수학을 전혀 알지 못한다면 생활에 어떤 영향이 있겠는가? ㉡ 수 체계에서 0이 없다면 수학을 하는데 있어서 어떤 제한점이 있겠는가?

2) 정의적 목표: 감수 · 반응 · 가치화 · 조직화 · 인격화

① 감수(감지, 자진 감수, 주의 집중)

㉠ 학습목표

ⓐ 수학의 발전에 대해서 과학과 과학자의 영향을 감지한다.

ⓑ 수학의 발전에 공헌한 여류 수학자와 그들의 공헌을 알 수 있다.

ⓒ 정수에 관한 학습의 중요성을 깨닫는다.

ⓓ 문제를 해결하는 방법 중에서 좋아하는 방법을 표현한다.

ⓔ 수학적 용어의 뜻을 주의 깊게 듣는다.

㉡ 평가문항

ⓐ 수학에서 새로운 아이디어를 개발한 사람은 누구인가?

ⓑ 수학에서 왜 정수가 필요한가? 또 그것들은 과학에서 어떻게 활용되는가?

ⓒ 연립방정식을 풀 때, 가감법 또는 대입법 중 어느 방법을 좋아하는가?

② 반응(묵종반응, 자진반응, 만족)

학생의 능동적인 수준의 참여를 요구하는 행(行)에 의한 학습 또는 능동적인 정의적 학습이다.

㉠ 학습목표

ⓐ 숙제를 제한 시간 내에 완성하기 위해 노력한다.

ⓑ 문제를 칠판 위에 풀려고 시도한다.

ⓒ 수학적 게임을 하는 것을 즐긴다.

ⓓ 수학의 응용에 대한 예를 찾는 것을 즐긴다.

㉡ 평가문항

ⓐ 숙제를 지정된 날까지 제출한다.

ⓑ 교사에 의해서 칠판 위에 해결하도록 지명 받으면 그렇게 한다.

ⓒ 수학적 게임을 만들고, 그것을 교실에서 할 수 있도록 교사에게 허락을 받는다.
ⓓ 수학을 생활에 응용한 예를 찾고 교실에서 소개한다.

③ 가치화(가치 수용, 가치 채택, 확신)

일관성과 안정성이 충분하여, 하나의 신념 또는 태도를 갖는다.

㉠ 학습목표
ⓐ 수학 학습의 가치를 인정한다.
ⓑ 수학 학습을 좋아하는 태도를 보인다.
ⓒ 수학공부에 헌신한다.

㉡ 평가문항
ⓐ 수업에 참여하고, 질문하고, 숙제를 해결하기 위해 노력한다.
ⓑ 수학문제를 해결하기 위해 도전하고, 수학클럽에 참여한다.
ⓒ 수학경시대회에 참여하고 많은 시간을 수학공부를 하는 데 할애한다.

④ 조직화(가치의 개념화, 가치 체계의 조직)

여러 가치를 하나의 체계로 조직하고, 그들 간의 상호 관계를 결정하며 지배적인 가치와 모든 경우에 통용되는 가치를 설정할 필요가 생기게 된다.

㉠ 학습목표
ⓐ 수학의 논리적 구조를 알기 위해 노력한다.
ⓑ 사회에서의 과학 발전과 수학의 긍정적 부정적인 효과에 대한 판단을 시도한다.

㉡ 평가문항
ⓐ 증명의 본질과 수학의 논리적 기초에 대한 논의를 수행하고, 수학의 발전에서의 그들의 가치를 설명한다.
ⓑ 사회에서의 과학 발전의 효과를 논의하는 글을 쓴다.

⑤ 가치 또는 가치복합에 의한 인격화(일반화된 행동 태세, 인격화)

가치는 일정한 구조로 내면화되며, 내면화된 이 일정한 구조는 개인의 특성으로 형성되어 간다. 일반화된 행동 태세는 개인이 어떤 특정한 순간에 접해질 때마다 일정한 방법으로 행동하여질 것이 기대될 수 있다. 인격화의 수준은 일반화된 행동 태세를 넘어 개인의 우주관, 인생철학, 세계관과 관련된 개인의 특성을 말한다. 학교에서의 교육목표는 보통 가치 또는 가치복합에 의한 인격화의 수준으로 설정하지 않는다. 왜냐

하면 오랜 기간에 걸쳐 형성되는 이 목표 수준은 제어하거나 예측하기가 매우 어려우며 또한 측정하거나 평가하기란 더욱 어렵기 때문이다.

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 수학과 평가의 일반적인 절차의 6단계는?

㉠ 평가를 하고자 할 때, 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다.

㉡ 두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가목적에 따라 평가하고자 하는 영역을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라, 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가영역의 교육목표를 설정하는 것을 말한다.

㉢ 세 번째 단계에서는 균형 있는 평가도구개발을 위하여 평가틀을 개발하는 것이다. 평가틀은 평가영역의 교육목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동영역과 내용영역, 평가 목표, 평가문항유형 그리고 각 요소별 문항출제비율 등을 포괄적으로 포함한다. 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정해야 한다.

㉣ 네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가틀에 부합하는 평가도구를 개발하는 과정이다. 평가도구개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따른 모범답안 및 채점기준을 개발하여야 한다.

㉤ 다섯 번째 단계에서는 평가를 실시한다.

㉥ 여섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고 난 후에는 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다. 끝으로 평가목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

2. 총체적 채점법의 정의와 그 특징은?

: 총체적 채점법이란 주어진 문제를 해결하는데 필요한 특정내용이나 과정에 대하여 풀이를 수준으로 나누어 하나의 점수를 부여하는 방법이다. 총체적 채점법의 특징은 다수의 학생들을 대상으로 빠르게 풀이과정과 결과를 동시에 채점할 때 효과적이다.

0점 – 〈시작도 하지 않은 경우〉 문제를 전혀 이해하지 못하여 해결의 실마리를 잡지 못하고 무의미한 기록만 제시되어 있다.
1점 – 〈접근〉 의미 있게 문제에 접근하여 어느 정도 문제를 이해하고 있음을 나타내고 있으나 일찍 곤란에 부딪혔다.
2점 – 〈본질〉 합리적인 답에 도달하였다는 충분한 세부적 증거가 있으나 중요한 실수나 잘못된 해석으로 답을 구하지 못하였다.
3점 – 〈결과〉 문제가 거의 해결되었으나 약간의 실수로 타당하지 않은 답을 얻었다.
4점 – 〈반성〉 적절한 방법으로 문제를 바르게 해결하였다.

3. 분석적 채점법의 정의와 그 특징은?

: 분석적 채점법이란 주어진 문제를 해결하는데 있어 필요한 단계를 구체화하여 각 단계별로 채점요소를 세우고 점수를 배당하는 방법이다. 분석적 채점법의 특징은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는데 많은 시간을 필요로 하지만 동일한 채점자 내에서도 일관성과 객관성을 유지할 수 있다.

4. 프로젝트의 특징은?

㉠ 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

㉡ 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고, 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고능력을 신장시킬 수 있다.

㉢ 프로젝트는 소그룹의 협동학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에(말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통능력을 신장시킬 수 있다.

5. 수학일지를 쓰게 될 때의 장점은?

: 자신이 배운 지식을 스스로 평가하면서 배운 내용, 쉽게 이해된 부분이나 이해하기 힘들었던 부분 등을 확인함으로써 자신의 지식 확립에 대한 유무를 스스로 반성하고 정확한 지식 소유를 유도할 수 있다.

6. 관찰 및 면담을 이용할 때의 장점은?

㉠ 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제집착력과 의지, 창의적 사고, 수학수업에의 참여 등이 정의적 영역의 평가를 하는데 용이하다.

㉡ 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다.

7. 자기평가의 정의와 구체적 방법 두 가지는?

㉠ 자기평가란 학생이 수학을 학습하는 과정에서 자신의 발전 상황을 스스로 감독하고, 자신의 수학적 지식과 태도를 평가하는 과정이다.

㉡ 방법 1 – 학생 자신과의 대화: 매 시간 학생 스스로 자신의 수학지식의 이해도 및 수학에 대한 태도를 짧은 형태로 기록하여 교사에게 제출하는 것으로 개인 일지이다.

㉢ 방법 2 – 학생 자신에게 질문하기: 수학문제를 해결하는 동안 학생들이 자기 자신에게 질문을 함으로써 자기를 감독하는 방법이다.

8. 가채점의 역할은?

: 가채점은 채점기준의 요소 중에서 채점자인 교사가 미처 생각하지 못하였던 채점요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고 미비한 부분을 보완하고 수정하기 위함이다.

9. 인지적 영역과 정의적 영역이란?

: 인지적 영역이란 수학적 지식 및 수학적 사고방식과 관련된 지적인 특성이며, 정의적 영역이란 수학에 대한 전형적인 태도 및 감정 표현의 방식과 관련된 특성이다.

10. 정의적 영역의 하위 영역은?

: 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제집착력과 의지, 창의적 사고, 수학수업에의 참여 등 다양한 하위 영역으로 구분할 수 있다.

정의적 영역	세부 항목
수학에 대한 흥미와 호기심	· 수학을 하는 것을 즐거워한다 · 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다 · 수학수업시간을 기다린다 · 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다
수학에 대한 자신감	· 수학공부에 자신감을 가지고 있다 · 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다 · 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다 · 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다
수학에 대한 불안	· 수학수업이 어려울까봐 걱정한다 · 수학성적이 나빠질까봐 걱정한다 · 수학문제를 풀 때 긴장한다
수학의 유용성 인식	· 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다 · 수학이 사고력을 기르는데 도움이 된다고 생각한다 · 수학이 나중에 공부하는데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다 · 수학이 나중에 직장 생활을 하는데 도움이 된다고 생각한다
과제집착력과 의지	· 수학공부를 열심히 한다 · 수학시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다 · 수학문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다 · 수학공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다
창의적 사고	· 다른 사람의 방법을 그대로 따라하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다 · 수학문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다 · 수학문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다 · 수학문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다
수학수업에의 참여	· 수학수업시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다 · 수학수업시간에 다른 생각을 한다 · 수학수업시간에 발표를 많이 한다 · 수학문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.

07

교구 및 공학 활용

박혜향의 수학교육론 바이블

* 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정[2] *

4. 교수 · 학습 방법

파. 수학교수 · 학습과정에서 교육기자재 및 수학교과 교실의 활용은 다음 사항에 유의한다.

(1) 교수 · 학습의 전 과정을 통하여 적절하고 다양한 교육 기자재를 활용하여 수학 학습의 효과를 높이도록 한다.

(2) 계산능력 배양을 목표로 하지 않는 경우의 복잡한 계산수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 활용한다.

(3) 구체적인 조작과 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하고 수학주제에 대해 모둠으로 토론함으로써 수학 학습의 효율을 높일 수 있도록 수학교과교실을 구축하여 활용한다.

5. 평가

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

1. 교구 활용[3]

1.1. 수학 학습과 교구

1) 수학교육의 문제점

① 초등학교 고학년부터 추상화, 형식화가 빠르게 진행되고 있다.
② 기초기본이 결여된 채 학습결손이 누적되어 중학교 이후의 수학 학습에서 수학기피증 추세가 더욱 심화되고 있다.
③ 학습자가 보다 높은 수준으로 이행하는 데 적절한 단계를 거치지 않고 있다.

2) 2015 개정 교육과정에는
'㈎ 수학과의 수업은 학생의 능력과 수준 등을 고려하여 설명식 교수, 탐구 학습, 프로젝트 학습, 토의 · 토론학습, 협력학습, 매체 및 도구 활용학습 등을 적절히 선택하여 적용한다'에 '⑥ 매체 및 도구 활용학습은 학생의 수준과 학습내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수 · 학습방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다'가 명시되어 있다.
그리고 '㈔ 정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수 · 학습에서는 다음 사항을 강조한다'에서 '③ 계산능력 배양을 목표로 하지 않는 교수 · 학습 상황에서는 복잡한 계산수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있게 한다'가 명시되어 있다.
또한 '평가 방법'에는 '㈑ 평가내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다'가 명시되어 있다.

3) 학교수학과 교구에 관한 더 자세한 내용은 다음을 참고할 수 있다.
김남희 저, 『학교수학과 교구』, 경문사, 2008.

④ 학습자에게 점진적으로 추상화, 형식화하는 데 필요한 학습자의 활동을 생략하거나 소홀히 하고 있다.

2) 조작 교구를 통한 수학교육 문제점의 해결책

초등학교에서부터 적절한 단계에서 효율적인 조작 교구를 사용하여 구체와 추상 사이의 가교 역할을 하는 활동이 이루어져야 한다.

3) 다양한 교구 활용에 대한 이점

① 수학 학습과정에서 다양한 교구의 활용에 의한 구체적 조작 활동은 그 자체가 학습내용이 된다.
② 수학적 개념 · 원리 · 법칙 등이 포함된 교구 활동 그 자체를 통해 1차적으로 심상(mental object, image)이 형성되고 이후 2차적으로 수학적 지식이 형성되므로, 기억에 오래 남고 학습자 자체 활동을 통해 지식이 확장될 수 있다.
③ 다양한 교구의 활용은 수학적 개념 형성이나 원리 · 법칙 · 용어 등의 바른 이해, 지식이나 기능의 숙지, 판단이나 설명의 근거 마련, 연산 또는 도형의 성질 발견 · 확인 및 발전, 도형의 관찰 관점이나 방법의 숙지 등을 돕는다.
④ 문제해결과정에서 문제의 파악이나 해결방안의 구상 및 여러 가지 규칙의 탐구 활동을 돕는다.

4) 다양한 교구 활용 시 주의해야 할 일반적인 사항

① 교구는 수학 학습을 도와주는 보조도구일 뿐 수학 학습 자체가 아님을 알고 수학 학습 전개의 도구로만 활용한다.
② 교구에 의해 얻어지는 모든 지식이 그 주어진 상황에서는 참일지라도 모든 상황에서도 참 일거라 믿지 않도록 한다.
③ 학생들이 교구를 통해 얻으려는 수학 학습내용이 아닌 교구 활용 쪽으로만 관심을 돌리지 않도록 한다.

5) 교구 활용과 가장 관계있는 철학: 활동주의 수학교육[4)]

① 교육의 초기에는 구체적 활동을 위한 다양한 교수가 필요하다.
② 수학을 발생적으로 학생에게 학습시키려고 하면 그에 이어지는 일련의 활동을 하도록 해야 하며, 그렇게 하기 위해서는 그러한 활동을 유발시킬 수 있는 구체적 상황에 학생이 직면하도록 할 필요가 있는데 이러한 상황에 적합한 것이 교구이다.
③ 구체적 조작기의 초등학생은 구체적 · 물리적 활동에 참여하기 위해 교구를 직접 다루어야 한다.

6) 조작 교구 선택의 교육적 고려점(Robert E. Reys, p.7)

① 교구는 탐구된 아이디어나 수학적 개념의 진실한 구체화를 제공해야 한다.
② 교구는 수학적 개념을 명백하게 표현해야 한다.
③ 교구는 동기유발에 적절해야 한다.
④ 교구는 되도록 다목적용이어야 한다.
⑤ 교구는 추상화의 기초를 제공해야 한다.
⑥ 교구는 개개인의 조작 기회를 제공해야 한다.

1.2. 대수타일(Algebra tiles)을 이용한 수학 학습

대수타일은 딘즈블록, 즉 다진수블록(Multibase Arithmetic Bolck; MAB)의 아이디어를 변형한 것으로 두 개의 변수를 나타내는 타일을 이용하여 다항식의 전개나 인수분해의 지도에 주로 사용되는 교구이다(김남희, 1999). 변수의 개념을 직접적인 조작활동을 통해 다룰 수 있게 하는 대수타일은 비교적 최근에 소개된 교구이지만 이미 많은 수학교사들에게 '대수막대'라는 이름으로 널리 알려져 있으며 우리나라 제 6차 수학교육과정에 따른 수학교과서에서는 다항식의 전개와 인수분해과정을 지도하는 방법의 예로 대수타일을 이용한 조작활동을 제시하고 있다(김연식, 김흥기, 1996, p.62). 교육과정에 따른 교과서의 내용에 대수타일의 활용이 제시되어 있는가의 여부와 상관없이 실제로 대수타일을 자체 제작하거나 종이로 만들어 학교수학 수업에 활용하고 있는 교사들도 많이 있다.

4) 수학은 수학자라는 인간이 스스로 창조해 나가는 사고활동이고 따라서 학생의 내부에서 재창조하는 형태로 학습시켜야 한다(외재적 수학관).

1) 대수타일의 구성

① 대수학습에 이용되는 구체적 조작물인 대수타일은 다항식의 연산 및 다항식의 곱셈과 인수분해 도입에 유용한 지도방법을 제공하는 것으로 알려져 있다.

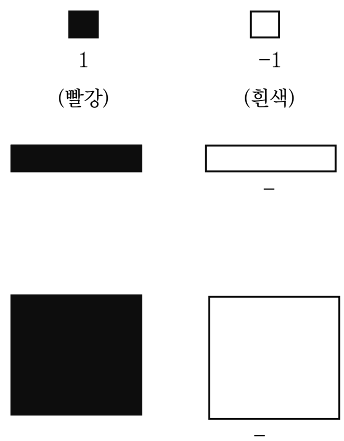
② 대수타일의 기본 세트는 다음의 세 가지 유형의 타일들로 구성된다.

〈대수타일 기본세트〉

1과 −1을 나타내는 정사각형 모양의 타일 (1×1 크기)

x 와 $-x$를 나타내는 직사각형 모양의 타일 (1×x 크기)

x^2 과 $-x^2$를 나타내는 정사각형 모양의 타일 (x×x 크기)



③ 대수타일에서 양수와 음수의 구분은 타일의 색에 기초한다.

④ 두 개의 변수를 다루는 대수식을 학습하거나 다른 변수를 나타내기 위해 다른 색과 다른 크기로 된 타일을 첨가한다.

〈두 개의 변수를 다루기 위한 대수타일의 크기 비교〉



⑤ 대수타일은 1, x, y의 길이의 비가 정수비가 되지 않도록 만들어져야 한다. 그 이유는 다항식의 인수분해에서 같은 문제에 대해 서로 다른 답안이 나오는 것을 방지하기 위함이다.

2) 대수타일의 사용

(1) 대수타일 사용의 문제점

① 시중에 판매되고 있는 것은 색의 구분이 분명하고 다루기 편하며 견고하다는 이점이 있지만 가격면에서 반의 모든 학생들에게 한 세트씩 주기가 어렵다.

② 학생들이 같은 크기의 다른 색을 가진 타일을 일찍 접하게 되므로 학생들의 학습속도와 이해 수준, 준비도에 상관없이 학생들로 하여금 너무 빨리 음수를 의식하게 하여 음수에 대한 명확한 이해 없이 그것을 다루도록 부추기게 된다.

(2) 대수타일 사용 시의 유의점

① 대수타일을 학습에 이용할 때에는 먼저 하나의 변수만을 다루는 기본 세트를 가지고 조작활동을 하는 것이 바람직하다.

② 대수타일을 이용해서 하나의 변수를 가진 대수식의 조작을 쉽게 다루게 되면 두 개의 변수가 포함된 대수식을 학습하기 위해 다른 색과 다른 크기로 된 타일을 첨가한다.

③ 예를 들어, x와 y를 모두 포함하는 대수식을 다루려면 y, y^2, xy를 나타내는 타일을 첨가하여야 한다. 단 일정 시간 동안 이런 타일들을 보여주지 말아야 한다.

④ 대수타일을 전부 주고 학습을 시작하는 것보다는 학습내용과 순서에 맞게 필요한 타일

들을 점차로 추가하면서 지도를 해 나가는 것이 바람직하다.

⑤ 종이를 이용할 때는 종이가 비록 견고하지 않지만 모든 학생들이 한 세트씩 가지고 직접 조작을 해 볼 수 있고 필요한 타일에 해당하는 종이를 학습에 맞게 하나씩 차례로 제시함으로써 교사가 음수의 아이디어를 다루려고 할 때까지 학생들로 하여금 음수에 주목하지 않게 제어해야 한다.

3) 학교수학에서의 대수타일 활용

다항식의 연산 및 다항식의 곱셈과 인수분해 도입에 유용한 지도방법을 제공하는 대수타일은 학생들에게 다항식을 구체적인 대상(a concrete referent) 즉, 타일을 통해 다루게 함으로써 그들이 하는 수학이 실제적인 조작활동 속에서 의미를 가질 수 있도록 도와준다.

(1) 대수타일 학습 4단계[5)]

타일 그 자체를 다루는 행동 ➡ 타일을 다룬 행동의 묘사 ➡ 행동의 묘사에 대한 기호 사용 ➡ 기호 위에서 행해지는 전통적인 대수 조작

(2) 교사를 위한 일반적인 지도순서

① 타일의 이름 정하기

교사는 학생들에게 대수타일에 학생들이 원하는 이름을 짓도록 하여 학생들이 정한 규약에 따라 수학의 내용을 전개하는 경험을 해 보도록 해야 한다. 각 반별로, 각 그룹별로 타일의 이름을 다르게 결정하는 것도 허용되나 같은 크기와 같은 색깔의 타일에는 같은 이름을 주어야 한다는 사실을 학생들이 인식할 수 있도록 지도해야 한다. 왜냐하면 그것들이 수학에서 같은 방식으로 사용되기 때문이다[6)].

② 합의 구성 및 표현

학생들은 세 종류의 기본적인 타일들을 적당히 합한 후에 그에 대한 이름을 써 보도

---

5) 이 단계는

구체적인 행동에서 출발하여 ➡ **행동에 대한 영상적 표현이 있은 후** ➡ **기호적 표현을 구성하고** ➡ **기호들 위에서 형식적인 행동들이 수행되는 것**

의 방법을 따른 것이다.

6) 이러한 지도과정 속에서 수학에서 무언가를 대신하는 이름으로서 사용되는 변수의 개념의 지도가 포함될 수 있다.

록 하고 그 과정을 통해 '합'에 들어 있는 모든 성분들을 잘 나타낼 수 있는 적절한 이름을 정하는 규칙을 만든다. 이때, 축약어나 기호를 사용하는 것이 효과적이다.



$2BS+3R+5$

$2R^2+3R+5$

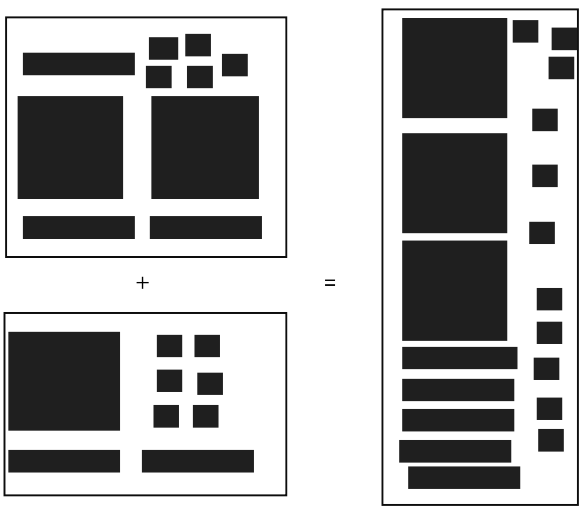
$2x^2+3x+5$

학생들로 하여금 타일들을 여러 가지 방법으로 합해 보도록 하고 그 합에 대한 기호 표현을 써보도록 한 뒤 각 타일의 이름을 편의상 1, x, x^2 으로 통일하여 부른다.

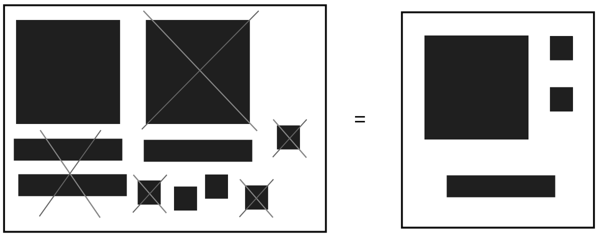
③ 다항식의 합과 차의 지도

각 학생(혹은 각 그룹)이 만든 타일의 합과 다른 학생(혹은 다른 그룹)이 만든 타일의 합을 합쳐보도록 한다. "그 결과를 어떻게 부를 것인가? 그것들을 합한 행위를 어떻게 나타낼 것이며 어떻게 기록할 것인가?" 또한 어떤 합에서 몇 개의 타일을 제거해 보도록 한다. "그 결과를 어떻게 부를 것인가? 어떤 합에서 몇 개를 빼는 행위를 어떻게 나타낼 것이며 어떻게 기록할 것인가?"이러한 문제 제기를 통해 교사는 바로 다항식의 합과 차의 아이디어를 도입할 수 있다.

예 $(2x^2+3x+5)+(x^2+2x+6)=3x^2+5x+11$



예 $(2x^2+3x+5)-(x^2+2x+3)=x^2+x+2$

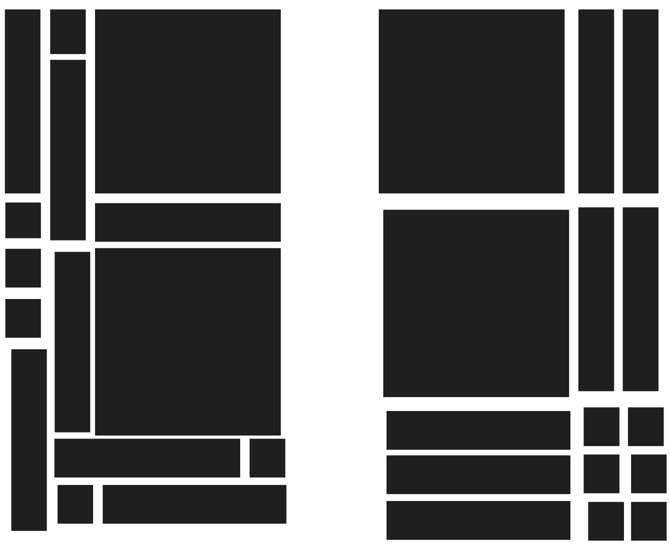


학생들로 하여금 타일을 가지고 위와 같은 활동을 여러 번 해 보도록 하고 합과 빼는 행동을 위와 같은 그림으로 그려보도록 한 후, 그 행동과 그림에 대한 기호표현을 써 보도록 한다[7].

④ 주어진 타일로 직사각형 구성하기

2개의 x^2, 7개의 x, 6개의 1로 하나의 집합을 만들어보고, "이 집합을 어떤 이름으로 칭할 것인가?"를 발견하도록 한다. 그것이 $2x^2+7x+6$ 으로 표현될 수 있다는 것을 알고 있으므로 학생들로 하여금 그 집합이 직사각형의 모양이 되도록 타일을 다시 배열해 보도록 한다.

예 같은 타일들로 만들어진 직사각형



7) 몇몇 학생들은 행동을 그림으로 그리는 것을 하지 않고 기호로만 쓰려고 할 수도 있다. 그렇다면 그것을 허용할 수 있으나 이로 인해 학생들이 타일을 옮기고 그것을 그림으로 그려보는 행동들이 '좋지 않은' 학습방법이라는 생각을 갖게 되지 않도록 교사가 신경을 써야 한다. 그 이유는 어떤 수준에라도 학습이 가장 수월하게 이루어지기 위해서는 우선 구체적인 행동에서 출발한 영상적 표현이 있은 후 그러한 행동에 대한 기호적 표현이 있고 기호들 위에서 형식적인 조작이 이루어진 것이 바람직하기 때문이다.

[규칙 1] 큰 정사각형(x^2)과 작은 정사각형(1)은 서로 같은 행이나 열에 놓을 수 없다.
[규칙 2] 작은 정사각형(1)들은 모두 함께 모여 있어야만 한다.

⑤ 직사각형의 가로, 세로 측정

아래 그림처럼 안쪽에 놓인 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $2x+3$, $x+2$이다. 만약 학생이 이해하기 힘들어한다면 '교차선(crossed lines)'을 사용하도록 한다.

$$2x^2+7x+6=(x+2)\times(2x+3)$$





⑥ 다항식의 인수분해 지도

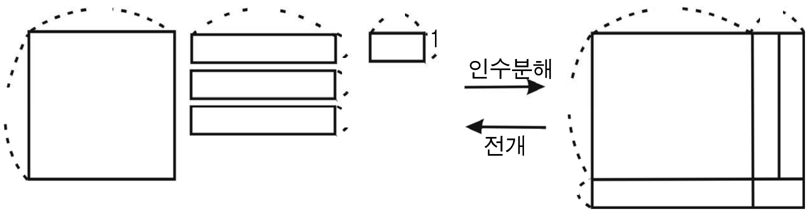
교사는 우선 학생들에게 주어진 타일로 직사각형을 만들고, 그 행위를 그림으로 나타내 보고, 직사각형의 가로와 세로의 길이를 측정한 것을 기호로 써보는 연습을 충분히 할 수 있도록 시간을 제공한다. 만약 그림으로 나타내는 것에 싫증을 보인다면 아래 표와 같은 기호를 소개할 수도 있다.

×	$2x$	3
x	$2x^2$	$3x$
2	$4x$	6

직사각형의 분석을 통해 직사각형의 넓이와 가로 및 세로 길이 사이의 관계를 대수식으로 표현할 수 있게 되면 학생들은 구체적 조작을 통해서 2차식의 인수분해 아이디어를 경험하게 되는 것이다. 이 단계에서 인수분해 및 인수의 개념과 용어에 대한 지도가 반드시 필요한 것은 아니다. 위의 지도는 학생의 학습단계와 교사의 지도계획에 따라 적절한 시기에 도입될 수 있다. 분명한 것은 대수타일을 이용한 구체적 조작의 경험은 학생들이 인수분해의 개념을 형식적으로 다루게 될 때 인수분해를 실제적인

조작의 의미와 관련지어 쉽게 파악할 수 있도록 안내한다는 것이다.

예 다음 그림을 참조하여 x^2+3x+2를 인수분해 하여라.



⑦ 다항식의 전개

학생들에게 타일을 이용하여 두 가지의 길이를 주고 “이 각각을 가로와 세로의 길이로 하면 어떤 타일 모양으로 직사각형이 구성될까?”라는 문제를 제기하면서 표나 그림을 이용하게 한다.



<다항식의 전개>

×	$2x$	3
x	$2x^2$	$3x$
2	$4x$	6

마지막 단계에는 그 결과를 식 $(x+2)\times(2x+3)=2x^2+7x+6$와 같이 형식적인 방법으로 표현해 보도록 한다.

(예) 중학 수학의 곱셈공식을 지도할 때 대수타일을 이용

⑧ 음의 계수를 다루는 뺄셈

큰 수에서 작은 수를 빼던 작은 수에서 큰 수를 빼던 음수로 사용되는 종이는 다른 색으로 하여 준비한다. 학생들에게 음수로 지정할 타일이 무엇인지에 대한 설명을 해주고

“$(2x^2-3x-7)-(x^2-5x-3)$의 결과는 어떻게 될까?”

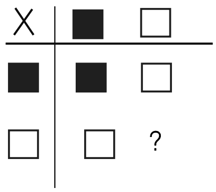
라는 문제를 던져보고 모든 학생들이 대수식으로 바르게 써 낼 수 있는지를 체크한다.

<어떻게 될까요?>



⑨ 음수의 곱셈 규칙

우선 학생들로 하여금 교차선이 있는 타일판 위에 적당한 타일들을 놓으면서 새롭게 도입된 음수타일이 곱셈을 하는 경우에 어떻게 조작되는지를 이해시킨다. 몇 가지 경우를 그려보거나 필요하다면 기호를 사용해서 지도해 볼 수도 있다.



⋮

$(-1)\times 1=-1$

$(-1)\times 0=0$

$(-1)\times(-1)=1$

⋮

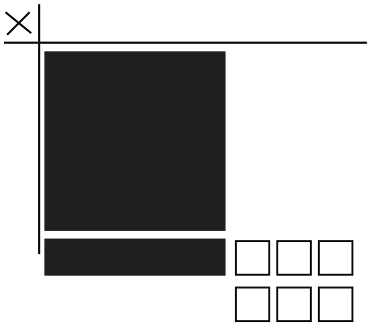
1×1은 1이 하나 있음을 의미하므로 그 결과를 1로 나타내고, $(-1)\times 1$은 -1이 한 개 있음을 의미하므로 그 결과를 -1로 나타낸다는 식으로 설명한다. 이제 $(-1)\times(-1)$의 곱셈 결과를 결정해야 하는데 귀납적 사고를 유발시켜 피승수가 음수일 때 승수가 1씩 감소하면 그 결과가 1씩 증가한다는 규칙을 발견하게 하고 이를 일반화하여 $(-1)\times(-1)$의 곱셈 결과가 1이 되어야 함을 인식하도록 한다.

⑩ 음의 계수를 가진 다항식의 인수분해 지도

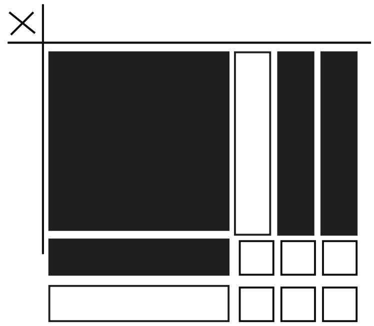
대수타일을 가지고 직사각형을 만들고 직사각형의 가로와 세로의 길이를 이용해 넓이에 관한 식을 구성함으로써 2차식의 인수분해 아이디어를 경험한 학생들은 음의 계수를 가진 다항식의 인수분해를 할 때, 직사각형을 구성하는 과정에서 어려움에 부딪치게 된다. 여기서 교사가 음수가 포함된 다항식의 곱셈을 직사각형으로 구성해내는 과정을 설명하기 위해 약간의 기교를 써야 한다.

i) 학생들에게 x^2+x-6과 같은 음수를 가진 다항식을 주고 이 식을 나타내는 타일들을 가지고 교차선 안쪽에 직사각형을 구성해 보도록 한다.

ii) 학생들은 (여러 번의 시행착오 끝에) 심미적 [규칙 1], [규칙 2]를 적용하여 [그림 1]과 같은 직사각형을 만들 것이다. 이때 직사각형이 되기 위해서 채워져야 할 남은 공간을 어떻게 해야 할지가 문제이다. 이때, 같은 만큼 더한 것과 뺀 것은 변함이 없음을 강조하여 [그림2]를 찾도록 유도한다.



〈그림1〉

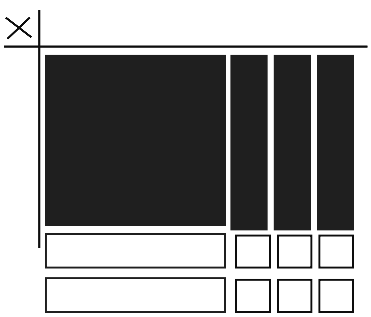


〈그림2〉

그런데 [그림2]에서는 가로와 세로의 길이를 측정하기가 어렵다. 문제는 학생들이 '직사각형의 가로와 세로의 길이를 명확히 볼 수 있는 배열이 어떤 것인가 즉, 인수를 찾기 쉬운 타일의 배열은 어떤 것인가'의 문제를 해결해야 하는 것이다. 이를 위해 다음 규칙을 제시한다.

[규칙 3] 직사각형 안에 x 타일이 있는 어떤 열이나 행을 보아도 모두 같은 색의 x 타일이 놓여져 있어야 한다.

위와 같은 방법으로 학생들은 음수가 포함된 다항식의 인수분해를 해결하기 위해 주어진 타일과 0의 개념[8]을 이용해 직사각형을 만들고, 그 행위를 그림으로 나타낸 후, 직사각형의 분석을 통해 $x^2+x-6=(x-2)\times(x+3)$과 같은 형식적인 대수식을 기호로 써보는 연습을 충분히 할 수 있어야 한다. 여기서도 교사는 아래 표와 같은 기호 표현을 소개할 수 있다.



<그림3>

<인수분해>

×	x	3
x	x^2	$3x$
-2	$-2x$	-6

8) 0이란 같은 것을 더한 만큼 같은 것을 빼면 가능하다.

다음을 대수타일을 이용하여 계산하여 보시오.

▸ $(x+1)(x+3)$

▸ $(x+4)(x+2)$

▸ $(x+5)(x+1)$

▸ x^2+5x+4

▸ $2x^2+7x+3$

1.3. 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석

1) 수학교실에서의 기하판 활용[9)]

(1) 기하판

① 학생들의 도형학습을 돕기 위해 영국의 가테그노(C. Gattegno)가 고안한 조작도구이다.

② 기하판에는 가장 간단한 하나의 정사각형 나무판에 9(3×3)개의 못을 모눈의 위치에 박은 것으로부터 시작해 4×4, 5×5, … 개의 격자점(정사각형의 꼭지점)에 못을 박은 기하판을 얼마든지 만들 수 있다.

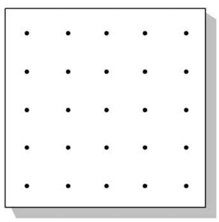
③ 기하판에는 연속되는 정삼각형의 꼭지점에 못을 박은 정삼각 격자 기하판, 원주 위에 같은 간격으로 못을 박은 원형 기하판 등도 있다.

(2) 수학 학습에서 기하판 활용의 의의(정동권, 2000, pp. 17-18)

① 다양한 도형의 구성과 수정이 용이하다.

예 여러 가지 다각형 구성

오른쪽 그림의 5×5 기하판 위에



• 변이 4개이고 그 중 두 변의 길이가 같은 도형을 구성하여라.

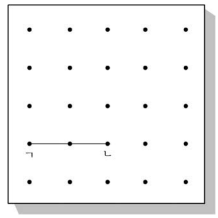
• 변이 12개이고 모두 길이가 같은 도형을 구성하여라.

• 변이 5개이고 그 중 4변의 길이가 같은 도형을 구성할 수 있는가? 구성할 수 없다면 왜 그런가?

9) '기하판'이란 영어의 'geoboard'를 번역한 용어이다. 우리나라 7차 교육과정에서는 '점판'이라는 용어로 사용하고 있다. 이 밖에도 도형판, 못판 등의 용어도 생각할 수 있다. 그리고 이와 유사한 것으로는 점을 격자점의 위치 또는 등 간격으로 종이에 찍어 놓은 '점 종이(dot paper)', 기하판을 종이에 옮겨 그린 '종이 기하판(paper geoboard)'등도 있다.

예 다양한 삼각형 구성

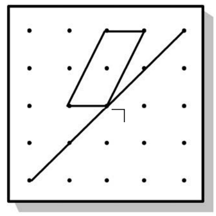
오른쪽 그림과 같은 기하판에서, 선분 ㄱㄴ을 한 변으로 하는 삼각형을 되도록 많이 구성해 보아라. 이등변삼각형, 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형을 각각 몇 개씩이나 만들 수 있는가?



② 동적(動的) 기하 학습이 가능하다.

예 도형의 이동

오른쪽 그림에 주어진 도형을 지정된 선분이 대칭축이 되도록 이동한 새 도형을 구성하여라. 그리고 점 ㄱ이 중심이 되도록 각각 90도, 180도 회전한 도형을 구성하여라. 그리고 그 과정을 설명하여라.

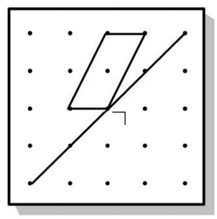


③ 공간 감각의 형성 · 발달에 적합하다.

기하판 위에서 고무줄의 다양한 조작에 의해 도형을 구성 · 묘사하고, 이동(옮기기, 뒤집기, 돌리기)하고 측량하며, 상상 · 비교하고, 분류함으로써 기하학적 관계를 발견하는 경험을 통한 공간감각의 형성 · 발달을 기대할 수 있다.

예 도형 상호관계 인식

오른쪽 그림에서 주어진 직사각형을 이용하여 평행사변형, 마름모, 사다리꼴을 각각 구성하여라.

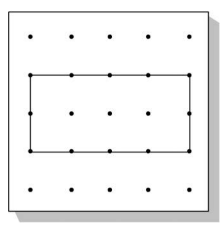


예 대칭이 도형의 구성

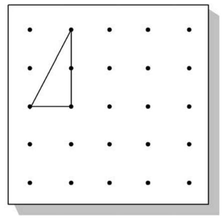
오른쪽 그림에 주어진 도형에 대하여, 가능한 대칭축을 만들고 처음 도형과 선대칭인 도형을 구성하여라. 그리고 적당한 대칭의 중심을 택하여 점대칭인 도형도 구성하여라.

④ 평면도형의 넓이와 둘레 및 그들 사이의 관계 탐구를 돕는다.

정사각형 격자 기하판 위에 구성한 닫힌 꺾은선 도형은 모두 그 넓이를 구할 수 있기 때문에, 이는 평면 도형의 넓이 지도에서 유효하게 활용할 수 있다. 특히 기하판 활동은 그 위에서의 선분의 길이와 단위정사각형의 넓이에 대한 약속 및 등적변형 방법을 바탕으로 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 사

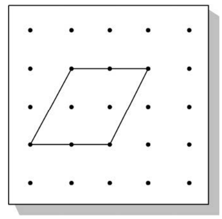


다리꼴 및 마름모 등의 넓이 사이의 관계 탐구에 적합하여 관계적 이해를 도울 수 있다.



예 평행사변형의 구적 공식 발견 및 설명

오른쪽 그림에 제시된 평행사변형의 넓이와 밑면의 길이, 높이를 각각 알아보아라. 다른 평행사변형을 더 구성하여 넓이와 밑변의 길이, 높이를 알아보고, 이들 사이에 어떤 규칙이 있는지 찾아보아라. 평행사변형의 밑변과 높이 각각을 가로와 세로로 하는 직사각형을 구성하여 그 넓이 사이에 어떤 관계가 있는지 알아보아라. 그리고 왜 그렇게 되는지 설명해 보아라.



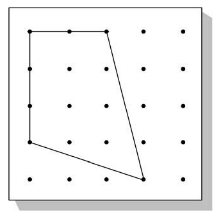
⑤ 다답형(open-ended problem) 문제의 설정에 유효하다.

예 다양한 크기의 정사각형 구성

7×7 기하판에 넓이가 서로 다른 정사각형을 되도록 많이 구성하여라.

예 펜토미노 구성, 등적사각형 구성

7×7 기하판에 그 넓이가 5이고 모든 각(내각 또는 외각)이 직각인 도형으로, 서로 합동이 아닌 도형을 되도록 많이 구성하여라. 그리고 오른쪽 그림에 주어진 사각형과 넓이가 같은 사각형을 구성하여라.

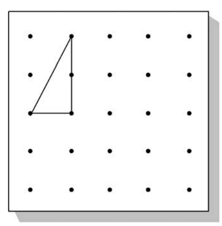


⑥ 좌표기하의 기초 학습에 유효하다.

직선의 기울기에 대한 직관적 표현으로 가로, 세로로 변화된 칸 수를 생각할 수 있다. 이는 좌표기하를 학습하기 위한 기초적 경험으로 아주 많은 도움이 된다.

예 도형의 옮기기와 돌리기

오른쪽 그림에 주어진 도형을 오른쪽으로 3칸, 아래로 2칸 이동한 다음, 가장 작은 각이 있는 꼭짓점을 중심으로 90도 회전하여라. 처음 도형과 그 위치를 비교해 보아라.



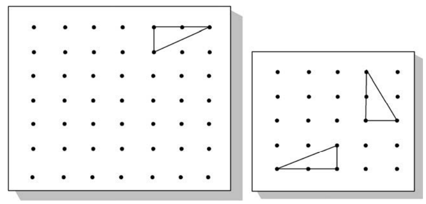
⑦ 도형의 합동과 닮음의 개념 및 관련 기본 성질 탐구에 적합하다.

기하판 위에 대응하는 변의 길이가 2배, 3배 되는 도형을 구성하여 그들 사이의 여러 가지 관계를 탐구해봄으로써, 도형의 닮음과 닮음비에 대한 개념 이해뿐 아니라, 각의

크기의 불변성도 인식할 수 있고 이들 사이의 관계를 쉽게 설명할 수 있다.

예 삼각형의 닮음

오른쪽 그림과 같은 7×7 기하판에 주어진 삼각형과 닮은 삼각형을 두 개만 더 구성하여 각 변의 길이 및 넓이를 비교하여라.



예 삼각형의 합동

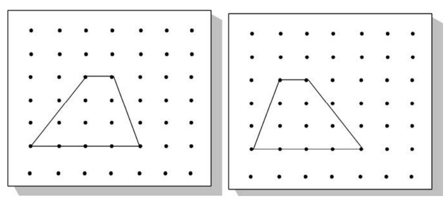
2번째 그림의 두 삼각형이 합동임을 설명하여라.

⑧ 등적변형이 대단히 용이하다.

기하판 위에서는 어떤 도형의 넓이는 바뀌지 않게 하면서 모양과 위치를 변화시키는 것이 고무줄 조작에 의해 용이하다. 단 새로운 어떤 도형의 넓이에 대해 학습할 때마다 아직까지 그 도형의 구적 공식을 몰라서 넓이를 구할 수는 없으므로, 그 도형을 이미 학습하여 넓이를 구할 수 있는 다른 도형으로 등적(또는 배적)변형해야 한다.

예 사다리꼴의 등적변형

오른쪽 그림의 사다리꼴과 같은 넓이를 갖는 삼각형과 직사각형을, 그리고 넓이가 2배인 평행사변형을 각각 구성하여라.



오른쪽 그림의 사다리꼴과 넓이가 같은 평행사변형을 구성하여라. 넓이가 같다는 것을 설명하여라.

⑨ 기하학적 추론능력 개발에 적합하다.

기하판에서는 도형의 정의나 기본 성질을 바탕으로 근거를 제시하면서 정당성을 밝혀 나가는 것이 가능하다.

⑩ 수학적 의사소통을 돕는다.

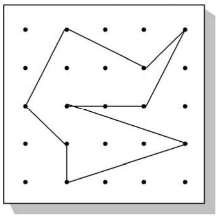
수학적 용어나 기호를 그다지 사용하지 않고서도 직접 남에게 자신의 견해를 설명하기에 적합하다. 짝끼리의 협동학습에서도 다양한 의견 교환이 자연스럽게 이루어지는 것이 대부분의 경우이다. 짝 활동이나 소그룹 활동을 한 후 해결이나 조작 과정 또는 결과를 발표할 수 있는 기회가 제공된다면 학생들 사이에 사회적 상호작용이 일어나고, 그런 과정에서 새로운 지식을 구성해갈 수 있을 것이다.

⑪ 문제 만들기 활동을 위한 조작 도구로 활용할 수 있다.

⑫ 패턴 탐구 활동 자료로 적합하다.

예 선분과 정사각형의 수에 대한 규칙

5×5 기하판에 길이가 서로 다른 선분을 몇 개나 만들 수 있는가? 또, 넓이가 서로 다른 정사각형은 몇 개 만들 수 있는가? 이와 같은 사실을 일반화할 수 있는가?



예 피크의 정리(Pick's Theorem)

기하판(또는 보다 격자가 많은 점종이)에 여러 가지 다각형을 구성하고, 내부에 포함된 점의 수, 경계에 놓인 점의 수, 그리고 넓이사이에 어떤 관계가 있는지 알아보아라. 그것을 이용하여 오른쪽 그림에 주어진 도형의 넓이를 구하여라.

⑬ 학생의 능동적인 참여와 수학에 대한 안목의 변화를 기대할 수 있다.

⑭ 문제해결과 수학적 사고 능력을 발달시킨다.

2) 학교수학에서의 기하판 활용[10)]

(1) 문제해결전략의 사용

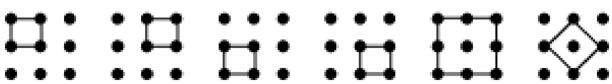
기하판 위에서 실제로 문제의 내용을 실행(acting put)해 보면서 목록이나 표를 만들어 패턴을 찾아가는 문제해결전략을 사용할 수 있다.

예 2×2 기하판의 경우

2×2 기하판에서는 단 하나의 정사각형이 구성된다. 그리고 이 정사각형은 기하판의 밑변에 평행하다.

예 3×3 기하판의 경우

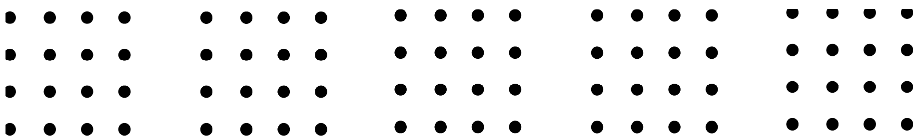
3×3 기하판에서는 모두 6개의 정사각형이 구성된다. 이 중 5개만이 기하판의 밑변에 평행하다. 정사각형의 종류는 아래에 보는 바와 같이 3종류이다.



10) 대한수학교육학회지 『학교수학』 제 3권 제 1호 김남희(전주대학교) 내용 정리.

예 4×4 기하판의 경우

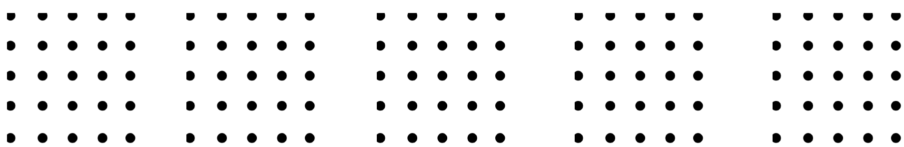
여러 가지 크기의 정사각형을 아래의 점판에 그려보고 그 정사각형이 총 몇 개씩 구성되는지를 기록하여보자.



총 개수= 총 개수= 총 개수= 총 개수= 총 개수=

예 5×5 기하판의 경우

5×5 기하판 위에 구성될 수 있는 모든 정사각형을 찾아보자. 기하판의 밑변에 평행하면서 서로 크기가 다른 정사각형을 찾고 그러한 정사각형이 총 몇 개인지를 구하는 것부터 시작하자. 다음에는 기하판의 밑변에 평행하지 않은 정사각형을 찾고 그러한 정사각형의 총 개수 구하는 것을 해 보자. 여러 가지 크기의 정사각형을 아래의 점판에 그려보고 그 정사각형이 총 몇 개씩 구성되는지를 기록하여라.



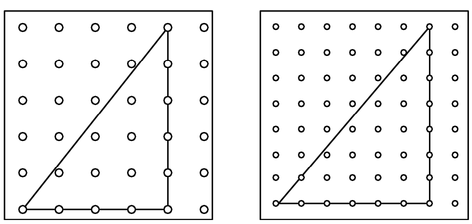
총 개수= 총 개수= 총 개수= 총 개수= 총 개수=

	기하판의 밑변에 평행		기하판의 밑변에 평행아님		
기하판의 크기	정사각형 종류	정사각형 개수	정사각형 종류	정사각형 개수	총합계
1×1	0	0	0	0	0
2×2	1	1	0	0	1
3×3	3	5	2	1	6
4×4					
5×5					
6×6					
7×7					
8×8					
9×9					
10×10					

(2) 규칙성과 관계

학생들이 규칙성을 찾고 그것을 수학적으로 표현하는 것을 통하여 다양한 규칙성을 확인하고, 기술함으로써 정보를 분류하여 체계적으로 조직하는 능력을 향상시킬 수 있다.

예 기하판(또는 점판) 위에 고무줄로 높이가 밑변 보다 1이 큰 직각삼각형을 구성해 보아라. 구성된 직각삼각형 내부에 있는 점의 수를 모두 합하여 보자. 어떤 규칙이 있는지 알아보고 높이가 밑면보다 1이 큰 직각삼각형의 내부에 있는 점의 총수를 구하는 식을 만들어 보자.



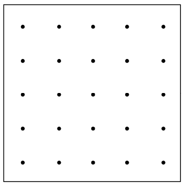
$\Rightarrow 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 임을 알 수 있다.

(3) 기하와 공간감각

기하의 학습에서 학생들은 도형을 기술하고, 도형을 그리고, 분류할 수 있어야 한다. 특히 도형의 특징에 대한 직관과 통찰, 도형 사이의 상호관계, 그리고 도형의 변화는 공간감각의 습득을 위한 중요한 측면이다. 결국 기하를 학습하는데 있어서 학생들은 구체적인 자료를 통해서 조사하고, 실험하고, 탐구해 볼 필요가 있으며 기하판을 이용하여 여러 위치에서 도형을 시각화하고 구성해 보고 비교해 볼 수 있다.

① 도형 사이의 관계

예 기하판 위에서 직사각형을 이용하여 평행사변형과 마름모를 구성하여라.



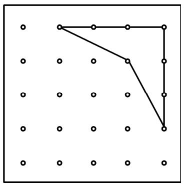
② 도형의 구성

학생들은 다양한 모양의 도형을 구성해 나가는 과정에서 그 도형이 갖는 기본적인 특성을 탐구하게 된다. 마름모, 평행사변형, 정사각형, 직사각형의 개념과 이들 상호간의 관계도 탐색할 수 있다.

예 다음 글에 해당하는 도형을 기하판 위에 구성해 보자.

- 나는 한 개의 직각과 두 개의 예각을 가지고 있으며 네 개의 변으로 되어 있습니다.
- 나의 넓이는 3이고 내부에는 점이 없습니다.

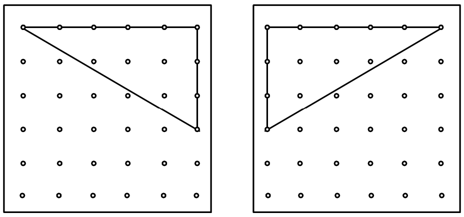
⇒ 나를 그려보세요.



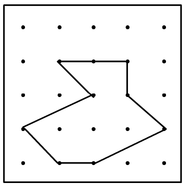
③ 도형의 닮음, 합동, 대칭의 개념

예 주어진 삼각형과 닮은 삼각형을 두 개만 더 구성하여 각 변의 길이와 넓이를 비교하여라.

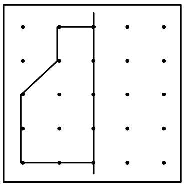
예 두 도형이 합동임을 설명하여라.



예 오른쪽 도형을 거울에 비춰보면 어떤 모양일지 그려보아라.

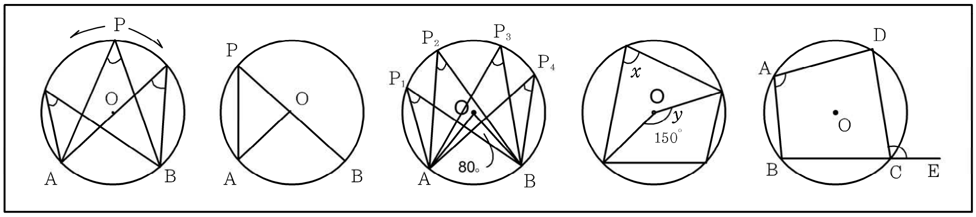


예 기하판을 이용하여 선대칭 도형을 그려보아라.



④ 원과 관련된 도형학습

원형으로 못을 배열한 원형기하판을 사용하면 원과 관련된 기하개념을 지도하는데 도움을 얻을 수 있다.



〈중학교 3학년의 '원과 각', '원과 직선'의 지도 내용(김연식, 김흥기, 1999, pp.226~240)〉

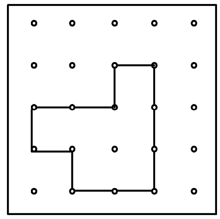
원주각과 중심각의 크기 사이의 관계를 탐구하거나, 한 호에 대한 원주각의 크기가 모두 같음을 학습해야 하는 상황에서, 원에 내접하는 사각형이 갖는 성질을 탐구하는 과정에서 원형 기하판 위에서의 구체화 작업이 유용하게 활용될 수 있다.

(4) 측정: 기하적 아이디어의 측정

학생들이 도형을 결합하고 쪼개며, 변화시킨 결과를 탐구하고 예측할 수 있는 기하적 능력과 단위를 결정해서 측정해야 할 대상의 넓이를 생각하고 넓이의 단위와 도형의 단위

수를 생각해서 원하는 도형으로 변환하게 한다.

예 오른쪽 도형을 다음과 같이 바꾸어 보아라.



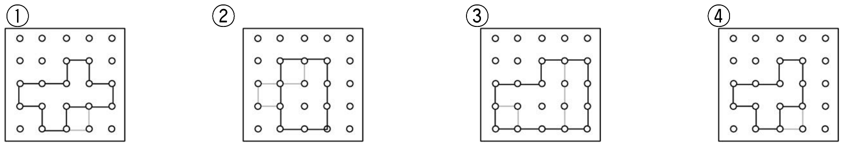
① 같은 넓이에 둘레는 더 길게

② 같은 넓이에 둘레는 더 작게

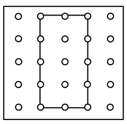
③ 둘레는 같고 넓이는 더 크게

④ 둘레는 같고 넓이는 더 작게

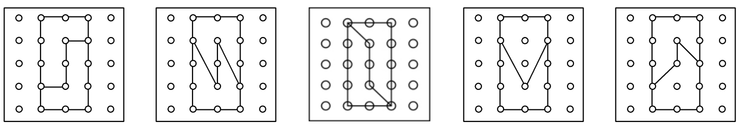
[해답]



예 아래의 사각형의 넓이를 반으로 나누는 방법은 모두 몇 가지일까?



[해답]
5가지

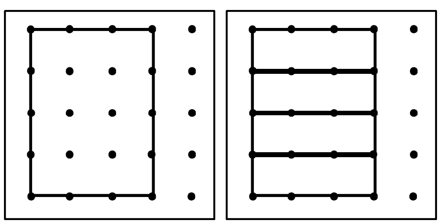


(5) 수 개념과 연산

기하가 수 개념과 측정 개념의 발달에 기여하는 것을 이용하면 여타의 간접적인 측정의 개념 및 약수와 배수, 비율의 개념 등에 대한 이해를 발달시킬 수 있다.

① 기하의 아이디어를 통한 수 개념과 연산

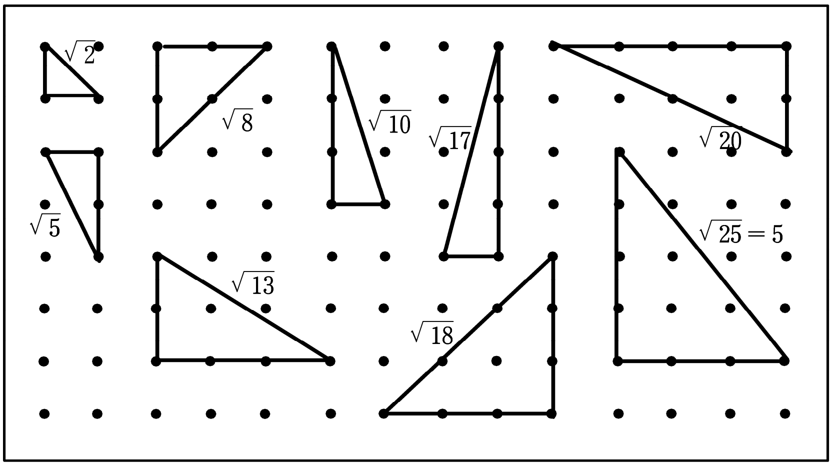
기하판은 2차원의 영역을 합동인 몇 개의 부분으로 나누어 분수 개념이나 소수 개념을 구체화 하여 지도할 수 있게 한다. 아래 그림은 $\frac{1}{4}$, 0.25의 개념을 구체화한 것이다. 분수의 초기 활동은 무엇을 똑같이 분할하는 경험에서 유도된다. 단위의 개념과 그 단위를 똑같은 부분으로 나누는 활동은 분수와 소수의 이해에 기본이다. 이러한 활동을 기하판 위에서도 구현해 볼 수 있다.



위 그림과 같이 수를 도형의 넓이와 관련지어 구체화하는 활동은 학생들에게 수가 사용되는 방식을 의미 있게 받아들일 수 있는 기회를 제공해 준다. 또한 위와 같은 분할의 활동은 3×4=12, 12÷4=3이라는 곱셈과 나눗셈의 연산으로 해석될 수도 있다(김효정, 1995, p.31). 그리고 이를 약수와 배수 지도를 위한 도입 단계의 활동으로 연결할 수도 있다. 조작을 사용하여 수를 탐구하는 것 예를 들어, 대상의 분해 및 결합의 활동은 학생들로 하여금 수의 표현에 대한 이해와 표현된 수의 상대적인 크기에 대한 직관을 개발시켜 준다.

② 피타고라스의 정리와 무리수

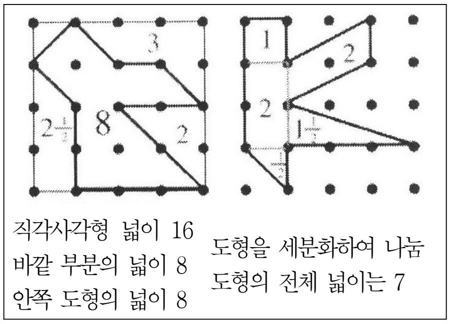
아래 그림과 같이 기하판 위에 구성된 직각삼각형에서 빗변의 길이를 구하는 문제상황은 학생들에게 $a^2+b^2=c^2$의 연산과정 즉, 피타고라스의 정리의 실행을 필요로 하며, 선분의 길이로서 무리수를 다루는 경험을 제공한다.



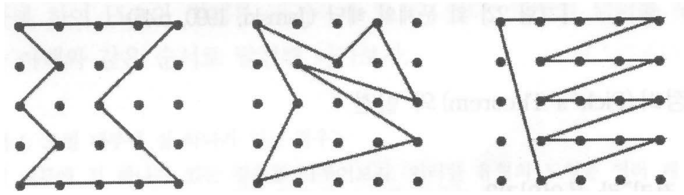
〈직각삼각형의 빗변의 길이〉

(6) 도형의 넓이: 부분영역의 합

기하판 위의 도형의 넓이는 그 도형을 에워싸고 있는 직사각형을 이용하여 구할 수 있다. 도형의 넓이를 구하는 첫 번째 방법은 도형을 에워싸고 있는 큰 직사각형의 넓이를 구하여 그것에서 그려진 도형에 속하지 않는 부분의 넓이를 빼는 것이다. 도형의 넓이를 구하는 두 번째 방법은 도형을 작은 영역으로 분할하여 분할된 각 영역의 넓이를 구해 합하는 것이다.



예 아래에 그려진 도형을 기하판 위에 고무줄로 구성해 보아라. 고무줄 하나로 전체 모양을 만들어도 좋고 여러 개의 고무줄로 도형을 분할하여 만들어도 좋다. 여러 개의 고무줄을 이용하면 그림에 고무줄이 나타나는 선을 표시하여라. 그리고 도형의 넓이와 둘레의 길이를 구하여 보아라.



넓이=(　)	넓이=(　)	넓이=(　)
둘레의 길이=(　)	둘레의 길이=(　)	둘레의 길이=(　)

예 다음 도형을 그래프용지에 그려라(또는 기하판 위에 구성하여라)(Jamski,1990, p.25).

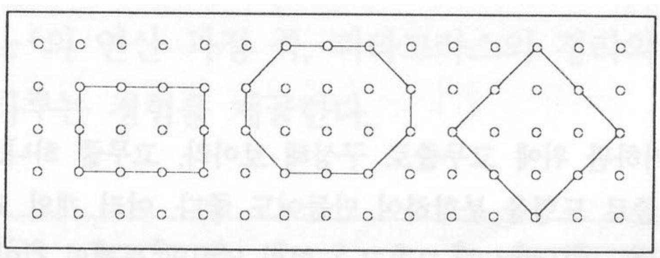
(1) 넓이가 6인 직사각형

(2) 넓이가 10인 팔각형

(3) 넓이가 8이면서 둘레의 길이가 가장 짧은 다각형

(단, 점과 점 사이의 길이는 1이다.)

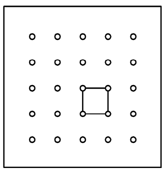
[해답]



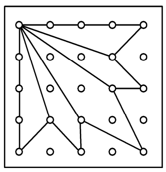
(7) Pick의 정리(Pick's Theorem)의 발견

① Pick의 정리란 무엇인가?

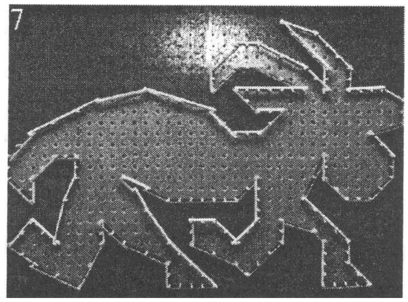
"Pick의 정리"는 격자판을 이용하여 다각형의 면적을 구할 수 있는 방법을 제공한다. 다각형 의 변 위의 점의 수를 b라 하고 다각형 내부에 들어있는 점의 수를 i라고 하면 "다각형의 면적은 $(i+\frac{b}{2}-1)$이다"라는 것이 Pick의 정리이다. 이 Pick의 정리를 사용하면 기하판 위에 구성된 다각형의 면적을 쉽게 구할 수 있다.



<그림1>



<그림2>



<그림3>

[그림1] $b=4$, $i=0$일 때 (도형의 넓이)=$0+\frac{4}{2}-1=1$

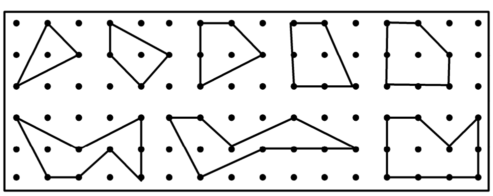
[그림2] $b=16$, $i=5$일 때 (도형의 넓이)=$5+\frac{16}{2}-1=12$

② 기하판의 활동을 통한 'Pick의 정리' 발견

기하판(또는 점판)을 이용하여 내부에 포함되는 다각형의 변 위에 놓이는 점의 수와 다각형의 내부에 들어있는 점의 수를 다양하게 변화시켜가며 도형을 구성해 보고 그 넓이의 관계에 주목하게 하여 Pick의 정리를 발견하게 할 수 있다.

예 도형 내부에 점 하나가 있는 경우

먼저 도형 내부에 점 하나가 있는 경우를 다루어 보자. 이러한 유형의 도형을 여러 개 그려보고 도형의 선분 위에 놓인 점의 수를 세어보고 각 도형의 넓이를 구하여보자.



결과를 아래의 표에 기록해 보자. 여기서 나온 정보를 이용하여 선분 위에 있는 점의 수가 n개인 경우에까지 일반화하여 보자.

〈표1〉 도형 내부에 점이 하나 있을 경우 : 넓이 구하기

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

예 도형 내부에 점이 한 개도 없을 경우

도형 내부에 점이 한 개도 없을 경우를 조사해 보자. 도형 위의 점의 개수를 세고 각 도형의 넓이를 기록해 보자. 도형 위의 점이 n개인 경우에 넓이를 계산하는 공식을 추측하여 만들어 보아라.

〈표2〉 도형 내부에 점이 하나도 없을 경우 : 넓이 구하기

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

예 도형 내부에 점이 두 개 있을 경우

도형 내부에 점이 두 개 있을 경우를 조사해 보자. 도형 위의 점의 개수를 세고 각 도형의 넓이를 기록해 보자. 도형 위의 점이 n개인 경우에 넓이를 계산하는 공식을 추측하여 만들어 보아라.

〈표3〉 도형 내부에 점이 두 개 있을 경우 : 넓이 구하기

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

예 도형 내부에 점이 세 개 있을 경우

도형 내부에 점이 세 개 있을 경우도 위와 마찬가지로 해 보자.

〈표4〉 도형 내부에 점이 세 개 있을 경우 : 넓이 구하기

도형 위의 점의 수	3	4	5	6	7	8	9	10	n
도형의 넓이									

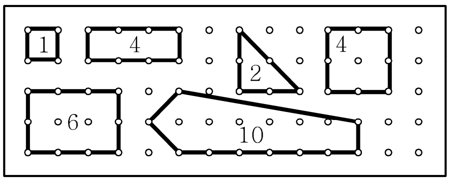
예 도형 내부에 점이 k개 있을 경우

이제까지의 조사 결과를 이용하여 도형 위의 점이 n개 있을 때 넓이를 구하는 식을 구성하는아래의 표를 완성해 보자. 여기서 패턴을 발견하고 그것을 도형 내부에 있는 점의 개수가 k일 경우에까지 일반화하여 보아라.

〈표5〉 도형 내부에 점이 k 개 있을 경우 : 넓이 구하기

도형 내부의 점의 수	0	1	2	3	4	5	…	k
도형의 넓이 (도형 위의 점이 n개)								

이 일반화된 식이 바로 도형 위의 점은 n개이고 도형 내부의 점은 k개인 도형의 넓이를 나타내는 식이 되고 그것이 바로 우리가 Pick의 정리라고 부르는 것이다.



도형의 넓이 (Jamski, 1990, p.26)

예 임의의 다각형의 넓이를 A라 하자. 그 다각형 위에 있는 점의 수를 x라 하자. 그리고 다각형의 내부에 있는 점의 수를 y라 하자. A, x, y 사이의 관계를 나타내는 식을 만들어라.

답 $A = y + \frac{x-2}{2} = y + \frac{x}{2} - 1$

(8) 기하판과 수행평가

다음은 한국교육과정평가원에서 제시한 서술형 주관식 검사 예시 평가과제이다. 중학교 단계의 도형 단원에서 기하판을 활용한 수행과제이다.

수형과제	도형 만들기
관련 학년	1, 2, 3학년
관련 영역	도형(대영역)-평면도형(중영역)

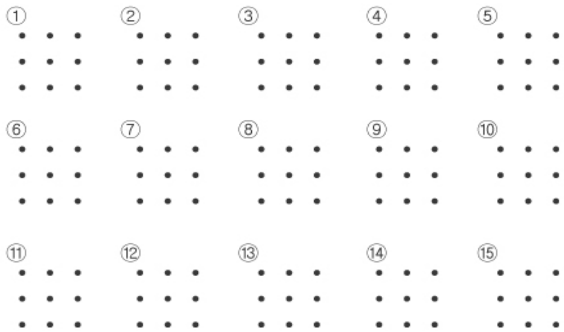
[수행목표]

-평면도형의 넓이 구하는 방법을 알고 이를 활용할 수 있다.

-창의적인 사고를 통해 주어진 넓이를 갖는 다양한 도형을 만들 수 있다.

[예시 평가과제]

다음과 같이 세로의 방향으로 한 칸이 1cm인 9개의 점이 찍혀 있다. 이 9개의 점을 연결하여 넓이가 2cm2인 도형을 될 수 있는 한 많이 그려보아라. 단, 서로 포개어 질 수 있는 것은 하나로 보며, 도형의 내부는 하나로 연결되어 있어야 한다.



[답안]



〈중학교 도형 단원의 수행과제〉

서술형 주관식 검사 예시평가과제(한국교육과정평가원, 1998, pp.258-261)

[채점기준]

-답안에 예시된 도형 중 2의 유형에 대해서는 독창성 점수를 1점, 3의 유형에 대해서는 독창성 점수를 2점, 4의 유형에 대해서는 독창성 점수를 3점 부여하였으며, 이 점수 역시 대상 학생들에 따라 가변적일 수 있다.

1.4. 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블록

학생들이 수학의 구조를 학습한다는 것은 여러 개념과 조작들 사이의 상호관계를 파악하고 그것을 통해서 새로운 패턴과 성질들을 발견하는데 사용되는 여러 가지 규칙들을 이해하는 것을 의미한다.

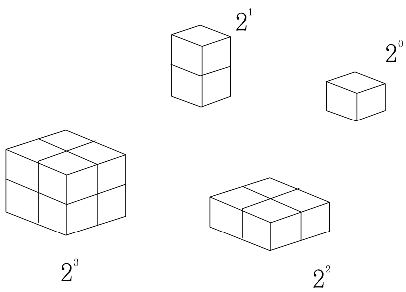
1) 딘즈블록[11)]

① 활동주의적 수학교육 이론가의 한 사람인 Z. P. Dienes가 기호를 사용하지 않고도 수학의 구조를 지도할 수 있도록 고안한 수학 학습교구이다.

② 다양한 진법 체계를 구현할 수 있다는 의미에서 다진수 블록(Multibase Arithmetic Block; MAB)이라 불린다.

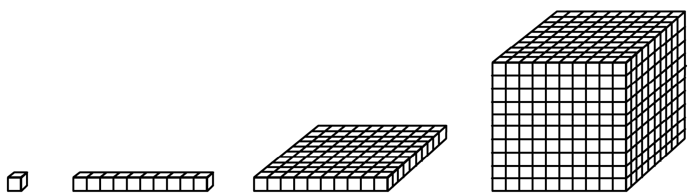
③ 딘즈블록(MAB)에는 기수(基數)(base; 밑)의 값에 따라 서로 구분되는 여러 개의 세트가 포함되어 있다.

예 2진블록



④ 초등학교 교과서에 ‘쌓기나무’라는 용어로부터 시작하여 자연수의 연산지도에 이용되고 있는 블록은 기수를 10으로 하는 십진블록(base-10 blocks)이다.

예 10진블럭



⑤ 딘즈블록은 기수 n에 따라 한 변의 크기가 1인 정육면체 모양의 단위 블록(unit, $1\times1\times1$), 정육면체 n개를 일렬로 연결하여 고정시킨 막대블록(long, $1\times1\times n$), 막대블럭 n개를 옆으로 붙인 정사각형 판형의 판블록(flat, $1\times n\times n$), 판블록 n개를 쌓

11) 대한수학교육학회지 『학교수학』 제 1권 제 1호 참고.

아올려 고정시킨 큰 정육면체블록(block, $n\times n\times n$)으로 구성된다.

⑥ 딘즈블록은 기수법의 자릿값 개념이나 자연수, 소수의 사칙 연산 지도에 효과적으로 사용될 수 있을 뿐 아니라 각 블록들을 1, x, x^2 등의 변수를 나타내는 것으로 취급하면 다항식 지도에도 활용할 수 있다.

2) 딘즈블록의 조작을 통한 수학적 구조의 인식

① 딘즈블록은 수학의 기본 구조를 서로 다른 형태로 구체화할 수 있도록 만들어진 교구이다.

② 기수법의 원리나 수의 사칙연산의 규칙과 같은 수학의 기초적인 사실의 이해는 십진블록의 조작 활동이 경험된 후, 다른 기수법을 학습하는 데 곧바로 전이된다.

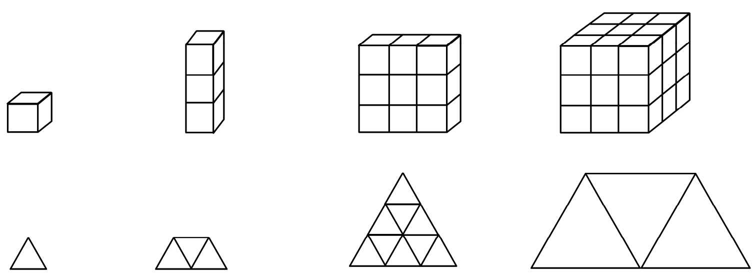
③ 학생들은 딘즈블록을 다룸으로써 동형의 구조를 추상하게 되고 어떤 표현을 통해서 그 것을 자신의 사고에 정착시킬 수 있게 된다.

3) 학교수학에서의 딘즈블록 활용

(1) 위치적 기수법(positional system)의 지도

① 학생들에게 자릿값(place-value)의 표기를 지도해야 할 때 딘즈블록을 사용하는 것이 효과적이다.[12)]

예

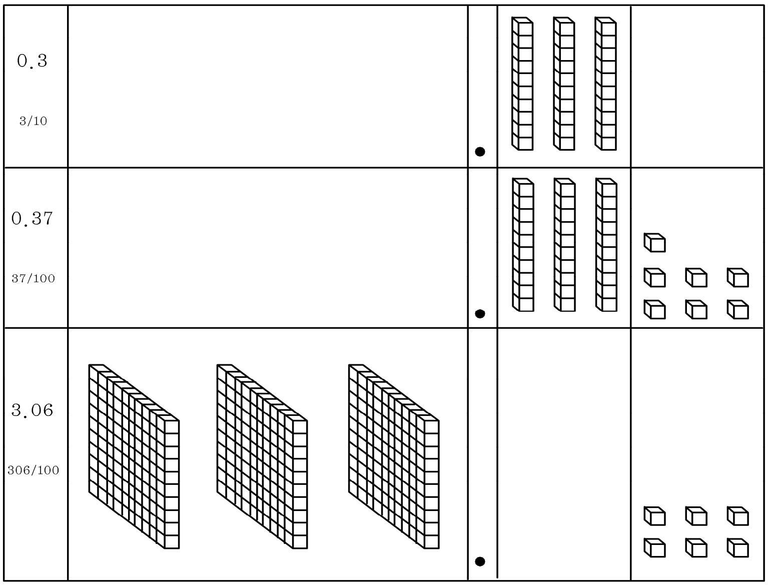


② 딘즈블록을 이용하여 자연수에서 이미 학습한 자릿값 개념을 소수에 적용하는 것, 소수와 분수 개념 사이의 상호관계를 파악하는 것, 소수 위에서의 간단한 연산을 소개할 수 있다.

예 먼저 각 블록에 대한 정의를 한다. 만약 판블록을 1로 정의하면 막대블록은

12) 딘즈의 '지각적 다양성의 원리' 이용.

0.1(1/10), 단위블록은 0.01(1/100)이 되고 큰 정육면체 블록을 1로 정의하여 판블록이 0.1(1.10), 막대블록이 0.01(1/100), 단위블록이 0.001(1/1000)이 된다.

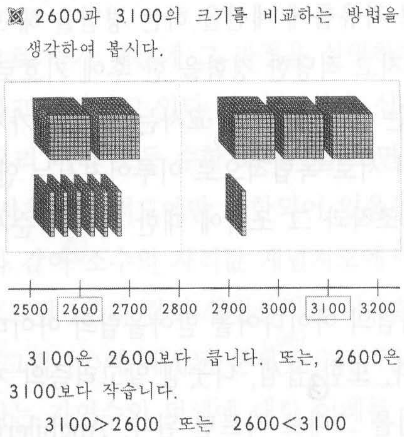


〈딘즈블록을 이용한 소수의 자릿값 표〉

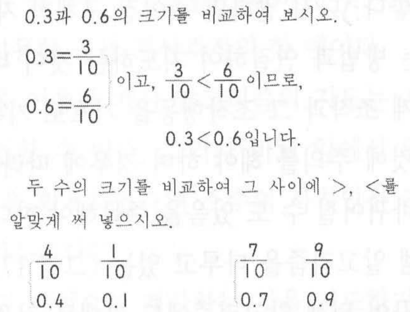
분 수	100'S (100의 개수)	10'S (10의 개수)	1'S (1의 개수)	소수점	1/10 (0.1의 개수)	1/100 (0.01의 개수)
3/10				•	3	
73/100				•	7	3
8/10				•	8	
80/100				•	8	0
3 6/10			3	•	6	
15 6/100		1	5	•	0	6

〈분수와 소수의 동치관계를 보여주는 자릿값 표〉

③ 소수의 대소관계를 처음 지도할 때 소수의 크기를 분수 개념과 관련지어 형식적으로 지도하는데 그치기보다는 자연수의 대소관계 지도에서와 마찬가지로 십진블록을 이용하여 수의 크기를 시각적으로 비교할 수 있게 하는 지도를 보충하면 학생들이 소수의 크기를 서로 비교하는 과정을 쉽게 이해할 수 있다.



〈자연수의 대소 비교〉



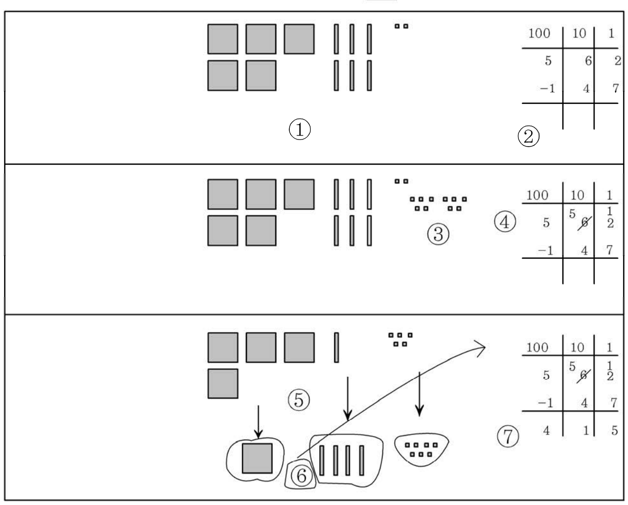
〈소수의 대소 비교〉

(2) 수의 사칙연산의 기본 원리 지도

① 계산 알고리즘에 대한 이해를 위해서 딘즈블록을 활용할 수 있다. 이때, 교사의 지도에 따라 학생들은 한 단계 한 단계에 순차적으로 활동을 진행하여야 한다(단, 각 학생들이 교사의 설명을 듣기 전에 준비된 구체적 조작물을 가지고 자유롭게 계산을 하는 경험을 해 보는 것이 좋다).

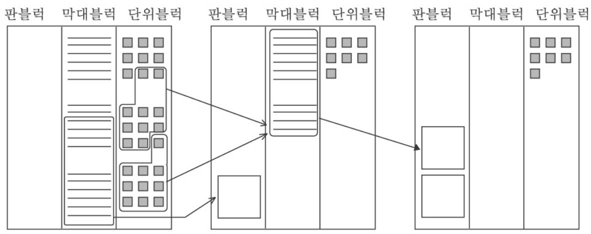
② 딘즈블록을 이용하여 받아내림의 아이디어를 받아올림의 아이디어로 바꾸어 덧셈 알고리즘에도 그대로 적용할 수 있다.

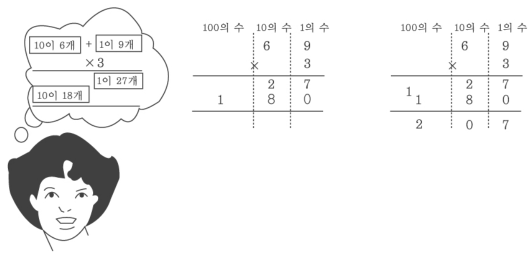
문제: 562−147=□



〈딘즈블록을 이용한 받아내림이 있는 뺄셈문제의 해결〉

③ 곱셈, 나눗셈, 알고리즘의 지도에서도 가능하다.

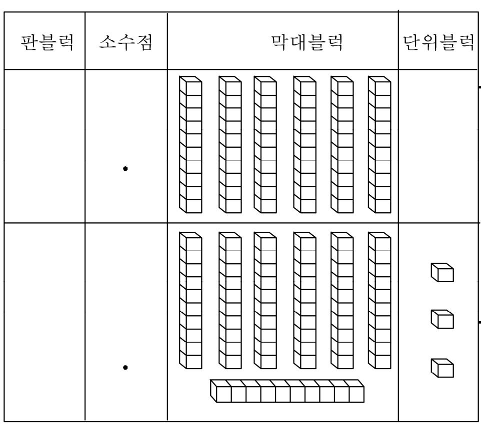




〈십진블록의 조작활동과 곱셈 알고리즘과의 연결〉

④ 소수의 자릿값 개념지도에서 십진블록을 활용하여 다음과 같이 지도할 수 있다.

(예) 0.6 + 0.73



(a) Enactive manipulation(활동적 조작)

1의 수	소수점	0.1의 수0	.01의 수
	•	6	
	•	7	3
		13	3

(b) Symbolic mode(상징적 표현)

〈0.6+0.73의 계산에 대한 활동적/상징적 표현의 대응관계〉

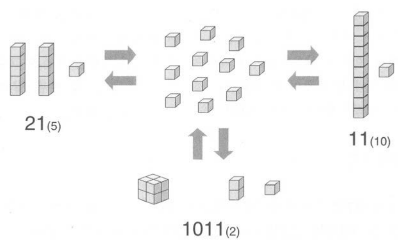
각 열은 그 바로 오른쪽에 있는 열이 10개이고 더하는 수를 모두 한 줄로 똑바로 맞추어야 한다는 아이디어를 적용한다.

(3) 기수법의 지도

① 이진블록이나 오진블록의 조작 활동으로 이진법과 오진법을 이해시킨다면 학생들이 동일한 수학적 구조를 추상화하여 이해할 수 있을 것이다.

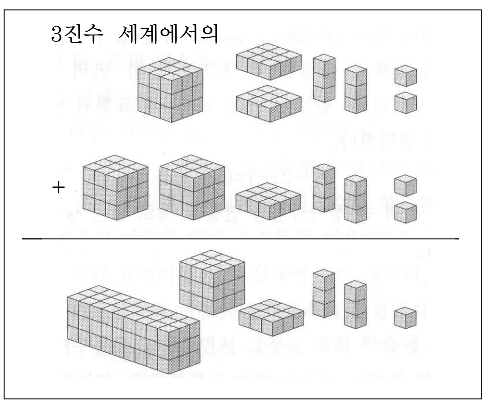
② 이진법, 오진법에서의 자릿값 개념이나 수의 덧셈과 뺄셈 등은 십진법에서 다루었던 십진블록의 조작 원리를 그대로 적용하면 된다. 이때, 수를 나타내는 기호들의 위치는 그 기호가 나타내는 값을 결정한다는 사실과 묶는 규칙과 절차가 명백하게 존재한다는 사실이 명확하게 지도되어야 한다.

③ 딘즈블록을 이용하면 십진수, 오진수, 이진수끼리의 상호 변환 과정을 학생들의 직접적인 조작 활동이나 시각적인 확인을 통해 쉽게 이해할 수 있다.



〈동일한 수의 서로 다른 진법 체계에서의 표현〉

④ 학교수학에서 명시적으로 다루어지고 있는 이진법, 오진법 이외의 진법을 소개하는 것도 가능하다.



〈1222(3) + 2122(3)의 계산 과정을 딘즈블럭을 이용하여 구체화한 예〉

(4) 이차식의 완전제곱형 인수분해의 지도

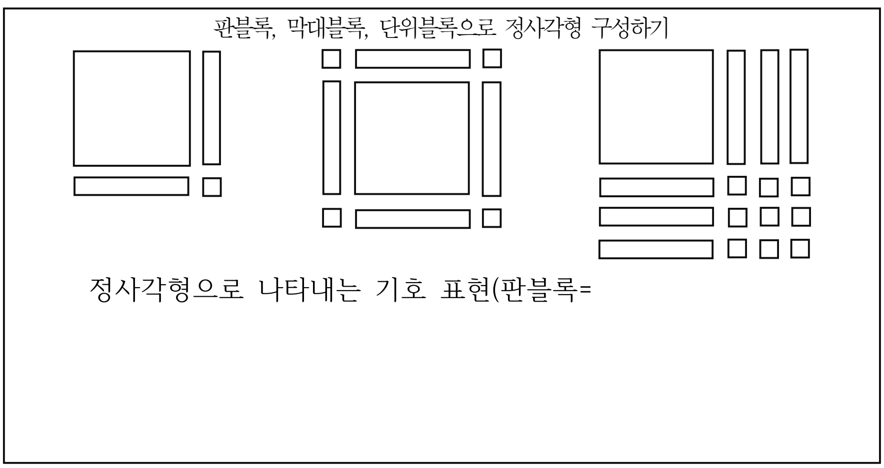
Bruner와 같이 한 공동 실험에서 Dienes는 이차방정식의 기초를 이루는 인수분해의 원리를 구현하기 위해서 MAB를 사용하였다. 8세 아동들을 대상으로 딘즈블록을 이용하여 이차식의 완전제곱형 인수분해를 지도하였다.

① 아이들에게 한 세트의 딘즈블록을 제시하고 블록의 이름을 지정한다. 판블록은 $x^{\square}$으로, 막대블록은 x로, 단위블록은 1로 부르기로 한다는 것을 말해 준다(이때, 사용되는 딘즈블록은 반드시 십진블록일 필요는 없다. 단 기수가 적은 블록을 사용하면 구성된 정사각형의 수가 제한되는 단점이 있다).

② 아이들 각자에게 블록을 여러 개씩 주고, 이것을 갖고 놀 기회를 충분히 주어 친밀감을 갖게 한 다음 아래의 문제를 제시한다.

[문제] 이러한 블록들을 마음대로 사용하여 $x^{\square}$로 부르는 정사각형보다 더 큰 정사각형을 만들 수 있을까?

③ 아이들에게 문제를 해결하기 위한 시간을 준다: 〈그림〉은 실제 실험에서 아이들이 구성한 정사각형의 몇 가지 예이다.



〈딘즈블록을 이용한 이차식의 완전 제곱형 인수분해 원리에 대한 구체화〉

④ 아이들에게 그들이 만든 정사각형을 표현해 보도록 한다: 〈그림〉의 첫 번째 정사각형에 대해서는“ $x^{\square}$ 하나와 두 개의 x와 하나의 1로 되어 있다”는 식의 답이 나올 것이다.

⑤ 그들의 표현을 기록할 표기 방법을 고안해 보도록 한다.

⑥ 아이들 나름대로의 사고 활동 후 교사는 '~와' 대신에 +를 사용하여 사용된 블록들을 모두 합해 $x^{\square}+2x+1$로 쓸 수 있음을 설명한다.

⑦ 새로 만든 정사각형의 변의 길이를 가지고 또 다른 정사각형을 표현할 수 있음을 지도한다. 다시 말해 ⑥에서 설명한 정사각형은 한 변의 길이가 $(x+1)$이 되므로 $(x+1)(x+1)$과 같이 표현될 수 있는 것이다. ⑥에서의 표현과 연결하여 다음과 같은 등식을 세울 수 있음을 설명한다.

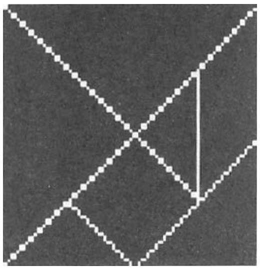
$x^{\square}+2x+1=(x+1)(x+1)$

⑧ 아이들에게 계속해서 더 큰 정사각형을 만들고 새로 만든 정삼각형을 나타내는 표현을 만들어 보게 한다.

➡ - Dienes와 Bruner는 위의 과정에서 아이들이 어느 순간 정사각형 구성 과정에 어떤 패턴이 있음을 인식하게 된다고 가정하고 있다.
- 인수분해 지도는 중학교 단계에서 명시적으로 다루어지게 되는데 학생들이 딘즈블록을 이용한 위와 같은 발견적 학습을 경험하는 기회를 갖게 된다면 인수분해의 형식적 원리에 대한 이해가 보다 수월해질 것이다. 또한 딘즈블록 세트 안의 각 블록들을 $1, x, x^2$ 등의 변수를 나타내는 것으로 취급하면 중학교 수학에서의 다항식 지도에도 활용할 수 있게 된다.

1.5. 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화

탱그램[13]은 우리나라 수학교사들과 학생들에게 '칠교놀이[14]'라는 이름으로 잘 알려져 있다. 오직 7개 조각들로 구성된 탱그램은 단순하고 많은 기술을 요구하지 않으면서도 인내와 시간 그리고 풍부한 상상력을 요구한다.



〈탱그램〉

13) 대한수학교육학회지 『학교수학』 제 2권 제 2호 참고.

14) 중국에서는 탱그램을 'Ch'i ch'iao t'u' 또는'7개의 영리한 조각(Seven Clever Pieces)'으로 불리 운다.

① 움직이는 인간의 모습들, 건물들, 동물들, 알파벳 문자 등 수많은 다양한 대상을 표현할 수 있다.
② 탱그램을 다루는 활동은 주로 기하적인 모양들을 만들기 위해 7개의 조각들을 적절히 정돈하는 것이다.
③ 간단한 모양의 조각들을 움직임으로서 수 천 가지의 모양을 만들 수 있기 때문에 탱그램 퍼즐놀이는 특히 어린 아동들에게 조화로운 모양, 어울리는 배열의 기술을 훈련시키는데 효과적이다.

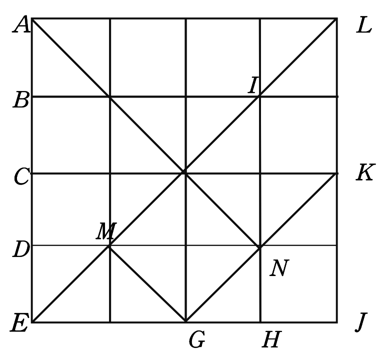
1) 탱그램의 기원 및 제작

(1) 탱그램의 기원[15)]

① 1780년대에 탱그램 퍼즐을 풀고 있는 두 명의 중국 여인을 그린 목판화가 발견되었고, 1831년에 탱그램 문제들을 다룬 가장 오래된 출판물이 중국에서 발견되었다.
(중국에서는 퍼즐조각의 모양이 접시, 래커 상자, 심지어 탁자 등에서도 발견되었다.)
② 1820년 〈New Mathematical Demonstrations of Euclid〉의 저자인 W. Williams은 수학을 가르치는 과정에서 탱그램 퍼즐을 활용할 것을 주장하였다.

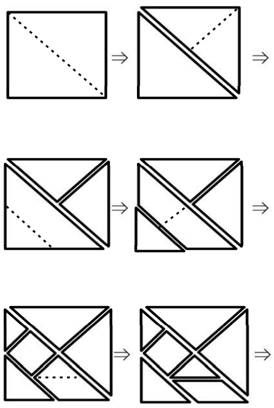
(2) 탱그램의 제작

① 두꺼운 도화지 위에 가로, 세로의 길이가 12cm인 정사각형을 그린다.
② 오른쪽 그림과 같이 3cm 간격으로 선을 그으면 한 변의 길이가 3cm인 정사각형 16개가 만들어진다.
③ 대각선의 끝점 E와 L, 가로, 세로의 중점 G와 K를 굵은 선으로 긋는다.
④ 선분 GK의 중점 N과 꼭지점 A를 굵은 선으로 긋고, 두 점 N과 I, G와 M을 굵은 선으로 긋는다.
⑤ 가위로 굵은 선을 따라 오린다.



15) 탱그램이 다루어지기 시작한 시기, 그 조각을 만들어낸 사람에 대해서는 거의 알려진 바가 없다. 심지어는 그 이름의 기원에 대해서도 분명치 않다. 어떤 이야기로는 탱그램은 어떤 남자가 자기로 된 타일이 깨진 것을 맞추다가 우연히 발명한 것이라고 하기도 한다.

〈측정과 작도에 의한 탱그램 제작〉 〈측정과 작도로 구성된 탱그램〉



① 정사각형의 모양의 종이를 대각선을 따라 접고 잘라서 두 개의 직각삼각형을 만듭니다.
② ①의 직각삼각형 중 하나를 반으로 잘라서 A1, A2를 만듭니다.
③ ①의 또 다른 직각삼각형의 직각인 꼭짓점을 빗변의 중점에 맞추어 접고 잘라서 C를 만듭니다.
④ 등변사다리꼴을 반으로 접어 잘라서 두 개의 작은 사다리꼴을 만듭니다.
⑤ 작은 사다리꼴의 긴 밑변이 이등분 되도록 접어 잘라서 직각삼각형 B2와 정사각형 E를 만듭니다.
⑥ ④에서 만들어진 또 다른 작은 사다리꼴의 긴 밑변을 이등분되도록 그림과 같이 접어 잘라서 직각삼각형 B1과 평행사변형 D를 만듭니다.

<종이접기에 의한 탱그램 제작>

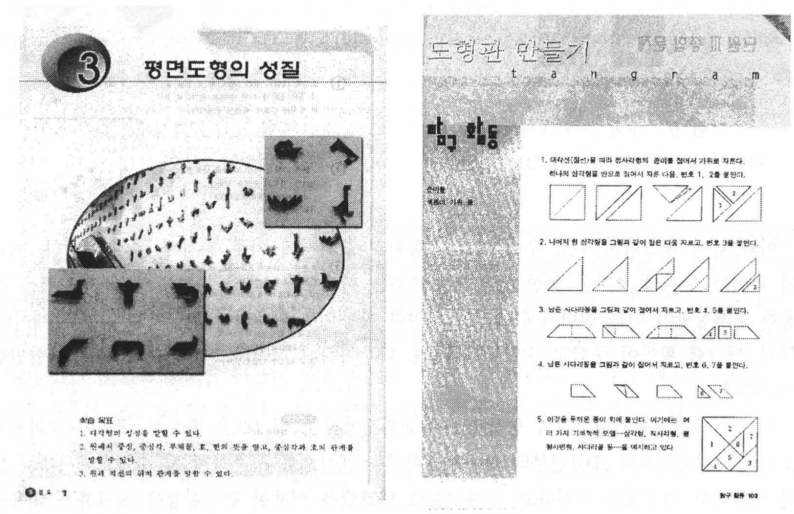
2) 학교수학에서의 탱그램 활용

(1) 우리나라 수학교과서에 등장한 탱그램

① 우리나라 제 4차 교육과정부터 탱그램이 등장하였다. 당시 4학년 산수교과서에서 탱그램은 여러 가지 문제 단원에서 정사각형이나 여러 가지 삼각형을 맞추어보는 모양판 놀이로 소개되었다.

② 제 5차 교육과정에서는 4학년 교과서의 익힘책, 5학년 교과서, 6학년 교과서와 익힘책 등에서 여러 가지 다각형이나 사물의 모양을 맞추어 보는 모양판 놀이로서, 전체의 넓이에 대한 각 부분의 넓이를 알아보는 활동으로서 제시되고 있다.

③ 제 6차 교육과정에서는 4학년 익힘책과 5학년 교과서에서 여러 가지 다각형이나 사물의 모양을 맞추어 보는 모양판 놀이로서 제시되고 있다.


3 평면도형의 성질

학습 목표
1. 다각형의 성질을 말할 수 있다.
2. 원에서 중심, 중심각, 부채꼴, 호, 현의 뜻을 알고, 중심각과 호의 관계를 말할 수 있다.
3. 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다.

도형판 만들기
tangram

탐구 활동

준비물
색종이, 가위, 풀

1. 대각선(점선)을 따라 정사각형의 종이를 접어서 가위로 자른다. 하나의 삼각형을 반으로 접어서 자른 다음, 번호 1, 2를 붙인다.
2. 나머지 한 삼각형을 그림과 같이 접은 다음 자르고, 번호 3을 붙인다.
3. 남은 사다리꼴을 그림과 같이 접어서 자르고, 번호 4, 5를 붙인다.
4. 남은 사다리꼴을 그림과 같이 접어서 자르고, 번호 6, 7을 붙인다.
5. 이것을 두꺼운 종이 위에 붙인다. 여기에는 여러 가지 기하학적 모델—삼각형, 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴 등—을 예시하고 있다.

탐구 활동 103

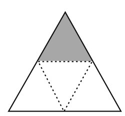
④ 제 7차 교육과정부터 중학교 1학년 도형 단원에서 탱그램을 소개하고, 구체적으로 탱그램을 이용한 탐구활동을 제시하는 내용을 여러 교과서에서 확인할 수 있다.

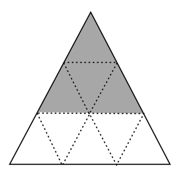
(2) 수학적 추론 지도에 활용

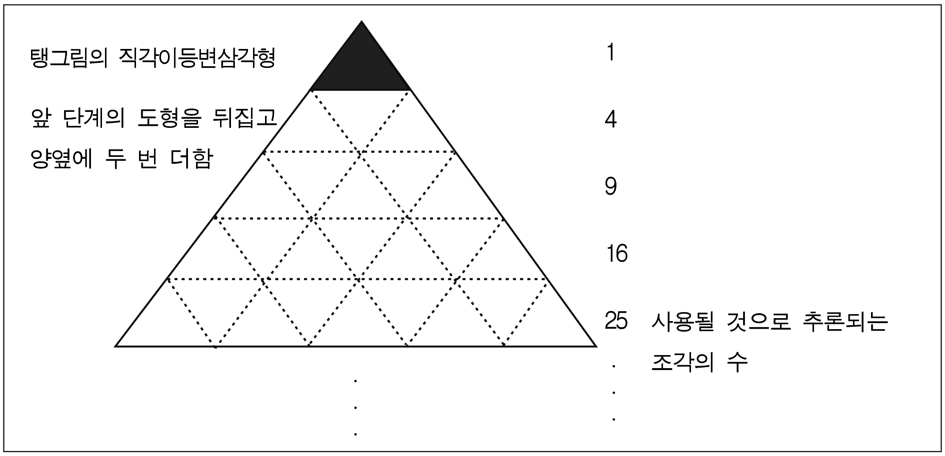
① 추론은 수학에서 가장 중요한 부분 중의 하나이다. 따라서 학생들의 수준에 적절한 간단한 문제상황을 구성하여 수학을 의미 있는 것으로 보도록 '비형식적인 사고', '가설 세우기' 그리고 '확인하기' 등의 지도가 필요한데 탱그램을 이용하여 지도할 수 있다.

② 학생들은 탱그램의 조각을 이용하여 손으로 조작하면서 일정한 패턴을 인식하고 가설을 세우며 스스로 작업을 확인하면서 수행하게 된다.


이 부분을 뒤집고 양 끝에 한 개씩 붙이면 오른쪽 삼각형을 얻게

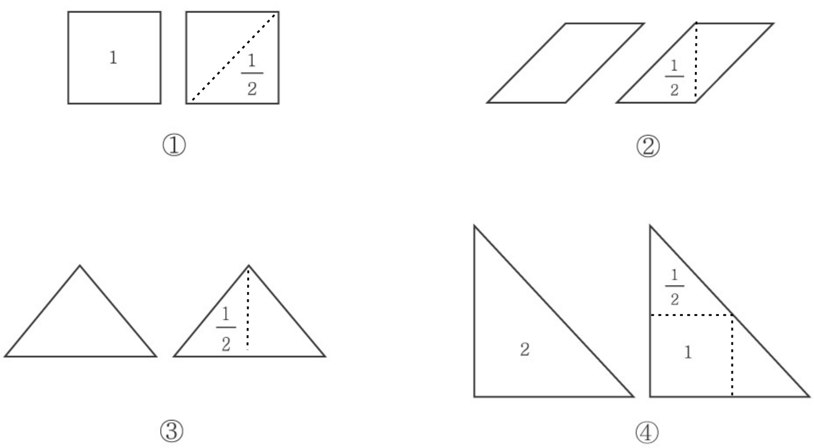

맨 아래의 열을 뒤집고 양 끝에 삼각형 한개씩을 붙이면 오른쪽과 같이 세 번째 열을 얻게


또 맨 아래의 열을 뒤집고 양 끝에 삼각형 두 개를 붙여라 같은 규칙으로 계속 반복하면 어떤 도형이 구성되는가?



〈추론 지도를 위한 탱그램을 이용한 문제 상황〉

③ 탱그램을 활용한 문제해결의 활동을 통해서 학생들은 수학적 추론을 경험할 수 있으며 규칙적인 패턴의 관찰을 통해서 수학의 아름다움을 인식할 수 있는 기회도 제공받는다.
④ 탱그램을 이용하여 추론을 요하는 문제상황을 스스로 해결할 수 있다.
⑤ 탱그램 조각들을 이용해 도형의 넓이 사이의 관계를 설명하는 학습활동도 할 수 있다.



㉠ 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 빗변이 마주하도록 붙이면 탱그램의 작은 정사각형이 한 개 만들어진다. 작은 정사각형의 넓이를 1이라고 하면 가장 작은 직각이등변삼각형의 넓이는 1/2이 된다.

㉡ 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 빗변이 아닌 변이 마주하도록 붙이면 탱그램의 평행사변형이 한 개 만들어진다. 가장 작은 직각이등변삼각형의 넓이는 1/2이였으므로 평행사변형의 넓이는 1이 된다.

㉢ 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개를 빗변이 아닌 변이 마주하도록 붙이면 탱그램의 중간 크기의 직각이등변삼각형이 한 개 만들어진다. 가장 작은 직각이등변삼각형의 넓이는 1/2이였으므로 중간 크기의 직각이등변삼각형의 넓이는 1이 된다.

㉣ 큰 직각이등변삼각형은 가장 작은 직각이등변삼각형 두 개와 정사각형 하나로 구성되므로 ①에서의 넓이를 이용하면 큰 직각이등변삼각형의 넓이는 2가 된다.

➡
- 탱그램의 각 도형의 넓이는 정사각형 넓이의 1/2배 또는 2배이다.
- 탱그램의 모든 도형의 넓이를 합하면 8이다.
- 탱그램 7조각을 모두 사용하여 만든 정사각형의 넓이는 8이다

탱그램의 도형들이 가지는 길이와 넓이에 대한 위와 같은 관계를 학생들이 이해하게 되면 탱그램 조각을 이용하여 새로운 도형을 구성하거나 주어진 기하학적 모양을 만들어 내는 활동을 훨씬 수월하게 해 낼 수 있다.

⑥ 학생들은 탱그램을 직접 손으로 다루어가면서 수학이란 단순히 규칙과 절차를 암기하는 것이 아니라 의미 있고 논리적인 것이며 때로는 즐거운 정신적 활동이기도 하다는 것을 인식할 수 있게 된다.

⑦ 학생들은 탱그램을 통해 도형을 재배열하거나 분해해도 넓이는 변하지 않음을 인식할 수 있게 된다.

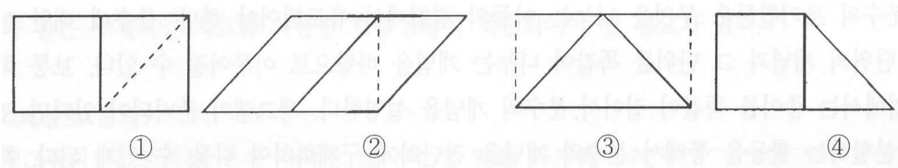
예 평행사변형의 넓이는 직사각형으로 바꾸어서 생각해 볼 수 있다.
평행사변형은 두 개의 삼각형으로 분할된다.
삼각형의 넓이는 평행사변형의 넓이의 반이다.
다각형은 여러 개의 삼각형으로 분해된다. 등등

(3) 수와 연산의 지도에 활용

학생들은 탱그램을 다루는 조작, 조작의 결과에 대한 설명, 구체적 조작의 표현을 위한 수의 사용 그리고 사용된 수들과의 연산활동을 경험함으로써 문제상황에서 수와 연산이 사용되는 방식을 보다 의미 있게 내면화할 수 있게 된다.

① 분수의 초기 활동과 배의 개념

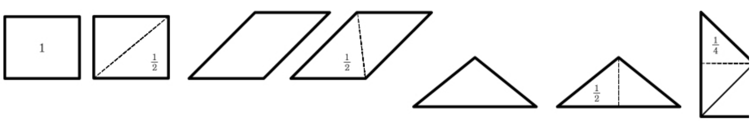
㉠ 분수의 초기 활동은 무엇을 나누는 아동의 경험에서 유도된다. 분수에 대한 이해 단위의 개념과 그 단위를 똑같이 나누는 개념을 바탕으로 이루어질 수 있다. 이때, 탱그램이 준비되어 있다면 조각을 분할하는 활동을 통해서 분수의 개념을 간단하게 구체화하여 다룰 수 있게 된다.



〈탱그램의 분할활동을 통한 분수의 표현〉

㉡ 학생들이 (부분)/(전체)로의 분수의 표현을 이해하고 나면 학생들에게 부분을 주고 전체를 만들어보라는 활동도 제시해 배의 개념을 이해시킬 수 있다.

〈'부분'을 통한'전체'의 구성〉

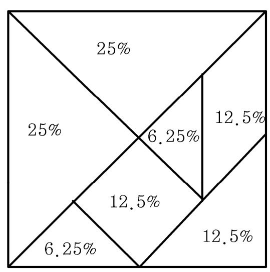


② 수의 다양한 표상

㉠ 학생들에게 비와 비례의 개념, 퍼센트 등의 개념과 같은 수와 수관계를 탱그램을 이용하여 제시해 줄 수 있다.

[퍼센트 문제]

탱그램의 각 조각은 전체 사각형 넓이의 몇 %를 차지하는지 구해 보아라.



㉡ 탱그램 조각의 넓이 사이의 관계를 학생들이 분수로 또는 소수로 때로는 퍼센트로 표상하여 다루는 경험은 같은 양에 대해서 다양한 표상을 생성하

고, 읽고, 사용하는 능력을 개발하는데 도움이 된다(이러한 능력은 수학을 이해하고 수학을 행하는 학습에 있어서 결정적이다).

③ 간단한 연산

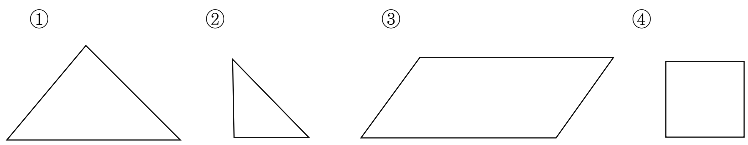
㉠ 탱그램에 들어있는 7개 도형의 변의 길이와 넓이 사이에 성립하는 관계를 이용하면 초등 수준에서 다룰 수 있는 연산의 학습활동이 가능하다.

예 가장 작은 직각이등변삼각형의 무게가 50g이라고 한다면 나머지 조각의 무게는 각각 얼마인가?

(4) 측정 지도에 활용

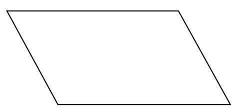
① 탱그램을 이용하여 학생들은 변의 길이, 넓이 그리고 각의 측정 영역을 통해 측정 개념을 발달시킬 수 있다.

(1) 탱그림 조각들의 내각을 재어 조사하여 보시오.



(2) 탱그램 조각들로 크기가 다른 삼각형을 만들어 보시오. 만들어진 삼각형들의 내각을 각각 재어 보시오. 내각의 합은 얼마입니까?

(3) 탱그램 조각들로 그림과 같은 평행사변형을 만들어 보시오. 만들어진 평행사변형의 각들을 재어 보시오. 네 개의 각의 크기를 모두 합하면 얼마입니까?



(4) 직사각형을 몇 개 만들고 직사각형의 각들을 조사하여 보시오. 각 직사각형의 네 각들은 모두 어떤 종류의 각입니까?

(5) 어떠한 사각형의 경우라도 사각형의 네 각의 합은 모두 같습니까?

(6) 탱그램으로 오각형, 육각형들을 만들어 보시오. 각 도형에 들어있는 각들을 재어보고, 그 각들을 합하여 아래 표의 빈 칸을 채우시오.

다각형	내각들의 합
오각형	
육각형	

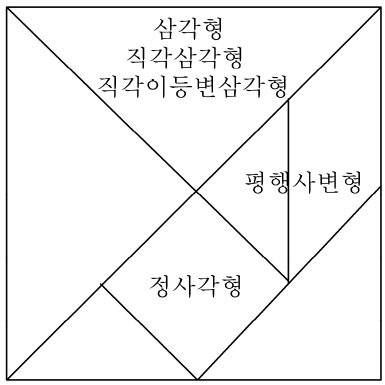
(5) 평면도형의 지도에 활용

공간에 대한 이해는 우리가 살고 있는 고유의 기하적 세계를 해석하고 이해하고 음미하는데 필요하다. 2차원, 3차원의 도형과 그들의 특징에 대한 직관, 통찰, 도형 사이의

상호관계 그리고 도형의 변화는 공간감각의 중요한 측면이다. 공간관계에 대하여 좋은 감각을 가진 학생들과 기하에 대한 개념과 언어를 바르게 습득한 학생들은 수의 개념과 측정의 개념 뿐 만 아니라 다른 상위 수준의 수학내용을 배우는 데에도 훨씬 더 유리한 위치에 있게 된다.

① 평면도형의 성질 탐구 모델

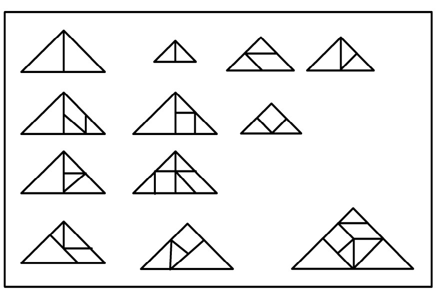
㉠ 탱그램에 들어있는 조각들은 기본적인 평면도형을 여러 위치에서 시각화하고 비교해 볼 수 있는 훈련을 제공해 준다.



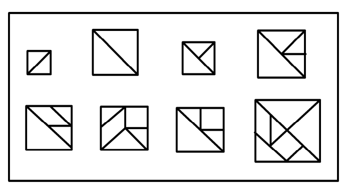
〈탱그램 속의 평면도형〉

㉡ 탱그램은 삼각형, 정사각형, 평행사변형의 모델을 제공하므로 구체를 통해 삼각형, 사각형(정사각형), 평행사변형의 성질을 탐구하는 활동을 제공해 준다.

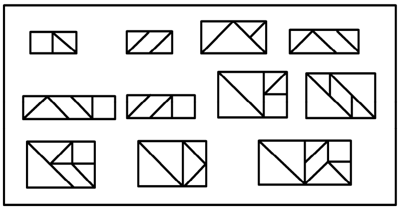
㉢ 학생들은 탱그램의 7개의 조각을 적절히 이용하여 또 다른 평면도형들을 구성해 보는 학습활동을 함으로써 각 도형이 가지는 기본적인 특징들을 확실하게 인식할 수 있다.



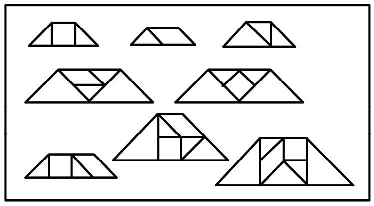
〈탱그램으로 구성된 삼각형〉



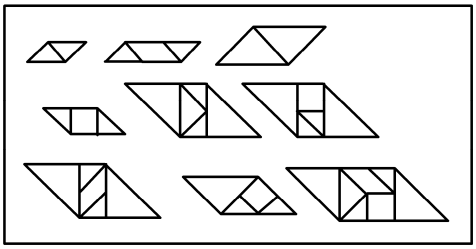
〈탱그램으로 구성된 정사각형〉



〈탱그램으로 구성된 직사각형〉



〈탱그램으로 구성된 등변사다리꼴〉



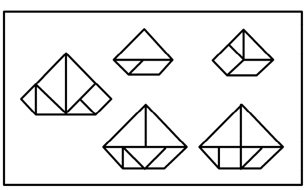
〈탱그램으로 구성된 평행사변형〉

㉣ 탱그램의 합성을 통해 변의 길이와 넓이를 비교하고 이를 바탕으로 도형을 구성하게 되므로 공간감각과 측정 개념, 추론적 사고가 발달된다.

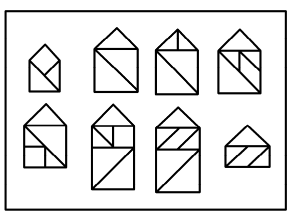
➡ 학생들은 창의적인 구성력을 바탕으로 교실수업에서 종이위에 평면도형을 그리거나 단지 도형의 성질을 말로 설명하면서 도형을 이해해 나가는 것보다 훨씬 더 공간감각을 발달시킬 수 있다.

② 다각형의 구성

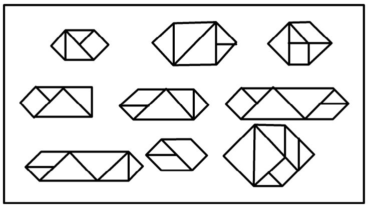
㉠ 탱그램의 구성요소인 7개의 조각은 평면도형의 기본이 되는 다각형들로서 이들을 적절히 혼합하여 구성하면 새로운 다각형을 구성해 낼 수 있다.



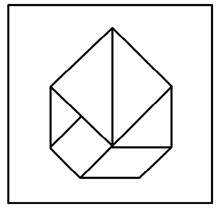
〈탱그램으로 구성된 오각형〉



〈탱그램으로 구성된 오각형(밑이 사각형)〉

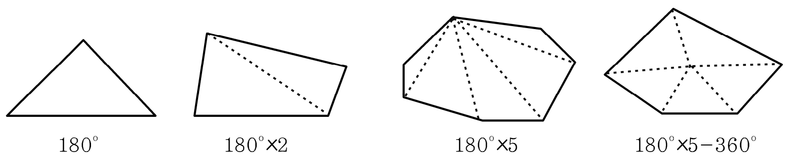


〈탱그램으로 구성된 육각형〉



〈칠각형〉

㉡ 탱그램 조각으로 다각형을 구성하는 활동은 그 역 방향의 활동인 다각형을 분해하는 활동을 구성할 수 있다.



〈도형의 분할을 이용하여 다각형의 내각의 합 구하기〉

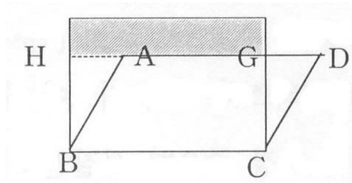
㉢ 탱그램을 퍼즐화시켜 다각형의 구성을 자연스럽게 지도할 수도 있다.

> 아래의 힌트를 이용하여 도형을 만들어라.
> 〈힌트〉
> 이 모양은 세 조각으로 만들어졌습니다.
> 이 모양은 네 개의 변으로 이루어져 있습니다.
> 세 조각 중 한 조각은 삼각형이 아닙니다.
> 세 조각 중 두 조각은 합동입니다.

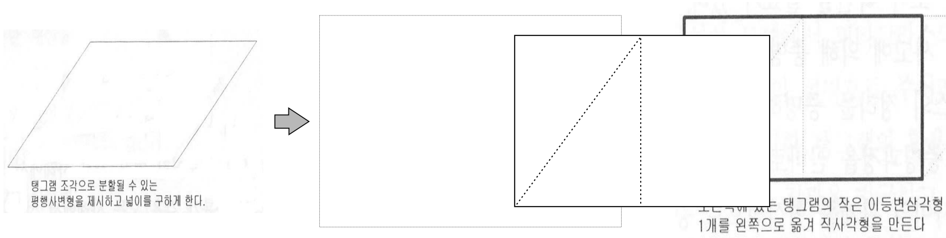
〈퍼즐형태의 도형 구성문제〉

(6) 평행사변형의 넓이 공식 지도에 활용

① 탱그램은 초등 고학년 시기에 평행사변형의 구적공식을 발견시키는 지도과정에서도 활용될 수 있다.



〈평행사변형과 직사각형의 넓이 비교〉



〈평행사변형의 넓이 지도에 활용〉

② 문제해결과정에서 탱그램의 작은 두 직각이등변삼각형의 넓이가 같다는 사실을 합리적으로 이용하면 간단한 조작의 의미를 바탕으로 평행사변형의 넓이공식을 유도해 낼 수 있다.

③ 교사는 평행사변형의 넓이를 탱그램을 이용해 지도함으로써 평행사변형의 높이와 밑변의 의미를 지도할 수 있다.

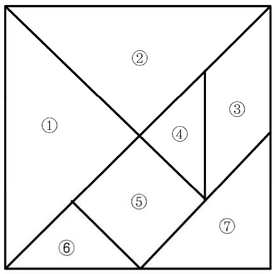
(7) 피타고라스 정리 지도에 활용

탱그램에 들어있는 5개의 크고 작은 삼각형들은 모두 피타고라스의 정리가 적용 가능한 직각삼각형들이다. 따라서 탱그램을 이용한 적절한 문제상황을 만들면 현행 중학교 3학년 수학교육과정에 포함되어 있는 '피타고라스의 정리'를 지도하는데 상당한 도움이 된다.

① 직각삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계 발견(귀납적 사고)

> 교사는 학생들이 어려워하는 증명 과정을 곧바로 지도하기보다는 학생들이 모든 직각삼각형에서 성립하는 세변의 길이 사이의 관계를 형식적으로 증명하여야 할 필요성을 느낄 수 있도록 하는 문제상황을 제공해 주어야 한다.

㉠ 교사는 먼저 그림의 ①, ②, ④, ⑥, ⑦과 같은 탱그램의 직각삼각형 조각들을 학생들에게 나누어 주고 측정과 간단한 계산을 통해 주어진 직각삼각형들에게서 세 변의 길이 사이의 관계인 $a^2+b^2=c^2$을 학생들이 발견해 낼 수 있도록 적절한 발문을 던져 지도한다.



〈탱그램의 구성요소〉

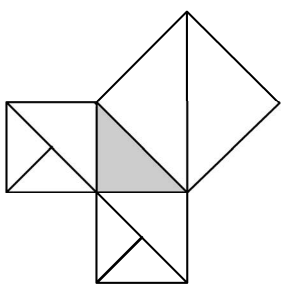
㉡ 이 단계 후에 발견된 관계가 임의의 모든 직각삼각형에서 성립할 것이라는 귀납에 이르도록 한다.

㉢ 귀납에 의한 추측이 참임을 보장받기 위해 연역 즉, 피타고라스 정리의 증명이 필요함을 인식시킨다.

㉣ 마지막으로 피타고라스정리를 교과서에 제시되어 있는 다양한 증명방법을 지도한다.

② '피타고라스 정리' 증명의 위한 모델구성

㉠ 아래 〈그림〉처럼 탱그램에서 큰 직각이등변삼각형 두 개, 중간 크기의 직각이등변삼각형 두 개, 가장 작은 직각이등변삼각형 네 개를 이용하여 피타고라스 정리를 증명한다.


〈피타고라스정리의 증명모델(탱그램 두 세트 이용)〉

③ 제곱근의 연산 지도에 활용

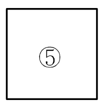
㉠ 탱그램의 조각들로 정사각형을 만들어 보게 한 후에 자신이 만든 정사각형의 한 변의 길이를 계산해 보도록 하는 과정은 피타고라스 정리의 적용과 더불어 무리수를 계산하는 학습상황을 제공해 줄 수 있다.

예 탱그램의 조각들 중의 몇 개를 이용하여 만들어질 수 있는 모든 정사각형을 구성해 보아라. 구성된 정사각형의 모형을 그리고 정사각형의 한 변의 길이와 정사각형의 넓이를 구해 보아라(조건: 탱그램 안에 있는 정사각형 조각의 한 변의 길이는 2이다).

㉡ 무리수와 유리수가 혼합되어 있는 문제를 지도하는 과정도 탱그램을 이용할 수 있다.

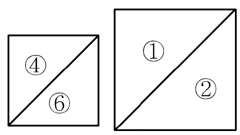
예 $(2+5\sqrt{2})+(4+11\sqrt{2})$를 계산하시오.

(1) 1조각으로 구성



한 변의 길이	2
넓 이	4

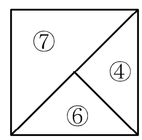
(2) 2조각으로 구성



한 변의 길이	2
넓 이	4

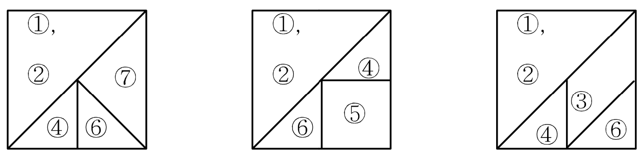
한 변의 길이	4
넓 이	16

(3) 3조각으로 구성



한 변의 길이	$2\sqrt{2}$
넓 이	8

(4) 4조각으로 구성

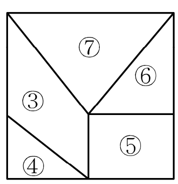


한 변의 길이	4
넓 이	16

한 변의 길이	4
넓 이	16

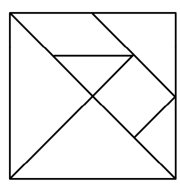
한 변의 길이	4
넓 이	16

(5) 5조각으로 구성



한 변의 길이	4
넓 이	16

(6) 7조각으로 구성



한 변의 길이	$4\sqrt{2}$
넓 이	32

㉢ 학생들의 수준에 따라 정사각형의 한 변의 길이를 정수가 아닌 $a\sqrt{b}$ 꼴로 주면 학생들에게는 보다 복잡해진 계산 상황이 제공되게 된다. 상 수준에 있는 학생들을 위해서는 변의 길이를 $a+b\sqrt{c}$ 꼴로 제시할 수도 있다. 또한 정사각형의 한 변의 길이라는 조건 대신에 정사각형의 넓이 조건을 줄 수도 있다.

㉣ 단순한 무리수의 계산문제 뿐 아니라 분석적 사고를 요하는 문제상황을 보충하여 제시할 수도 있다.

예 탱그램의 각 조각의 넓이를 이용하여 생각해 보면, 탱그램 6조각을 가지고서는 어떠한 정사각형도 구성될 수 없음을 알 수 있다. 그 이유를 설명하여 보아라.

1.6. 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용

① 퀴즈네어 막대는 1960년대 이후의 수학교육 현대화 운동과 더불어 개발된 교구로 일단의 수학적 관계를 유기적으로 상호 관련지어 이해시키고 발전시키기 위해 고안된 활동주의적 수학교육과 교구이다.

② 퀴즈네어 막대는 수와 계산지도를 위한 효과적인 교구로서 전 세계적으로 권장되어왔으며 실제로 개념 중심의 수학자료들 중에서도 학교현장의 교사들에게 가장 많이 채택되어 사용되어오고 있는 교구이다.

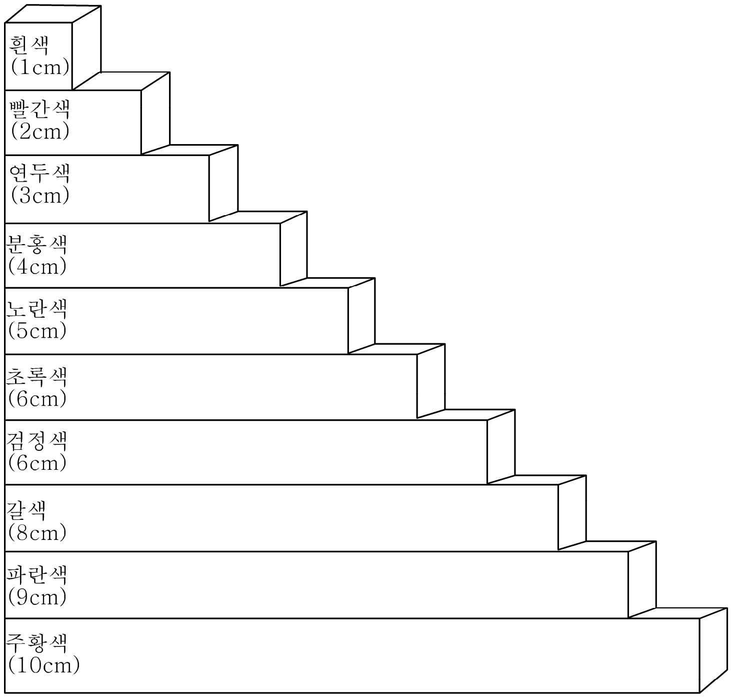
1) 퀴즈네어 막대의 정의

① 퀴즈네어 색막대(Cusinaire color rods)를 간단히 퀴즈네어 막대라 한다. 이는 40여 년 전 벨기에의 초등학교 교사인 George Cuisinaire와 영국의 수학교육자인 Caleb Gattegno가 공동으로 개발한 수학교구이다.

〈퀴즈네어 막대의 구분〉

높이	1cm	2cm	3cm	4cm	5cm	6cm	7cm	8cm	9cm	10cm
색	흰색	빨간색	연두색	분홍색	노란색	초록색	검정색	갈색	파란색	주황색

② 퀴즈네어 색막대는 색과 크기로 구분되는 나무로 된 직육면체 모양의 여러 개의 막대로 구성되어있다(현재에는 나무 또는 플라스틱으로 된 퀴즈네어 막대가 상품화되어있다). 이것은 밑변이 $1cm^2$, 높이가 $1\sim10cm$인 열 가지 종류의 직육면체 막대로 되어 있다.



〈퀴즈네어 막대들의 배열〉

③ 각 막대는 길이와 그에 따른 색에 의해 숫자를 구분해서 나타낼 수 있다. 따라서 한 막대에 한 값을 지정하면 막대들 사이의 관계에 의해서 나머지 9개의 막대에 해당하는 수가 결정된다.

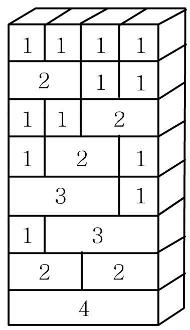
예

흰색 정육면체 막대 1	➡	노란색 직육면체 막대: 5 주황색 직육면체 막대: 10
주황색 정육면체 막대 1	➡	노란색 직육면체 막대: 0.5 흰색 직육면체 막대: 0.1

즉, 퀴즈네어 막대는 막대들 길이 사이의 상대적 크기 관계에 따라 여러 가지 수를 할당하여 다루어 볼 수 있기 때문에 수학에서 핵심이 되는 산술관계나 구조를 자연수 범위에서뿐만 아니라 정수, 유리수까지도 구체화하여 다룰 수 있는 훌륭한 교구이다.

④ 퀴즈네어 막대는 아동에게 직접 계산법을 주입시키는 것이 아닌 계산의 기초가 되는 수학적 관계를 먼저 의식시키고자 하는데 그 특징이 있어 아동들이 막대를 서로 맞추는 과정에서 수 사이의 관계들을 탐구할 수 있다.

예 아래 막대의 크기를 맞추는 놀이를 통해서 여러 가지 수의 합성과 분해를 의식하게 되며, 이러한 의식을 바탕으로 사칙연산을 의미 있게 학습할 수 있게 된다.



⑤ 덧셈의 기본연산을 막대를 길게 늘어놓은 활동 과정 속에서 경험하게 되면 수직선 및 수직선 위에서의 연산의 의미를 구체화할 수 있게 된다.

예 연두색 막대(3cm) 하나와 또 다른 연두색 막대 하나를 연결하면 초록색 막대(6cm)의 길이와 같아진다. 즉

$3 + 3 = 6$ 또는 $2 \times 3 = 6$

을 의미하고 이러한 결과로 수직선의 구성과 그 위에서의 연산의 원리를 구체적인 모델을 통해 이해할 수 있게 된다.

⑥ 퀴즈네어 막대는 막대를 맞추는 놀이를 바탕으로 여러 가지 수의 합성, 분해를 인식시켜 기본적인 산술연산을 가능케 하고 나아가 소수, 합성수, 약수, 배수 등과 분수, 비의 지도에도 유용하게 쓰일 수 있다.

2) 학교수학에서의 퀴즈네어 막대 활용

① 퀴즈네어 막대는 자연수의 여러 가지 측면 곧, 기수, 순서수, 셈수, 측정수, 연산자 등의 제 측면의 지도와 그 상호 관련성의 지도, 나아가 자연수의 사칙연산과 분수지도 등에도 유용한 교구이다.

② 퀴즈네어 막대는 하나의 교구로서 일단의 수학적 개념이나 구조를 표현하기도 하고, 때에 따라서는 서로 전연 관계가 없는 이론의 지도에도 사용할 수 있다.

예 단순히 길이와 색만을 이용한 막대들의 속성을 이용하여 확률, 비율, 넓이, 둘레의 길이, 대칭, 합동, 3차원 기하, 패턴, 함수 등을 탐구

③ 퀴즈네어 막대는 자연수의 여러 가지 측면 즉, 수의 크기 및 대소관계 그리고 사칙연산에 관한 학습활동을 하는데 매우 유용하다.

(1) 분수의 표현 및 동치분수의 개념지도

퀴즈네어 막대로 분수 $\frac{3}{4}$ 의 표상(representation)을 구성해 나갈 수 있다.

① 기준(전체 크기)이 될 막대를 결정

분모가 4이므로 기준이 될 막대는 다른 막대에 의해서 똑같이 4부분으로 분할 될 수 있는 막대이다. 따라서 분홍색 막대(4cm)나 갈색 막대(8cm)가 선택될 수 있다. 여기서는 갈색 막대를 선택한다.

② 기준 막대를 똑같이 4부분으로 나누는 막대 찾기

이때 빨간색 막대(2cm)를 곧 찾아내는 학생들도 있지만 어떤 학생들은 빨간색 막대를 찾기 전에 흰색 막대(1cm)나 연두색 막대(3cm)를 올려 본 후에야 빨간색 막대가 적절하다는 것을 발견하기도 한다.

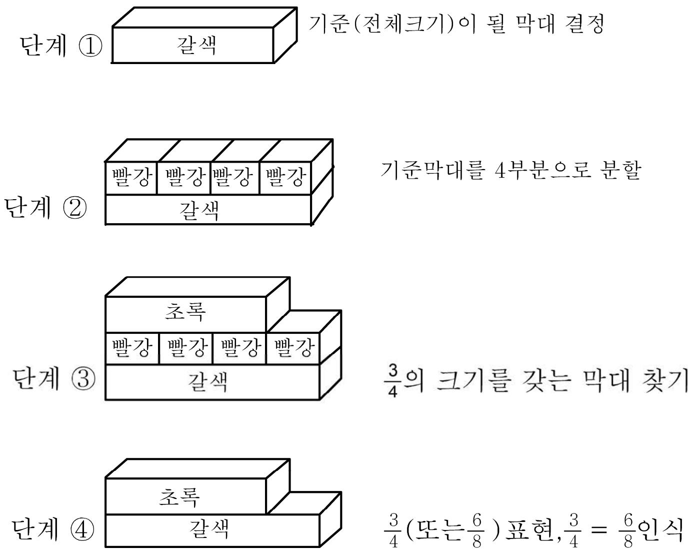
③ 갈색 막대를 똑같이 분할하는 4개의 막대 중에서 3개 막대만을 연결한 길이에 해당하는 막대 찾기

초록색 막대(6cm)를 찾음(갈색 막대 길이의 $\frac{3}{4}$ 에 해당됨)

④ 막대들을 가지고 계속 활동

$\frac{3}{4}$ 및 $\frac{6}{8}$ 의 표상(또는 모델)을 인식

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ 임을 이해(동치분수에 대한 이해)



⑤ 연습문제 제시

연습문제 1: 퀴즈네어 막대들을 사용하여 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{9}{7}$ 나타내어 보아라.

연습문제 2: 퀴즈네어 막대들을 사용하여 위의 각 분수를 적어도 두 가지 방법으로 나타내어 보아라.

(2) 분모가 같지 않은 분수의 덧셈 지도

퀴즈네어 막대는 분모가 서로 다른 분수의 덧셈 지도에도 유용한 구체적 조작물이다. 퀴즈네어 막대로 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$ 을 해결해 나갈 수 있다.

① 2와 5의 최소공배수 찾기

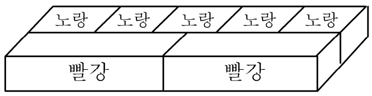
2개로 분할되고 5개로도 분할 될 수 있는 막대 찾기

빨간색 막대(2cm)와 노란색 막대(5cm) 각각을 나란히 배열하여 길게 연결한 열의 길이가 같아지게 한다. 같아진 두 막대 열의 길이에 해당하는 주황색 막대(10cm)를 발견한다.

② 주황색 막대의 $\frac{1}{2}$ 에 해당하는 노란색 막대(5cm)의 크기를 $\frac{5}{10}$ 로 생각한다.

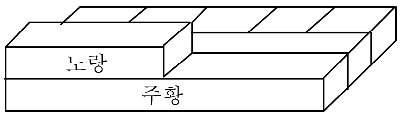
③ 주황색 막대에 $\frac{2}{5}$ 에 해당하는 크기 즉, 빨간색 막대 2개를 합한 길이와 같은 분홍색 막대(4cm)를 노란색 막대에 연결한다.

($\frac{5}{10}$ 에 $\frac{4}{10}$ 를 더하는 과정)

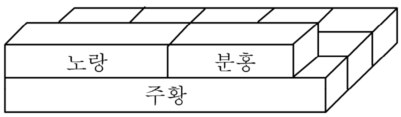
단계 ① 

두 막대 열의 길이 같게 하기

2와 5의 최소공배수 찾기

단계 ② 

$\frac{1}{2}$($\frac{5}{10}$에 해당) 놓기

단계 ③ 

$\frac{2}{5}$($\frac{4}{10}$에 해당)를 더함

④ 연습문제 제시

연습문제 1: 퀴즈네어 막대를 이용하여 분모가 서로 다른 분수의 뺄셈을 해 보아라.

연습문제 2: 퀴즈네어 막대를 사용하여 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 의 값을 찾아보고, 이를 접는 방법 (paper folding)으로도 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 값을 찾아보아라.

> 퀴즈네어 막대를 활용하여 분수의 덧셈을 지도하게 되면 학생들은 특별한 어려움 없이 자연스럽게 막대를 분할하는 활동을 통해 계산 결과를 답할 수 있게 된다. 그들이 하는 활동은 바로 분수의 계산을 위한 사고 과정의 경험이 될 수 있다. 같은 개수로 분할된 그림의 예시를 한두 번 보고 형식적인 계산 방법을 익히는 학습보다는 사고를 바탕으로 한 활동을 통해 결과를 얻는 학습이 보다 관계적으로 의미 있는 학습이 될 것이다.

3) 수학 학습활용에서의 긍정적 입장과 부정적 입장

(1) 긍정적 입장

① 퀴즈네어 막대는 수학적 개념과 사고의 토대가 되는 지각적이고 행동적인 수준에서의 탐구활동을 가능케 한다.

> 아주 어린 아이들에게 퀴즈네어 막대를 주고 막대들 사이의 여러 관계를 제시해 주면 막대를 가지고 활동을 한 후에 아이들은 곧 수학화되어 있는 기호 체계의 의미를 깨닫게 될 수 있다. (가테그노)

② 퀴즈네어 막대는 수학적 사고의 토대가 되는 지각과 행동 및 이를 바탕으로 한 학생들의 개인적인 탐구를 가능케 한다.

③ 퀴즈네어 막대는 학교수학에서 핵심이 되는 여러 관계와 구조를 구체화할 수 있어서 학교수학의 교수-학습과정 및 수학에 대한 학생들의 이해를 용이하게 한다.

④ Piaget의 연구 결과가 시사하는 자연수의 지도를 위해 바람직한 교구로 인정되고 있다.

⑤ 퀴즈네어 막대는 눈금이 그어져 있지 않기 때문에 수와 계산뿐만 아니라 수 사이의 관계 나아가 수학적 구조를 상징적 표현 체계와 결부시키지 않고도 구체적으로 적절히 표현해 낼 수 있어서 학생들은 수나 상징 기호표기에 대한 지식을 가지고 있지 않아도 수학의 여러 가지 추상적 개념 즉, 결합법칙, 교환법칙, 분배법칙이나 수와 연산들과 같은 개념에 친숙해질 수가 있다.

⑥ 퀴즈네어 막대는 막대들 길이 사이의 상대적 크기 관계에 따라 여러 가지 수를 할당하여 다루어 볼 수 있게 하기 때문에 수학에서 핵심이 되는 산술관계나 구조를 자연수 범위에서 뿐만 아니라 정수, 유리수까지도 구체화하여 다룰 수 있는 교구이다.

⑦ 퀴즈네어 막대는 수학에서 핵심이 되는 여러 가지 관계와 구조를 구체화할 수 있을 뿐만 아니라 아동의 직관과 의문을 자극하는 교구이다.

(2) 부정적 입장

① 퀴즈네어 막대의 기본적인 특징, 즉 막대와 수 사이의 대응과 길이가 색으로 구분된다는 특징에서 아동들에게 색채의 영향을 줄 수 있다.

② 퀴즈네어 막대를 이용한 방법은 어떤 하나의 통일된 방법으로 존재할 수 없고 오히려 우수한 아이들부터 능력이 낮은 아이들까지 상당히 다양한 방법들로 나타난다. 따라서 교사는 활용 안목을 키워야 학습에 큰 효과를 얻을 수 있다.

③ 퀴즈네어 막대를 이용하면 사고의 조작적 측면보다는 지각, 이미지가 우선시 되는 사고의 표상적(figurative) 측면에 더 큰 중요성을 주는 위험을 가져다 줄 가능성이 크다.

④ 퀴즈네어 막대를 이용할 때 사고의 표상적 측면의 강조가 결정적으로 색깔 사이의 관계에 놓여질 위험성이 있다.

예 '2 + 4 = 6'을 막대의 배열로 '빨강 + 보라 = 초록'으로 설명되는데 이 등식이 실제 색깔 사이의 관계를 나타내는 것으로 받아들일 수도 있다.

⑤ 퀴즈네어 막대와 같은 교구를 이용하면 아동의 수학 학습이 특정 구체물에 얽매어 이루어짐으로써 이것이 오히려 바람직한 개념의 추상화 과정을 방해하게 될 가능성이 있을 수도 있다(메타인지적 사고의 전환).

2. 공학 활용[16)]

2.1. 수학교육과 교육공학

1) 교육매체를 활용한 수업의 효과(Kemp & Smellie)

과학기술과 정보통신기술의 발달 그리고 테크놀로지의 급격한 발달로 교육에의 활용에 대한 기대가 높아지고 있으며 정보화 시대에 적절한 수학교수-학습환경을 모색하는 것이 중요시되고 있다. 예전과 같이 교사는 일방적으로 설명을 하고 학생은 받아들이기만 하는 방식에서 벗어나 넘쳐나는 다양한 정보 중 학생들이 자신에게 맞게 선택하고 정리하며 통신시설을 통해 정보를 공유하며 지식을 넓혀가도록 지도해야 한다. 특히 제 7차 수학과 교육과정에서도 효율적인 교수 · 학습을 위한 도구로서 계산기, 컴퓨터 등 교육공학[17)]을 도입하고 활용할 것을 제안하고 있다.

① 교수활동이 보다 표준화될 수 있다.
② 학습을 재미있고 흥미롭게 해 준다.
③ 교수 이론의 적용을 통하여 상호작용이 활발한 학습을 가능하게 해 준다.
④ 교수에 소요되는 시간을 줄여 준다.
⑤ 학습의 질을 높여 준다.
⑥ 필요한 장소에서 교수 활동이 용이하다.
⑦ 학생들에게 학습과정에 긍정적인 태도를 갖게 한다.

참고

교육매체를 활용하는 교수활동에서 교사가 반드시 유의해야 할 점은 교육매체의 활용이 교수학습의 질과 효과를 보장하는 것은 아니므로, 학습목표와 내용에 따라 계획을 적절하게 세우고, 적합한 매체를 선택하여 매체의 특성이 효과적으로 활용될 수 있도록 자료를 준비

---

16) '수학교육에서의 컴퓨터 활용'과 관련한 더욱 더 자세한 내용은 다음 교재를 참고할 수 있다.김남희, 박경미 공저, 『수학교육에서의 컴퓨터 활용』 경문사, 2008.

17) 교육기기 [敎育機器]: 교육의 효율성을 높이기 위해 이용하는 각종 기기, 시청각 교구와 전자 공학적 기구를 포함한 교구로 특히 교육공학이 의도하는 교육의 시스템화(化)를 고려하여 활용할 때의 총칭.
교수미디어 (교육매체) [敎授-, instructional media]: 교사를 대신하거나 보조하여 학생에게 직접적으로 일정한 정보를 전하는 교수용 기기(機器).

2) 교육매체의 분류 (Kaput, 1992)

지금까지 수학교육에 영향을 주어왔던 전통적인 교육매체들이 정적이고 수동적인 것인데 반하여 최근에는 교육공학의 발달과 더불어 역동적이고 상호작용이 가능한 전자 매체들이 개발되어 활용되고 있다. 역동적이고 상호작용이 가능한 매체인 경우가 정적이고 수동적인 경우에 비하여 자유롭고 다양하게 새로운 개념을 창조하고 이들을 연결시켜 다양하게 활용할 수 있게 한다.

① 역동성의 유무

㉠ 역동적 매체 예 영화, 비디오테이프 등

㉡ 정적인 매체 예 괘도 등

┌ 영사 이미지를 사용하는 매체 예 슬라이드, 필름스트립, OHP 등
│
└ 비영사 이미지를 사용하는 매체 예 사진, 그림, 도표 등

참고

컴퓨터는 사용하기에 따라 정적인 매체가 될 수도, 역동적인 매체가 될 수도 있다.

② 상호작용의 가능성 여부

㉠ 종이에 연필로 작성한 매체들은 활용하는 과정에서 순간순간을 기다리고 다음 과정을 진행해야 하는 일방적 작용만이 가능하다.

㉡ 컴퓨터는 쌍방향이 작용하는 상호작용을 가능하게 할 수 있다.

③ 과정의 갈무리 형태

㉠ 사용자가 매체의 활용 중 특정 상황에서 시행한 과정을 갈무리(capture)하여 원래의 상황과 유사한 다음 상황에서 이를 되풀이하려고 할 때, 보통은 사용자가 원래의 과정을 기억했다가 그대로 반복한다.

㉡ 컴퓨터 같은 매체에서는 자동적으로 과정을 갈무리하였다가 사용자가 원하는 경우에 언제든지 그 과정을 그대로 재연할 수 있다.

예 기하작도 프로그램에서 사용자가 한 삼각형 위에 중선을 작도하고 나서 삼각형의 한 꼭짓점을 이동시켜도 계속 중선을 그려 준다. 이것은 과정의 갈무리이다.

3) 교육매체의 활용

① 우리가 접할 수 있는 교육매체에는 시청각 자료를 비롯하여 OHP와 같은 투시 자료, 실물 환등기, 슬라이드, 비디오, 계산기, 컴퓨터 등의 자료가 다양하게 있다.
② OHP는 비교적 자료 제작이 쉬워 학교 현장에서 점차 증대되고 있다.
③ 계산기와 컴퓨터의 활용은 시대의 흐름과 환경의 변화에 의해 당연히 사용해야 할 매체로 인식되고 있다.

4) 수학교육공학 활동의 유의점

① 교육적 효과를 고려한다.
② 활용의 편리성을 고려한다.
③ 경제성을 고려한다.
④ 부가적인 영향을 고려한다.

2.2. 투시 자료의 활용

투시물 환등기(Over Head Projector: OHP)는 투명한 물체에 빛을 통과시켜 스크린에 투사하도록 제작된 매체이다. OHP에 사용되는 투시물(Transparency Paper: TP)의 자료는 주로 아세테이지나 셀로판지로 만들어진다.

1) OHP의 특징

① OHP는 조작이 간편하고 교실에서 쉽게 학생들의 상황을 살펴가며 수업을 진행할 수 있는 이점이 있다.
② 투시물의 자료로는 TP자료 이외에 투명체, 불투명체를 사용할 수 있다.
③ 자료 제시에서 겹쳐놓기나 가리기가 가능하므로 비교, 전개, 순서적 제시가 용이하다.

2) TP자료의 특징

① 제작에 경비와 시간 부담이 적다.
② 반영구적인 사용이 가능하다.
③ 이미 만들어진 자료에 첨삭이 가능하다.

3) OHP와 TP자료 활용 시 유의점

① OHP와 TP자료는 수업 중에 한 면씩 제시해야 하므로 교사의 치밀한 사전 준비가 필요하며, 교사가 준비한 자료를 일반적으로 제시하는 단조로운 수업이 되기 쉽다.
② 수업의 진행 속도가 빨라지므로 학습자가 생각할 수 있는 시간적 여유가 부족하기 쉽다.

2.3. 계산기의 활용

1) 계산기 사용의 기본 원칙

① 계산기를 사용함으로써 수학적 개념이 더 잘 이해될 수 있는가?
② 계산기를 사용한 수학활동이 학생들에게 확신을 더 갖도록 하는가?
③ 그 개념이 귀납적인 방법으로 가르쳐질 수 있는가?
④ 계산기의 사용이 학생들에게 실생활에서의 활용을 연구하도록 하는가?
⑤ 계산기 사용으로, 적절한 교육목표에 초점을 맞추어 평가하도록 하는가?

2) 계산기를 수학교육에 활용하는 방법

① 실생활 문제 등과 같은 문제해결을 위해 복잡한 계산을 해야 할 경우 계산기를 사용함으로써 정확한 값을 신속하게 구할 수 있다.
② 계산기를 문제해결을 위한 소재로 사용할 수 있다.
③ 수학 학습을 위한 보조 자료로 활용할 수 있다.
④ 어린 학생들의 수 발달에 있어서 중요한 역할을 할 수 있다.

3) 계산기 활용의 예

① 자릿값의 개념, 큰 수나 일상생활의 수가 관련된 문제
② 분수, 소수, 퍼센트, 계산문제, 문장제 등과 관련된 문제
③ 고차 방정식의 풀이, 확률과 통계, 소수 패턴과 관련된 문제
④ 그래프를 그려야 확인이 필요한 문제

4) 계산기 활용 시 지켜야 할 원칙

① 학생들에게 계산기의 사용법을 알게 한다.
② 구체물과 관련된 소재로 계산기를 도입한다.
③ 학생들이 계산기를 사용하여 결과를 확인할 수 있게 자신의 알고리즘을 탐구하고 발견하도록 한다.
④ 계산기를 사용하기 전에 답을 추측해 보도록 격려한다.
⑤ 실생활의 자료와 문제를 교육 과정에 적절한 문제로 변형하여 사용한다.
⑥ 높은 수준의 사고가 포함된 활동과 프로젝트를 격려한다.
⑦ 계산기를 교육의 목표로 삼지 말고 수학의 교수 · 학습도구로 활용한다.
⑧ 수학적인 문제에 창의적인 방법으로 접근하도록 격려한다.

5) 그래픽 계산기를 활용한 수학수업

(1) 그래픽 계산기의 기능

① 계산 기능

실수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 할 수 있는 산술 계산 기능과 로그함수, 지수함수, 삼각함수 등의 값을 구하는 함수계산 기능, 진법의 계산, 방정식의 풀이, 연립방정식의 풀이 등을 계산하는 기능을 가지고 있다.

② 그래픽 기능

직교좌표 그래프, 매개변수좌표 그래프, 극좌표 그래프, 순차좌표 그래프 등 4개의 그래픽 모드에서 그래프를 그릴 수 있다. 그래프 모드를 선택하기 위해서는 먼저, [SETUP] 키 안에 있는 메뉴 중 COORD 메뉴를 택한 후 서브메뉴 Rect, Param, Polar, Weq 중 하나를 택한다.

③ 행렬 계산 기능

10개의 행렬을 입력할 수 있으며, 한 행렬의 크기는 최대 99×99이고, 입력된 행렬에 관한 여러 가지 연산과 역행렬을 구할 수 있으며, 그 계산을 간편히 할 수 있는 다양한 방법들이 있다.

④ 리스트 기능

리스트 기능은 여러 개의 data를 하나의 list로 나타낸 것으로 여러 개의 data를 한꺼번에 나타낼 수 있게 한다.

⑤ 통계/회귀 계산 기능

이 영역의 중요한 기능들은 표준편차와 1-변수, 2-변수에 대한 평균 계산, 통계 데이터의 그래프 그리기, 회귀곡선의 식과 그래프 그리기, 통계자료의 검증과 추정 등이다.

⑥ 재무기능

은행 예금에 대한 이자, 원리 합계, 원금 상환, 할부금 상환 등 각종 계산을 할 수 있다.

⑦ 방정식 해법 기능

방정식 방법, 뉴턴 방법, 그래픽 방법을 이용하여 방정식을 풀 수 있다.

⑧ Slide/Show 기능

슬라이드 쇼 기능을 갖추고 있어 저장된 함수식과 그것의 그래프 및 좌표관계를 보여주는 화면을 저장하거나 보여줄 수 있다. 슬라이드 쇼 기능에는 두 종류가 있는데, 하나는 내장된 슬라이드를 사용하는 것이고, 다른 하나는 사용자가 슬라이드를 스스로 만들어 사용할 수 있는 것이다.

⑨ Shift/Change 기능

그래프의 변형에 따라 그 함수식의 변화를 알아보는데 편리하다.

⑩ 프로그래밍

프로그래밍 기능을 이용하여 여러 가지 계산을 할 수 있다. 프로그래밍 언어는 BASIC 또는 PASCAL과 유사하다.

(2) 그래픽 계산기의 효과

① 학습의 내용을 쉽게 시각화하여 전달할 수 있으며 학생들에게 동기 유발의 수단으로 작용 가능하다.

② 수학교육에서 추상적인 수학내용을 시각화하여 지도할 수 있다.

③ 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통계를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜줄 수 있다.

④ 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계를 직관적인 지도에 의해 쉽게 전달할 수 있다.

2.4. 컴퓨터의 활용

1980년대 이래 컴퓨터는 하드웨어 기능이 비약적으로 향상되고, 가격이 대폭 낮아졌으며 양질의 각종 소프트웨어가 보급됨으로써 사회의 거의 모든 분야에서 널리 사용되었으며 컴퓨터 과학과 컴퓨터 발달은 수학과 수학교육과 관련하여 여러 가지 면에서도 변화를 가져왔다. 예를 들어 수학에서도 이제는 실험하고 추측(conjecture)하고, 증명, 모의실험 등의 활용이 용이하게 되었다.

1) 컴퓨터와 수학교육

(1) 컴퓨터 기능과 수학교육

컴퓨터는 그래픽, 애니메이션, 시뮬레이션, 계산의 신속성, 정보 기억 용량, 디버깅 등 다른 어떤 교육매체가 갖지 못하는 독특한 교수학습환경을 제공한다. 이러한 컴퓨터의 기능을 수학교육에 도입하여 좀 더 학생들의 이해를 쉽게 하고, 학생 스스로의 문제해결능력을 길러주고 사고력을 신장시키는데 많은 도움을 줄 수 있다.

① 그래픽과 애니메이션

㉠ 추상적인 수학내용을 시각화하여 지도할 수 있게끔 하며 그 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 시각화가 이루어질 수 있기 때문에 수학 학습의 어려움을 크게 완화시켜 줄 수 있다.

예 Mathematica와 같은 프로그램을 통해, 일차함수나 이차함수 같은 간단한 2차 공간, 즉 평면상의 단순한 그래프뿐만 아니라, 머릿속으로 생각할 수밖에 없었던 입체공간상의 그래프도 쉽게 그려볼 수 있다.

㉡ 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계로 그래픽이나 애니메이션을 통한 직관적인 지도는 대단히 효과적이다.

예 그래프의 기울기가 변할 때, 절편이 변할 때 그래프는 어떻게 변하는지 애니메이션으로 볼 수 있다.

② 시뮬레이션

㉠ 시간 · 공간적인 이유 등으로 실제 조작할 수 없는 경우 실제와 유사한 상황을 제시함으로써 학생들로 하여금 직접적인 참여자로서의 역할을 수행하도록 해 준다.

㉡ 수학의 연역적인 성질을 경험적이고 귀납적으로 바꾸어 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다는 점에서 수학교육에서 중요한 위치를 차지한다.

예 cabriⅡ나 GSP를 통해 삼각형의 꼭짓점에서 대변의 중심을 향해 선을 그은 다

면 그 세 선은 한 점에서 만난다는 것을 보여줄 수 있다. 칠판에 그림을 그리듯이 삼각형을 하나 하나 그려볼 필요 없이 이미 그려진 삼각형의 꼭짓점을 움직여 가면서 예각 삼각형도 만들어 보고 직각삼각형, 둔각삼각형으로 모양을 바꿀 수가 있다. 이렇게 삼각형의 모양이 바뀌어도 중점은 변하지 않는다는 것을 확인시켜 줌으로써 일반화를 할 수 있게 된다.

③ 계산능력

㉠ 복잡한 식의 근을 구하거나, 큰 숫자의 곱을 해야 하는 단순 계산식을 컴퓨터를 사용함으로써 시간을 단축시킬 수가 있고, 이러한 계산에 드는 시간을 단축함으로써 학생들에게 보다 사고력을 향상시킬 수 있는 문제들을 가르칠 수 있게 된다.

예 excel을 사용함으로써 간단한 사칙연산에서부터 행렬의 연산, 확률, 통계에 이르기까지 수학에서 쓰이는 모든 계산을 빠르게 할 수 있다.

㉡ 산술적인 계산뿐 아니라 대수적 문자식의 변환도 신속히 처리될 수 있게 됨으로써 종래의 계산 기능 위주에서 문제해결과 같은 사고력 중심의 교육과정으로 옮겨갈 수 있게 해 준다.

④ 오류 수정

프로그램을 짜 나가면서 오류가 발생하면 그 원인을 찾는 과정에서 사고력을 키워나갈 수 있다.

예 excel이나 Mathematica에서 그래프를 그리는 프로그램을 작성해서 실행시켰을 때, 제대로 나오지 않는다면 학생은 자신이 프로그램을 다시 살펴보면서 다시 한 번 사고를 정리하게 되고 다음에 실수를 덜 하게 된다.

(2) 수학교실에서 컴퓨터로 할 수 있는 것(기본적인 활용 소개)

① 중학교 학생들은 소수 또는 최대 공약수 계산, 주어진 날짜가 어느 주 무슨 요일에 해당하는가를 계산하는 등의 프로그램을 만들 수 있다.

② 산업 수학을 배우는 학생들에게는 일차식의 프로그램이나 다른 여러 가지 문제들을 풀기 위한 프로그램뿐만 아니라, 투자, 저당, 감가상각비, 대부금, 세금, 수표금액 등에 관한 어떠한 문제라도 사실상 답하는 프로그램이 있다.

③ 대수를 배우는 학생은 연립방정식을 풀고 행렬 연산과 복소수 계산을 수행하기 위한 프로그램뿐만 아니라 상당히 다양한 축척과 변환 개념을 가진 곡선을 그리고, 직선과 곡선의 삽입, 근 구하기 등의 프로그램에서 매혹적인 도구를 발견할 것이다.

④ 해석학을 배우는 학생들은 극한, 도함수, 그리고 적분 등을 계산하기 위한 프로그램을

쉽게 이용할 수 있다.

⑤ 정교한 시뮬레이션을 하는 것뿐만 아니라 순열과 조합을 계산하기 위한 프로그램은 확률을 배우는 학생들이 이용할 수 있다.

⑥ 통계를 배우는 학생들은 어떤 일반적인 분포에서 주어진 값에 따른 확률을 계산하거나, 여러 가지 훌륭한 통계 조사를 수행, 또는 주어진 자료의 회귀 분석을 완성하는 데에 프로그램을 적용하는 것은 그리 문제가 되지 않을 것이다.

(3) 수학 학습에서 컴퓨터 활용의 실제(영역별 활용 소개)

① 대수와 함수

㉠ 대수적 변환 및 조작 능력에 소비하는 시간의 상당 부분을 응용 중심으로 옮길 수 있다.

예 「TK! solver와 muMath, SAM」과 같은 프로그램은 문자식의 변환이나 조작, 방정식 풀이, 그래프 그리기 등이 간단한 명령어로 가능하기 때문에 기능 위주의 수업 대신 문제해결에 더 많은 시간을 투입할 수 있게 해 준다.

㉡ 지도 계열을 개선함으로써 학습 전체에 대한 태도를 개선할 수 있다. 기능이나 개념을 먼저 지도한 후 응용문제를 접하는 것이 아니라 응용문제를 먼저 소개함으로써 학습내용의 의미를 알게 할 수 있다.

㉢ 역동적인 그래프로 양적인 관계를 산출해 내는 컴퓨터의 기능은 대수학습을 의미 있게 해 준다. 가령, 곡선의 절편, 점근선, 기울기, 오목한 상태 등을 역동적으로 관찰할 수 있으므로 종래의 지필 방법으로는 힘들었던 함수에 대한 직관력을 기를 수 있다.

② 기하

㉠ 기하 개념을 지도하는데 있어서 개념적 이해나 추론을 하기 전에 구조들 사이의 관계를 직관적으로 파악시킬 수 있도록 해 준다.

㉡ 도형과 도형의 변환과 관련된 학습내용을 전체적인 시각을 통해 파악하고 도형을 마음대로 조작할 수 있게 되어 학생들의 시각적 직관력을 키우는데 도움이 된다.

㉢ 「CONG-RUNCE」나 「Geo-explore」와 같은 프로그램을 이용하면 다각형을 스크린 상에 그릴 수 있으면 그것을 대칭 이동시킬 수 있으며 똑같은 것을 복제할 수도 있다.

㉣ 두 도형이 있을 때 한 도형을 다른 도형으로 옮겨 포갤 수 있으며 대응하는 변이 평행이 되도록 정렬시킬 수도 있다.

㉤ 추정하거나 탐구하는 활동에 초점을 맞출 수 있다. 현재 기하 교육은 공리나 정의로부터 주어진 기하학적 정의를 연역적으로 증명하는 과정에 주안점을 두고 있다. 컴퓨

터의 그래픽 기능과 계산처리능력은 학생들 스스로 수치를 결정하고 도표를 완성해 가며 도형 관계를 탐구하고 추정하는 실험 기회를 제공해 수학이 역동적인 과목임을 느끼게 해 준다.

ⓗ 논리적 사고력을 향상시킬 수 있다. 「Proofcheker」와 같은 기하학적 증명에 대한 인공지능 프로그램이 개발됨에 따라 학생들이 컴퓨터와 대화를 해 나가면서 주어진 기하증명문제에 대해 증명을 할 수 있고, 자신의 증명 과정을 스스로 수정할 수 있다. 또한 컴퓨터 프로그래밍 활동은 논리적 추론능력을 향상시킨다.

ⓢ 로고 프로그래밍 언어를 통해 학생들이 초등학교 저학년에서부터 도형을 그리는 훈련을 함으로써, 기하학의 중요원리를 조기에 도입할 수 있을 뿐 아니라 문제해결력이나 초인지(metacognition)와 같은 중요한 수학적 능력을 향상시킬 수 있다.

ⓞ 변환기하를 쉽게 도입할 수 있다. 학교기하에서 변환기하를 도입하기 어려운 것은 도형의 '움직임'을 구현하는 도구가 없었기 때문이었다. 컴퓨터 그래픽 소프트웨어를 사용하면, 변환기하의 중심 아이디어(회전, 대칭이동, 평행이동, 닮은 변환)를 시각적으로 분명히 이해시킬 수 있다. 컴퓨터를 이용한 변환기하의 도입은 학생들로 하여금 기하를 매우 매력적이며 역동적인 과목으로 간주하게 만든다. 변환기하의 필수적인 개념은 매우 간단하다. 그러나 초기에 변환의 합성이 소개될 때, 관련된 그림이 너무 많고 복잡한 계산이 필요하기 때문에 어렵게 느껴진다.

ⓙ 다각형이나 공간도형의 넓이, 부피, 길이 등을 계산하는 것이 쉬워졌다.

예 주어진 둘레나 주어진 n에 대하여 가장 큰 면적의 다각형을 구하는 문제나, 복잡한 계산이 요구되는 헤론의 공식을 통한 삼각형의 넓이 계산 등이 도입될 수 있다.

ⓢ 기하나 여러 다른 과목(대수, 물리, 화학, 확률 등)의 아이디어를 통합시킬 수 있다.

예 변환기하가 도입되고 행렬의 곱을 쉽게 계산할 수 있게 됨에 따라 행렬의 함수적 의미를 쉽게 이해시킬 수 있다. 또한 시뮬레이션 소프트웨어를 이용해 도형의 넓이와 경험적 확률 사이의 관계를 탐구할 수 있다.

③ 통계 및 확률

ⓖ 컴퓨터 시뮬레이션 프로그램을 이용해 학생들에게 경험적인 확률을 도입할 수 있다. 이 방법은 확률 개념에 대한 동기 유발을 도울 뿐 아니라 조작 활동을 통해 확률 개념을 더욱 역동적으로 다룰 수 있게 해 준다.

ⓝ 통계 수업에서 계산에 대한 부담이 없어지고 자료 처리에 대한 기능이 보완됨으로써 일상생활에서 볼 수 있는 생생한 자료를 사용할 수 있게 되어 통계가 학생들에게 의

미 있는 과목이 될 수 있다.

㉢ 통계 패키지를 사용하면 여러 가지 자료를 시각적으로 보여 줄 있으므로 탐구조작 측면에 초점을 맞추어 통계교육을 시킬 수 있게 된다.

④ 미적분

[문제점] 현재 미적분 교육은 개념의 이해보다는 주어진 함수의 미분과 적분값을 구하는 기능 위주에 초점을 주고 있다. 이는 학생들의 인지 수준에 비추어 엄밀한 지도법을 택한 것 그리고 미적분 개념에 들어 있는 극한 및 무한 개념을 지필 환경으로 설명하기가 곤란하다는 데에서부터 발생한 것이다.

㉠ 컴퓨터의 시각적인 기능을 이용하면, 미분계수와 정적분 등의 개념을 좀 더 직관적으로 이해시킬 수 있다. 특히 줌 기능이나 그래프 변환 기능을 이용하면 학생들에게 이해시키기 어려운 미분계수나 정적분의 기본 정리와 같은 개념을 이해시킬 수 있다.

㉡ 그래프를 마음대로 그리고 미적분과 관련된 모든 계산을 수행할 수 있게 됨으로써 종래의 계산 및 기능 위주의 교육에서 벗어나 역동적인 그래프 조작을 통한 실험 탐구적인 환경에 초점을 둘 수 있다.

⑤ 이산수학

㉠ 이산 집합(discrete set)이란 집합의 원소들의 개수를 셀 수 있는(countable) 집합을 말한다. 이러한 이산 집합 위에 정의된 수학적 체계에 대한 학문 분야를 연구하는 수학이 이산수학(discrete mathematics)이다.

참고

이산수학의 영역

조합론(Combinatorics), 그래프 이론(Graph Theory), 기호 논리학(Symbolic Logic), 이산적 최적화(Discrete Optimization), 암호론(Coding Theory), 기정수론(Number Theory), 부울 대수학(Boolean Algebra), 알고리즘 분석(Analysis of Algorithms) 등

㉡ 전산학, 정보통신분야, 전기공학, 사회학, 심리학, 생태학 등의 다양한 분야에 응용될 수 있다는 점에서 이산수학은 최근에 가장 급속히 발전하고 있는 현대 수학분야의 하나이다.

㉢ 이산수학은 컴퓨터를 다루고자 할 때 꼭 필요한 수학분야로써 컴퓨터의 등장과 함께 급속히 발달되었다.

㉣ 컴퓨터에 의한 사색(four-color)문제의 증명은 컴퓨터에 의한 증명을 인정하면서

수학의 증명 영역을 새롭게 넓힐 수 있는 계기가 되었다.

ⓜ 이산수학은 모든 학생에게 재미있는 소재가 될 수 있다. 유한 그래프와 행렬 표현, 수열과 급수, 피보나치 수열, 복리계산, 알고리즘, 프랙탈 등이 학교교육에서 강조될 필요가 있다.

(4) 컴퓨터 프로그래밍(Programming)

① 컴퓨터 프로그래밍

㉠ 컴퓨터의 언어를 사용하여 프로그래밍을 함으로써 수학적인 문제를 해결하게 하는 방법이다.

㉡ 초등학교나 중등학교 저학년을 위한 LOGO, 중등학교 수준을 위한 BASIC, PASCAL 등의 언어가 있다.

㉢ 수학교육에서 컴퓨터를 보다 의미 있게 활용하는 방법으로 프로그래밍 그 자체가 문제해결과정이다.

목표인식	➡	(프로그래밍을 위한) 설계	➡	프로그래밍 작성과 실행	➡	프로그래밍의 결과에 대한 오류 수정
문제이해		문제해결계획		해결계획 실행		반성

㉣ 컴퓨터 프로그래밍을 작성하는데 있어서 오류 수정의 기회를 통해 사고력 향상을 위한 기회로 사용할 수 있다. 오류는 예상하지 못한 엉뚱한 곳에서 일어나기 때문에 학생들의 흥미를 끌 수 있으며 오류를 제거하기 위하여 반드시 무엇을 할 수밖에 없으므로 자신의 행동에 대한 새로운 통찰을 이끌 수 있다.

참고

최근에는 소프트웨어의 발달로 인하여 언어 등의 사용은 줄고 있는 경향이다.

② LOGO

㉠ Papert(1980)-의 저서 『Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas』-는 그의 구성주의적 교육관과 자연스러운 컴퓨터 보조 학습 환경을 구체화하기 위해 LOGO를 설계했다.

㉡ LOGO는 스크린 상에 있는 거북이로 하여금 여러 가지 도형을 그리도록 함으로써 비형식적으로 기하를 조기에 도입할 목적으로 만들어졌다.

㉢ 프로그래밍의 주체로서의 아동들이 거북이와 똑같은 행동을 할 수 있다는 점이

LOGO의 중요한 점이다.

㉣ 문제해결력을 신장시키고 직관력을 배양시킬 수 있는 도구로서 오류분석활동이나 자기 자신의 행동에 대한 반성을 통해 사고력이나 초인지의 향상을 기대할 수 있다.

㉤ 아동들에게 자기의 사고를 의식화할 수 있는 기회를 제공한다.

㉥ LOGO의 특성을 반영한 6단계의 수업 모델은

준비단계 ➡ 구체적 행동 및 행동의 토론 ➡ 행동의 표현 ➡ 프로그래밍 및 진행 ➡ 오류수정 ➡ 확장 및 일반화

예 LOGO 사용의 예

㉠ 정사각형

```
TO SQUARE
REPEAT 4 〔FD 50 RT 90〕
END
```

㉡ 정삼각형

```
TO TRIANGLE
REPEAT 3 〔FD 30 RT 120〕
END
```

㉢ 정다각형

```
TO POLYGON :SIDE :N
REPEAT :N [FD :SIDE RT 360 :N]
END
```

(5) CAI (Computer assisted instruction)

① 개인교수(Tutoring)

새로운 수학적 개념을 지도하기 위한 과정을 제시하고 있으며, 학생은 이 과정에 따라 학습함으로써 새로운 개념을 학습할 수 있다.

예 그래프 사용, 시뮬레이션, 게임 그리고 어려운 수학적 개념과 기능을 가르치기 위한 동적인 설명이 되어 있는 프로그램 등

② 기능연습 (Drill and exercise)

기능 숙달을 위한 것이다.

③ 게임 (Game)

컴퓨터 게임을 통한 학습이나 기능 숙달을 돕기 위한 것이다.

④ 문제해결(Problem solving)

문제해결력을 기르기 위해 문제상황과 적절한 전략을 사용하도록 고안된 것이다.

> **참고**
>
> CAI를 활용하는 동안 학생이 오답 반응을 하였을 경우 컴퓨터로부터 즉시에 피드백을 받을 수 있게 할 수 있으며, 옳은 답을 하였을 경우 즉시 보상받을 수 있게 함으로써 학생들이 개별적으로 자기의 수준에 맞게 학습할 수 있다.

(6) 마이크로 월드(Micro-world): 소프트웨어

① 수학교육을 위해 특별히 만든 소프트웨어로서 학습자가 간단히 어떤 명령을 입력함으로써 학습자가 원하는 다양한 결과를 만들어내게 할 수 있다.

② LOGO, Mathematica, GSP 등 다양한 종류가 있다.

③ 수학적 문제해결력 신장과 창의적 사고력 개발을 위해 이러한 소프트웨어를 많이 사용하고 있다.

(7) 네트워크(Network)

① 인터넷을 사용하여 필요한 정보를 교환하면서 학습에 이용하는 것이다.

② 우리나라에는 교육용으로 개발된 에듀넷(edunet)이 있어서 학교교육에 많은 정보와 도움을 주고 있다.

③ 급속하게 발달하는 전산망으로 인터넷의 학습사용이 많아지고 있다.

④ 빠른 정보의 주고받음 속에서 더 많고, 더 좋은 질의내용을 직접 접할 수 있다.

⑤ 인터넷이 생활화되면서 생활 그 자체까지도 인터넷의 영향을 받고 있다.

2) 컴퓨터 활용 시 수학교육에의 이점

① 학습자들은 첨단 기기인 컴퓨터를 사용함으로써 호기심이 생기고, 흥미를 일으키며, 주의를 집중하게 된다.

② 같은 수학적 개념, 원리, 법칙 등에 대한 그 접근 방법이 다양해질 수 있고 수학 학습 과정도 다양해질 수 있어 학습자들의 수준에 맞는 수업진행이 가능해진다.

③ 다양한 색상을 이용하여 움직임을 묘사하는 컴퓨터의 그래픽과 음향은 현실성 있는 수학 학습을 가능하게 해 주며, 추상적인 수학개념을 시각화시켜 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다.

④ 컴퓨터의 신속성과 기억, 저장능력을 이용하여 학습자의 행동에 대한 즉각적이고도 개별적인 반응을 제공해 준다.

⑤ 컴퓨터가 소유한 계산능력으로 인해 계산 위주의 교육에서 사고력증진교육으로 초점을 맞출 수 있게 된다.

⑥ 프로그래밍학습의 활용 시 가능한 오류 수정을 통해 사고력을 향상시킬 수 있다.

⑦ 프랙탈 같은 새로운 분야가 생겨난다.

⑧ 컴퓨터의 방대한 기억 용량은 개별 학습자의 성적, 교육 성과 및 학습 활동을 기록하고 이에 대한 적절한 사후 지도를 하게 해 준다. 결국, 성적 처리 등의 업무를 처리해 줌으로써 교사에게 학생의 개별적인 지도 및 상담에 좀 더 많은 시간을 할애하게 해 준다.

3) 컴퓨터 활용에 의한 수학교육의 변화

(1) 컴퓨터 활용에 의한 수학의 변화

① 컴퓨터의 발달로 복잡한 수학계산을 보다 신속 정확하게 하고 방대한 양의 수학자료를 저장하고 이를 다룰 수 있게 되었다.

② 컴퓨터는 수학적 대상과 개념을 모의실험하고 시각화하여 줌으로써, 증명에 앞서 추측을 하고 종합할 수 있게 해 준다. 그러므로 수학적인 문제를 해결할 때나 새로운 개념을 도입할 때, 논리-연역적이고 형식적인 행동보다는 점차 "실험적"인 행동으로 대체되어 간다.

③ 컴퓨터는 수학적인 추론과 증명에도 영향을 주었다. 전문적인 시스템의 도움으로, 컴퓨터가 자동적으로 증명을 하거나 상호작용으로 증명을 돕는다.

참고

(단) 복잡한 계산이나, 방대한 사례를 이용한 증명이 증명의 한 부류가 되고 있다. 즉, 긴 계산을 통하여 완성되는 정수론에서의 증명들과, '4색 문제'와 알고리즘의 효율성에 기초한 "알고리즘적 증명"을 증명으로 간주하고 있다.

④ 수학자들의 작업 방식도 달라지고 있다. 인터넷 등의 정보망을 통한 새로운 통신가능성 때문에 정보의 교류 및 집단 작업이 쉬워져가며, 참고문헌 목록을 유지하기도 쉬워져가고 있다.

⑤ 수학적 개념이 바뀌거나 그 중요성에 있어서 지위가 바뀐 경우도 있다.

㉠ 수, 변수, 함수 등이 컴퓨터과학의 영향으로 개념이 바뀌어 가고 있다.

㉡ 컴퓨터 프로그램에서 흔히 볼 수 있는 'I = I + 1' 형태의 등식에서 변수는 미지수가 아니라 어떤 값의 '저장 장소'로 해석해야 하며, 등호의 의미 역시 동치관계가 아니라 '바꾸어 넣는다'는 의미로의 새로운 해석이 필요하게 되는 것이다.

㉢ 프랙탈, 순환(recursion)이나 반복(iteration)과 같은 새로운 개념들과 사고의 방식이 발달되고 있다.

㉣ 수치 해석과 더불어 이산수학(discrete mathematics), 논리, 또는 통계 등이 새롭게 각광을 받게 되는 등 실험적, 수치적이고 보다 알고리즘적이 되어 가고 있다. 수학 내에 알고리즘이 차지하는 부분이 점점 많아지기 때문이다. 알고리즘은 그 자체를 위해 연구되어 지고(알고리즘의 기본 개념들, 새 알고리즘의 발달, 알고리즘 증명하기, 알고리즘의 평가), 수학적 활동 안에서 알고리즘이 아이디어를 표현하고 대상을 구성하고 정리를 증명하는데 사용된다.

(2) 컴퓨터 활용에 의한 수학교수(teaching)에의 변화

① 수업에의 활용

㉠ 칠판대용: 컴퓨터 모니터의 화면을 확대하여 별도의 스크린에 투사할 수 있는 보조 장치들을 이용함으로써 그 효과를 높일 수 있다. 교사가 컴퓨터를 직접 조작하여 예를 제시하거나 그림을 그릴 수 있다.

㉡ 수업활동: 교실에 개인용 컴퓨터(PC)가 있어서 한두 명 혹은 몇 명의 그룹이 되어 프로그래밍을 하거나 패키지를 사용할 수 도 있다. 여러 대의 컴퓨터를 네트워크로 연결할 수도 있다.

㉢ 교실 밖에서의 활동: 컴퓨터는 교실 밖에서 연습, 문서 또는 개인교습 등을 제공하는 "출처(resource)"로 이용될 수 있다. 컴퓨터를 가정에 보유하는 학생 수가 증가할수록 학교 밖에서의 컴퓨터 이용이 크게 증가하게 된다.

② 학습에의 활용–Taylor

㉠ 개인교수(tutor): 질문지와 실험을 통해 학습자로 하여금 정해진 과정을 통과하게 하는 "개인교습"또는 'CAI(Computer Aided Instruction)'으로 불리우는 컴퓨터보조학습이 전통적으로 컴퓨터가 학교수학에서 활용되는 방법이다.

㉡ 학습자(tutee)로서의 컴퓨터: BASIC이나 C 등의 언어들이나 수학을 위한 특수한 언어들로 프로그래밍을 하여 컴퓨터가 결과를 내도록 명령함으로써 수학 학습을 하게 되는 경우이다.

ⓒ 도구(tool)로서의 컴퓨터: 그래프나 함수 등을 그리거나 도형을 그리는 그래픽 패키지 등의 수학적인 유틸리티들, 수학적 개념 또는 문제들을 예시 실연하거나, 모의 실험하는 소프트웨어들, 수학적인 목적을 위해서 사용되는 스프레드시트(Spread sheet), 사용자가 대상들을 조정할 수 있는 소우주(micro world)를 제공하는 소프트웨어를 이용하여 수학 학습이 이루어지게 할 수 있다.

③ 수학교육에서 컴퓨터를 활용하기 위한 과제

㉠ 교사의 컴퓨터조작능력이 전제되어야 한다. 현재 사범대학 교육이나 재교육의 근본적인 개혁이 이루어져야 한다. 일반 컴퓨터교육 외에 수학교육 측면에서 교과내용을 바탕으로 이루어져야 한다.

㉡ 수학교육에서의 컴퓨터의 활용에 대한 기초연구가 활발히 이루어져해 한다. 특히 특정 내용의 추가와 삭제, 학습계열이나 교육내용의 학년별 할당 등에 대한 연구가 시급히 이루어져야 한다.

㉢ 다양한 코스웨어의 개발이 이루어져야 한다. 단순히 교과서 내용을 재설명해 주는 개인학습식 CAI프로그램뿐 아니라 종이 매체로서의 교과서가 담지 못하는 내용이 포함되는 교육용 유틸리티 프로그램이나 사고력 신장을 위한 프로그램 등이 다양하게 개발되어야 한다.

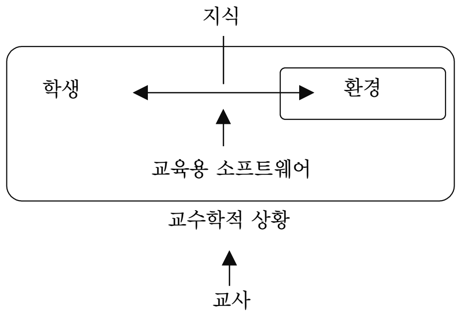
㉣ 더욱 풍족한 컴퓨터 교육환경이 구축되어야 한다. 현재의 한 학교당 평균 30대 꼴의 컴퓨터 대수도 늘려나가야겠지만 학생들이 마음껏 활용할 수 있는 운용체제가 도입되어야 한다.

2.5. 컴퓨터 소프트웨어 활용의 수학교수학적 상황

> 교수학적 상황론
> 특정 지식을 학생들이 구성할 수 있도록 고안된 환경을 학생들에게 제공하여 주고, 학생과 교사 사이에 타협하는 하나의 게임이다.

1) 컴퓨터 소프트웨어 활용의 수학교수학적 상황

교사는 컴퓨터 소프트웨어와 학생의 만남을 조직하여야 하고, 언제 만남이 이루어져야 할지를 결정하여야 한다. 또한 교수학적 과정의 맥락에서, 그러한 만남이 왜 일어나야 하는지를 알고 있어야 한다. 교육용 소프트웨어와 학생 사이의 상호작용의 목적은 지식의 습득이다.



이 상황에서 학생들은 교육용 소프트웨어가 의도하는 것뿐만 아니라 교사의 의도를 여전히 파악하고 있어야 한다. 그러므로 교육용 소프트웨어는 교사가 교수학적 상황을 조직하는 수단이 된다.

2) 컴퓨터에 의한 교수학적 변환(computational transposition)

(1) 교수학적 변환의 의미

① 어떤 지식이 가르칠 대상으로 선정될 때, 이 대상에 일련의 적절한 변환 과정을 적용해 다른 가르칠 대상들과 배열하는 과정 즉, 어떤 지식을 교수학적 대상으로 변환시키는 과정이다(Chevallard, 1985).

② 교수학적 변환 과정은 가르치려는 지식의 의미가 보존되면서 단지 그 지식이 단순화된다는 것을 의미하는 것이 아니라, 새로운 교수 대상을 기존의 교수 대상들의 사이에 새로 설정하는 관계이다. 따라서 새로운 교수대상과 기존 교수 대상들을 단계 지우는 활동이 진행되고 결국 지식의 의미가 변화된다.

③ 가르칠 지식이 교실에 도달할 때, 그것은 교사에 의해 발생하는 새로운 교수학적 변환 과정의 대상이 되어, 교수 학습에 관한 교사 자신의 신념, 수학에 대한 철학 등에 의해, 그 지식을 변환시켜 자기 교실에서 가르치게 될 것이다. 또한 교과서 저자도 자신들의 신념에 의해 수학적 지식을 변환시킬 것이다.

(2) 컴퓨터에 의한 교수학적 변환

① (정의) 컴퓨터의 독특한 한계로 인해, 컴퓨터 환경에서 다루려는 지식이 그 의미가 변화될 수 있다. 이러한 제한점으로 인해 컴퓨터 상황에서 표현되는 수학적 지식은 필연적으로 변화된다.

참고

학생들 눈에는 컴퓨터가 인간과 같은 지적인 능력을 가진 비물질적인 존재로 보일 수 있다. 학생들의 이런 생각은 교사와의 직접적인 교수상황에서 학생들의 학습이 교사의 기대에 부응하기 위해 이루어지는 것처럼, 컴퓨터의 의도에 부합하기 위한 학습으로 전락할 수 있다.

② 소프트웨어를 고안하는 사람의 신념에 의해서 교수학적 변환이 가능하다.

③ 동일한 수학내용을 가르치기 위한 소프트웨어도 어떤 알고리즘을 사용하고 지도하려는 초점에 따라 다른 표현 양식을 가질 수 있다.

㉠ CABRI-GEOMETRY(이하 CABRI)에서 주어진 한 선분 위의 점을 아무런 제약 없이 잡을 수 있다. 이렇게 아무런 제약 없이 잡은 점을 “임의의 점”이라고 하자. “임의의”라는 말을 쓴 것은 점을 ‘랜덤(random)하게 잡았다’는 의미를 보존하기 위해서이다. 선분의 한 끝점을 마우스를 이용하여 드래그하면, 이 “임의의 점”도 이동하여야 한다. 그러나 CABRI에서 이 “임의의 점”은 그 선분을 동일한 비율로 분할하라는 제약을 갖고 있다. “임의의 점”이 처음 선분을 $m:n$으로 내분하는 위치에 있었다면, 선분의 양 끝점을 드래그 하여 선분의 길이를 변화시켜도, 이 “임의의 점”이 선분을 내분하는 비율은 변하지 않는다. 따라서 이 “임의의 점”은 더 이상 임의의 점이 아니다.

㉡ 지필환경에서 도형을 그릴 때, 그 순서는 커다란 문제가 되지 않는다. 그러나 CABRI에서는 이런 순서가 중요하다. 정삼각형은 한 변의 길이가 주어지는 것으로 완전하게 정의할 수 있다. CABRI에서는 두 원을 이용한 전통적인 작도 방법을 따라서 매크로 작성으로 정의할 수 있다. 이 매크로 작성에서 문제가 되는 것은 선분의 양 끝점이다. 이 매크로에는 두 개의 점을 입력하여야 하는데 이 두 점을 입력하는 순서가 달라지면, 작도되는 삼각형의 방향이 달라진다.

④ 컴퓨터에 지식을 모델링하는 혹은 표현하는 방법의 선택은 교수학적 변환의 그것과 유사한 과정을 통하여 지식의 의미를 변화시킨다.

예 LOGO 언어와 CABRI에서 원의 의미

㉠ LOGO의 경우 원은 매우 많은 변을 가진 정다각형으로 정의된다. 이렇게 정의되었을 때, 이 원은 곡선의 굽는 정도가 일정하다는 의미에서 미분기하학적인 원이 된다.

㉡ CABRI에서 원은 고전적인 원의 개념과 일치하는데, 원의 중심과 원주 상의 한 점으로, 우리가 컴퍼스를 가지고 작도하는 것과 동일한 것으로 정의된다.

3) 컴퓨터 환경에서 극단적 교수현상의 가능성

(1) 개인화/배경화의 과정과 관련

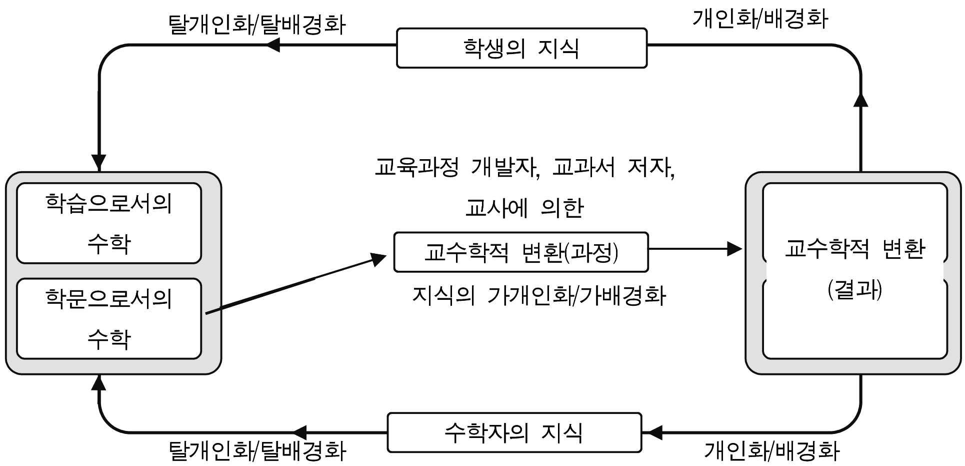
① 메타인지적 이동(metacognitive shift): 가상적인 학생의 개인화/배경화의 과정을 지나치게 강조한 결과

② 형식적 고착(formal abidance): 가상적인 학생의 개인화/배경화 과정의 중요성을 과소평가한 결과

(2) 탈개인화/탈배경화와 관련

① 토파즈 효과(Topaze effect): 학생의 탈개인화/탈배경화의 과정을 간과한 지도 방편적 조치의 결과

② 죠르단 효과(Jourdain effect): 학생의 탈개인화/탈배경화의 과정을 과대평가한 결과



〈교수학적 변환을 둘러싼 수학적 지식의 흐름〉

4) 교수학적 변환 과정

(1) 메타인지 이동

① 교사의 교수학적 노력의 초점이 수학적 지식에 있는 것이 아니라 이를 교수하기 위한 모델에 있는 경우이다.

예 색깔 단추를 이용하여 양수와 음수의 개념을 도입할 때, 수학적 의미가 그러한 모

델에 묻혀 버리는 경우

② 학생의 개인화/배경화의 과정을 용이하게 하는 데 유리한 반면, 학생의 수학을 수학자의 수학과는 사뭇 다른 형태로 이끌 수 있는 위험성이 있다.

③ 컴퓨터 기반 환경에서 컴퓨터를 매개로 하는 교수는 수학적 지식을 지나치게 배경화/개인화 할 수 있는 가능성이 크기 때문에, 우리가 의도하지 않은 이러한 현상이 생길 수 있다.

예 개인 교수형 컴퓨터 소프트웨어를 이용한 교수학적 상황에서 학생들은 주어진 과제가 의도하는 지식을 얻는데 초점을 두기보다는, 주어진 과제를 해결하기 위해 힌트나 도움을 효과적으로 얻는 방법에 대한 학습으로 메타인지 이동이 일어날 수 있다.

(2) 형식적 고착

① 공식화된 지식의 논리적 표현에만 의존하는 교수현상으로서 메타인지 전략을 무시하고 지식의 은유적 사용을 억제하려는 시도로 일어난다.

예 '유클리드 원론'에서 볼 수 있는 수학적 지식의 연역적 구성

② 형식적 고착은 학생들이 수학적 활동이 가진 귀납적 성격을 이해하는데 도움이 되지 않으나, 탈개인화/탈배경화의 과정에서의 어려움을 줄여 줄 수 있다. 컴퓨터 환경은 기호나 문자가 쉽게 도입될 수 있는 환경이다.

예 LOGO 프로그래밍 환경에서 아동들은 그리려고 하는 사각형의 변의 길이를 SIDE와 같은 문자를 사용하여 나타내는데 주저하지 않는다.

예 Mathematica나 Maple과 같은 기호조작 소프트웨어(Computer Algebraic System)를 이용한 수학 학습에서는 사용되는 문자나 대수식에 대한 어떠한 배경지식이 없이도 인수분해, 두 다항식의 곱, 미분, 적분, 극한의 값을 계산할 수 있다. 문자나 변수 등에 대한 이해 없이 이런 조작들을 컴퓨터 환경에서 수행한다면, 바로 형식적 고착 현상이 일어날 가능성이 높다.

(3) 토파즈 효과

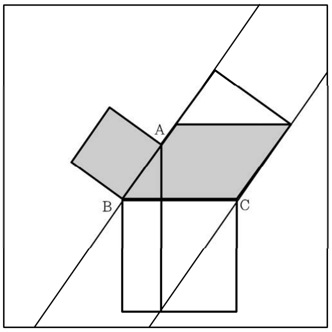
① 소위 교수학적 계약(didactical contract)에 의한 압박에서 일어나는 전형적인 현상으로 교사가 학생이 인지적 내용에 대한 학습을 할 수 있는 환경을 일소하는 것을 말한다.

②'깔때기 패턴'이라고 볼 수도 있는데, 교사가 일련의 유도 질문을 통하여 원하는 결과를

끌어내거나, 교과서에서 문제에 대한 답을 함께 제시하는 것이 그 예이다.

예 웹(web)기반 교수 환경에서 수학적 지식, 과제 등은 HTML이라는 스크립트 언어로 작성되는데, 흔히 문제와 함께 쉽게 도움을 구할 수 있는 힌트 버튼과 정답 버튼이 있어, 학생들이 주어진 과제를 해결하기 위해 심사숙고하기보다는 도움과 정답을 쉽게 구할 수 있기 때문에 학생의 기회가 사라져 버릴 수 있다.

예 피타고라스 정리, Web 환경에서 구체적인 조작을 통하여 그 증명 과정을 학습하도록 제작한 애플릿: 여기서 학생들이 할 수 있는 조작은 정사각형을 두 변의 연장선을 따라 밀어 넓이를 보존하면서 모양을 변형시키는 조작(sheer), 이를 한 꼭짓점을 중심으로 변형시키는 조작(notate), 그리고 이렇게 변형된 사각형을 임의의 위치로 움직이는 조작(move) 등이다. 학생이 shift 조작을 선택하면 선택한 정사각형의 네 변에 붉은 점이 나타나 이 점을 클릭하는 순간 학생들이 정사각형을 변형시켜야 하는 경로가 나타난다. 이는 정사각형을 어떻게 조작하여야 할지에 대한 사고 과정을 학생들에게서 앗아갈 수 있다.



(4) 죠르단 효과

① 토파즈 효과의 퇴행으로, 교사가 학생들의 행동이나 반응에서 특정한 과학적 지식이 형성되었음을 확인하는 듯이 행동하게 되는 경우를 말한다.

예 요구르트 병이나 색칠한 그림으로 약간 기이한 조작을 해낸 아동에게,“넌 방금 클라인 병을 발견했어”라고 말해 주는 경우

② 컴퓨터 환경에서 학생들의 특정 조작을 훌륭히 수행하였다고 해서 그런 조작 이면에 들어 있는 수학적 개념을 이해하였다고 보기는 어려울 것이다.

예 주어진 몇 개의 조작을 컴퓨터가 안내하는 대로 조작하여 원하는 결과를 학생들이 얻었다고 해서 학생들이 피타고라스 정리를 완전히 이해하였다고 보기는 어렵다.

3. 수학교육에서 사용가능한 교육공학: GSP, LOGO, Equation Grapher, Geogebra

3.1. Geometer's Sketchpad와 활용

수학교육을 목적으로 개발된 소프트웨어들 가운데 GSP나 Cabri Geometery는 사용자에게 탐구환경을 제공해 준다. 이들은 도형을 정확하고, 빠르게 작도할 수 있게 하고, 도형의 요소들 간의 기하학적 연계성을 시각적으로 분명하게 보여주며, 변화의 다양한 경우를 실험할 수 있게 하여 지필환경의 한계를 넘어 무한한 탐구의 세계로 기하학습의 장을 확장시킬 수 있다. 이들 소프트웨어는 근본적으로 사용자와 소프트웨어의 상호작용을 전제로 하며, 사용자의 능력에 따라 여러 가지 수준으로 활용이 가능하다.

1) GSP의 특징

① 종래의 프로그램은 자와 컴퍼스만을 이용해서 생생한 기하학적 원리를 담은 그림을 정확히 그리기에는 분명하지 못하고, 여러 가지 한계를 가지고 있었다. 이 SketchPad (이하 GSP)는 기본적으로 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 명확히 구현할 수 있으며, 이러한 그림들은 빠르고 엄밀하게 도형들의 본질적인 관련성을 쉽고 명백하게 나타낼 수 있다. 특히 GSP는 각의 이등분선, 선분의 중점, 평행선 그리기, 수직선 그리기 등 기본적인 작도 기능을 한 번에 수행할 수 있다. 또한 평행이동, 대칭이동, 회전이동의 변환도 한 번에 가능하다.

② 애니메이션(동화상)이 쉽게 구현되어 도형의 자취나 궤적을 그려낼 수 있다.

③ Script를 이용하여 그림 그리는 과정을 기록할 수도 있고, 그 기록을 다시 재생할 수도 있다. 또 Script에는 반복기능이 있어서 Fractal 그림을 그릴 수 있다.

④ 도형의 여러 요소의 색상 처리, 변환, 측정, 계산, 도형의 방정식 등의 표현이 쉽게 구현되며, 도형의 이름을 붙이거나 주석을 다는 여러 표현도 손쉽게 처리할 수 있다. 또한 도형의 각 요소의 움직임에 따라 각 도형끼리의 관련성은 그대로 유지되며 그 우아한 움직임을 관찰할 수 있다.

⑤ 그래프 메뉴의 Plot으로 두 변량의 관계를 그래프로 나타낼 수 있다.

2) GSP를 통한 평면기하 지도의 의의

① 동적인 평면기하의 성질을 정적인 상태의 인쇄 매체, 칠판에서의 강의 등을 통하여 지도할 때보다 더욱 확실하게 이해시킨다.

② 일반적인 그림 프로그램과 달리 자(직선 또는 선분)와 컴퍼스(원)만을 사용하는 작도(Construction)와 측정(Measurement)을 통하여 학생들의 흥미를 자극한다.

③ 평면기하의 어떤 성질이 성립할 것 같은가? 또는 평면기하의 성질을 발견적으로 찾아낼 수 있도록 자극할 때 GSP를 마치 실험도구로 사용하여 실제로 작도하고, 측정하여 그 성질에 대한 가설을 학습자 스스로 세울 수 있도록 도와준다.

④ 평면기하의 성질이 학습자에게 충분히 이해된 다음 연역적인 증명이 필요한데 이때에도 GSP는 정확한 그림을 제공하여 증명이나 문제풀이에 필요한 정보를 제공하게 한다.

⑤ Animation과 Drag를 사용하여 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있다. 특히 Animation으로 만들어지는 Trace는 도형의 자취를 생생하게 보여 준다. 머릿속으로 아마 '그렇게 될 거야'라는 것보다 더욱 현실감을 갖게 한다.

⑥ GSP에서 제공되는 직교좌표계와 극좌표계를 통하여 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하적 접근이 가능하다.

3) 학교수학에서의 GSP 활용

① 효과 1: GSP의 측정과 작도 기능은 학생 자신의 추측을 확인하고 새로운 정리를 발견할 수 있도록 돕는다.

예 무게 중심에 관한 정리와 그 3차원적 확장으로 얻어지는 코만디노의 정리 증명

A. 무게 중심에 관한 다음 정리를 증명하여라.
(1) 삼각형의 각 꼭지점에서 대변의 중점을 이은 선분(중선)은 한 점에서 만난다.
(2) 그 점은 각 중선을 2:1로 나눈다.
B. 무게 중심에 관한 정리를 3차원으로 확장한 것이 코만디노의 정리이다.
(1) 코만디노의 정리가 어떻게 될지 추측하여 서술하여라.
(2) 코만디노의 정리를 증명하여라.

삼각형의 무게 중심에 관한 정리를 3차원으로 확장시키면 사면체의 한 꼭짓점에서(대변의 중점 대신에) 마주 보이는 삼각형의 무게 중심을 연결한 선분이 한 점에서 만날 것이라고 유추할 수 있다. 학생들은 삼각형을 사면체로, 대변의 중점을 마주 보이는 면의 무

게 중심으로 바로 확장하였다. 그리고 이때 교점은 삼각형의 경우처럼 각 선분을 2:1로 내분할 것이라고 추측하였다. 그러나 GSP를 활용하여 이 상황을 작도한 결과 학생들은 2:1로 내분할 것이라는 자신의 추측이 옳지 않음을 확인하게 되고 추측을 수정하여 새로운 정리를 발견할 수 있게 된다.

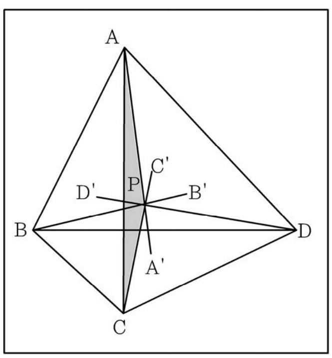
선생님: 무게 중심에 관한 정리를 3차원으로 확장하면 어떻게 말할 수 있을까? 삼각형, 세 중선, 2:1의 비는 각각 어떻게 될 것 같은가?

학생 1: 삼각형이 입체가 되면 사면체? 꼭짓점과 대변의 중점을 연결한 선분은 꼭짓점과 마주 보이는 면, 삼각형의 무게 중심으로? (학생들은 종이에 사면체를 그리고, 네 꼭짓점에서 마주 보이는 삼각형의 무게 중심을 각각 연결하였다.) 이것들이 한 점에서 만나고... 그 비는 2:1이다? 이게 맞나? (학생들은 공간에 좌표축을 설정하여 교점의 자표를 구하여다가 식이 복잡해지자 당황하였다.)

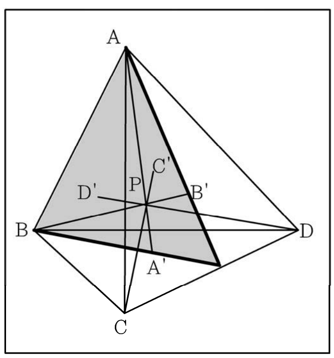
선생님: 작도를 해서 추측이 맞는가 확인할 수 있을까?(학생 2가 GSP로 작도를 시작하여 사면체의 겨냥도를 그린다〈그림 1〉)

학생 2: 무게 중심하고.... 연결하고... (학생 2가 사면체의 각 면의 무게 중심을 작도하고 마주 보이는 꼭짓점과 각각 연결한 다음 꼭짓점들을 이리저리 움직여 본다. 학생 2는 무게 중심을 작도하기 위해 각 면에 그은 중선들은 화면에 나타나지 않도록 숨기기를 하였다. 나머지는 컴퓨터 모니터 앞에 모여 이를 지켜본다)

학생 3: 이것은 네 선분이 한 점에서 만나네... 그러면 이것(네 선분)도 각각 2:1로 내분하는 점이 교점이 된다는 말인데...



〈그림 1〉



〈그림 2〉

학생들은 교점이 각각 선분을 2:1로 내분할 것이라고 추측하였으며, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하던 앞서의 방법(한 선분을 2:1로 내분한 점을 나머지 선분들도 지나게 된다는 것을 앞서의 활동에서 이미 보였음)을 적용하여 네 선분이 한 점에서 만난다는 것을 보이려고 하였다.
정사면체에서 네 선분이 한 점에서 만난다는 것을 지필환경에서 그림을 그려보고 증명을 시도하던 학생들은 그림이 복잡해지자 좌표를 이용하려고 하였다. 그러나 이 방법 역시 복잡한 수식을 조작해야 하는 것으로 나타나자 학생들은 당황해 하였다. 이때, 좌표를 설정하는 대신 종합적 방법을 적용하는 것이 어떻겠느냐는 연구자의 제안에 학생들은 GSP로 상황을 작도하였고, 학생들은 모니터 상에 나타난 겨냥도를 조작하며 변화를 관찰하여 증명의 실마리를 찾으려 하였다(이때까지 선분의 비는 2:1로 믿고 있음).

학생 2: 이것은 눈에 보인다고 생각하고... 선마다 색을 달리 칠하자. (학생 2는 각 꼭짓점에 기호를 붙이고, 보이는 곳은 색을 달리 설정하였다.(그림 참고)) 이제 $\overline{AP}$: $\overline{PA'}$가 2:1인 것을 어떻게 보이냐?

학생들은 AA'와 BB'의 교점을 P라 할 때, $\overline{AP}$: $\overline{PA'}$=2:1인 것을 보이면 된다고 생각하고 있었고 이를 위하여 GSP 화일에 그림과 같이 보조선 AE, BE를 그려 넣었다. 그리고 삼각형 ABE가 한 평면으로 드러나도록 색을 칠하였다(〈그림 2〉). 이 과정에서 이들은 삼각형 ABE에 주목하게 되고 AE, BE가 각각 사면체의 면을 이루는 삼각형의 중선이며 B'과 A'는 $\overline{AE}$와 $\overline{BE}$를 2:1로 내분함을 즉각적으로 인식하였다. 그러나 여전히 점 P가 각 선분을 2:1로 내분하는 것으로 생각하였고, 그림에서 이를 확인하려고 하였다.

학생1: ($\overline{AB'}$: $\overline{B'E}$)이 2:1이고 에게 ($\overline{CA'}$: $\overline{A'E}$)이 2:1이니까 여기($\overline{AP}$: $\overline{PA'}$)도 2:1이라고 말할 수 있냐? (이때 학생 2가 각 선분의 길이를 측정하기 위해 선분 $\overline{AP}$와 $\overline{PA'}$를 선분으로 지정하고 길이를 측정하기 위하여 계산기를 화면에 나타낸다.)

학생 4: 야, 계산기 누르는 단축키가 뭐냐? ... (중략)...
학생 2: 길이를 재보자.

학생 1: 겨냥도인데 길이가 같냐?

학생 2: 아니, 비가 같아.

학생 4: 아 그러면 이게 2:1이 되는구나. (두 길이와 비의 값이 계산기로 측정되어 화면 좌측 상단에 나타난다.(〈그림 3〉 참조)

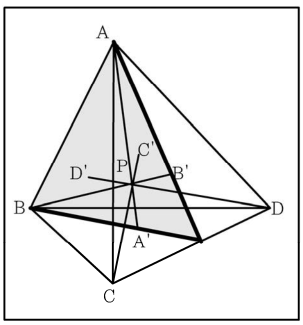
학생 2: 어~, 3:1이다.

학생 1, 4: 뭐? 3:1이라고? (중략)..

학생 2: 맞다! 이게 2:1이니까... ($\overline{AB} = \overline{A'B'}$ 가 3:1이 됨을 상기시킨다.).

학생 1, 3, 4: 아 그렇구나! 2:1이 아니네...

학생들은 나머지 두 선분 BB', CC'에 대해서도 교점 P가 각각을 3:1로 내분하는 것을 측정을 통해서 확인하고 자신들의 추측을 수정하였다. 여기서 학생들이 정리를 발견하고 증명하는 과정은 별개의 것이 아니고 동시적인 것으로 나타나고 있음을 알 수 있다.



〈그림 3〉

② 효과 2: GSP의 시각화와 조작 기능은 증명의 방법을 발견하도록 돕는다.

참고

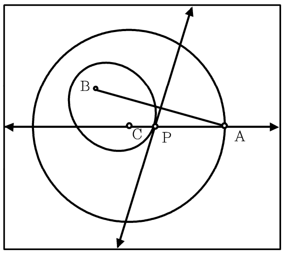
학생들은 문제의 조건을 만족하는 도형을 작도하는 과정을 통하여 해당 도형과 관련이 있는 성질을 시각적으로 재인식하게 되어 문제해결에 직접적으로 이를 수 있는 실마리를 찾을 수

예 코만디노의 정리를 증명하는데 있어서 GSP로 작도한 3차원의 겨냥도, 특히 〈그림 3〉에서 AE와 BE의 작도는 도형의 요소들 사이의 관계를 발견하고 증명하는데 결정적으로 도움을 준 것으로 나타났다. 동적인 변화를 가능하게 하는 소프트웨어의 시각화 기능은 복잡한 3차원 겨냥도에서 학생들로 하여금 삼각형 ABE에 주목할 수 있게 하였고 결국 이것이 정리의 완성된 증명이 가능하도록 이끌었다.

③ 효과 3: 탐구형 소프트웨어는 문제해결을 도울 뿐 아니라, "~이면 어떨까?" 또는 "~이 아니면 어떨까?"라는 사고를 자연스럽게 유도하여 탐구의 장을 확장시킨다.

그림과 같이 중심이 C인 원 위에 한 점 A와 내부에 한 점 B가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}$의 수직이등분석과 $\overline{CA}$와 교점을 P라 하자. A가 원 C 위를 움직일 때, 점 P의 자취는 어떤 도형인가?

(1)



<그림 4>

문제에서 중심이 C인 원 위에 한 점 A와 원의 내부의 한 점 B가 있을 때 직선 CA와 선분 AB의 수직이등분선의 교점을 탐구하는 문제에 대하여 학생들은 지필환경에서 몇 개의 점을 찍어보고 4명 중 1명만이 타원이라고 하였고, 3명의 학생들은 그 궤적이 원일 것이라고 추측하였다.

학생 1: 이거 타원이다.
학생 2: 내 생각에는 원인 것 같아.
학생 1: (확신 있는 어조로) 아니, 만약 점 B가 점 C에 일치한다면 동심원이 되지!

학생 1은 이미 $\overline{BP}+\overline{\mathrm{CP}}$가 일정함을 주어진 그림을 통해 인식하고 점 P의 자취가 타원임을 확신하고 있었다. 나머지 학생들은 학생 1의 설명으로 자신들의 추측이 잘못된 것 같다는 것을 직감하였고 이를 확인하기 위하여 학생 2가 GSP로 문제상황을 작도하여 컴퓨터 모니터에서 P의 자취 〈그림 4〉를 관찰하였다.

학생 1: 아~, 초점이 되네!

학생 3: 아~, 합이 일정하구나!

이때 그림에서 점 B와 점 C가 초점의 역할을 하고 있는 것과 BP와 CP의 길이의 합이 원 C의 반지름으로 일정하다는 사실을 발견하였다. 학생들은 계속하여 점 B의 위치를 움직여 보면서 B의 위치에 따라 모니터상의 타원의 모양이 달리 나타나는 것과 점 B가 점 C와 일치할 때 원이 된다는 사실을 발견하였다.

④ 효과 4: 학생들은 익숙한 상황보다는 다소 생소한 상황에서의 탐구에 소프트웨어를 사용한다.

4) GSP와 기하 학습 수준

① 기하 학습 수준에 대한 van Hieles에 따르면 유클리드 기하의 연역적인 체계를 이해하기 위해서는 도형의 요소에 주목하며 도형의 성질을 탐색하며 비형식적인 증명의 수준을 반드시 거쳐야 한다. GSP는 소프트웨어의 특성상 도형의 성질을 탐색하는데 더없이 훌륭한 환경을 제공한다.

② GSP는 탐구용 소프트웨어로서 유클리드 기하의 연역적 체계를 다루되 명제나 증명의 발견의 과정이 간과되지 않도록 정리의 발견과 증명에 학습자의 능동적인 참여를 가능하게 하는 것으로 나타나고 있다.

3.2. LOGO와 활용

1) LOGO의 특징

LOGO는 스크린 상에 있는 거북이로 하여금 여러 가지 도형을 그리도록 함으로써 비형식적으로 기하를 조기에 도입할 목적으로 만들어졌다. 이때 중요한 것은 프로그래밍의 주체로서의 아동들이 거북이와 똑같은 행동을 할 수 있다는 점이다.

① 거북이의 움직임과 기하를 연결시켜 직관력을 배양하게 된다.

② 자신이 작성한 프로그램 활용 후 발생하는 오류분석활동을 통해 대상을 자기 자신의 눈으로 파악하는 능력이 촉진된다.

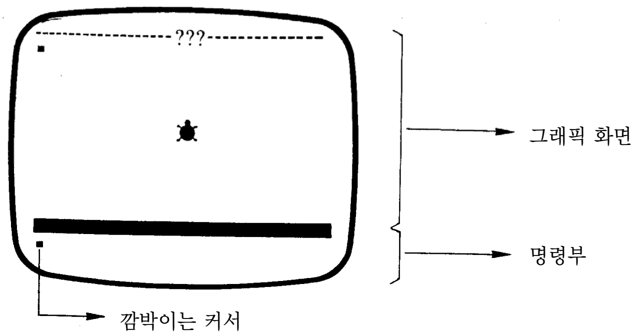
③ LOGO를 통해 종래의 유클리드 기하와 해석기하와는 다른 제 3의 기하가 수학교육에 도입될 수 있다.

④ 오류분석활동이나 자기 자신의 행동에 대한 반성을 통해 사고력이나 초인지(메타인지)의 향상을 기대할 수 있다.

2) 학교수학에서의 LOGO 활용

(1) 로고 화면

로고 실행 화면은 다음과 같다.



•거북이가 그래픽 화면의 중앙에 있다.

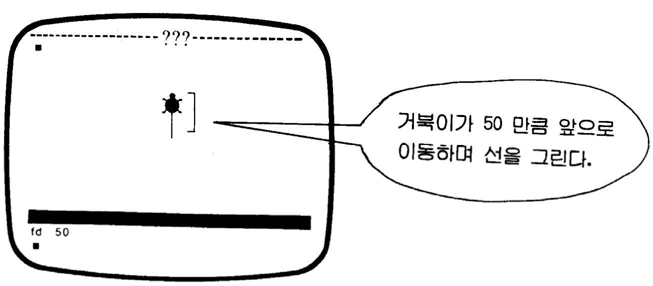
•커서가 명령부에서 깜박이는 것은 명령을 하라는 신호이다.

•명령을 입력하고 [Enter↵] 키를 누르면 그래픽 화면의 거북이가 움직인다.

(2) 기본 그림 그리기

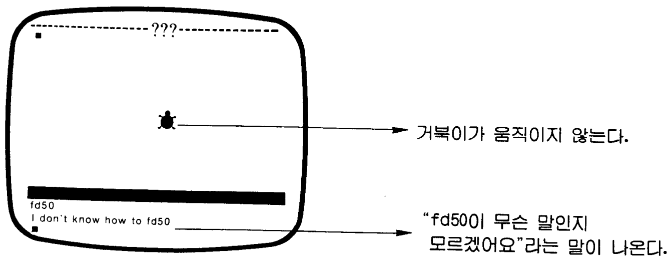
① 거북이를 앞으로 이동시키기

forward 50 [Enter↵]　　또는　　fd 50 [Enter↵]

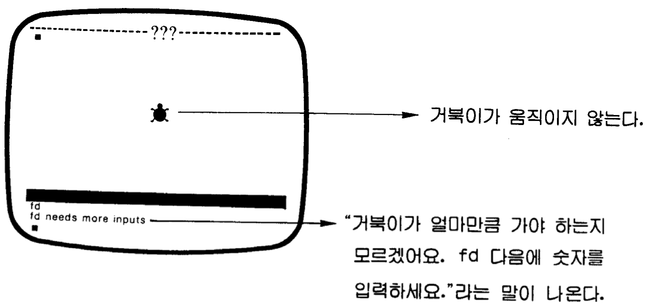


*명령을 입력한 후 [Enter↵] 키를 누르면 거북이가 명령대로 움직인다.

㉠ 명령어와 입력값(숫자) 사이를 띄우지 않고 fd50이라 입력하면 거북이는 움직이지 않는다.



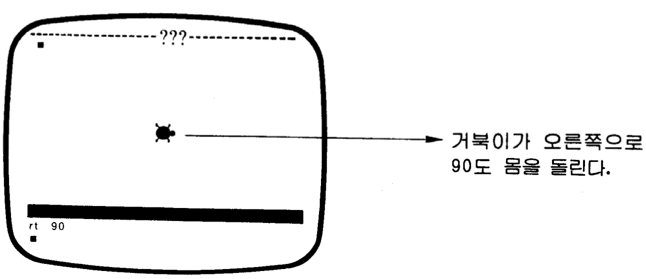
㉡ 입력값(숫자) 없이 fd만 입력하면 거북이는 움직이지 않는다.



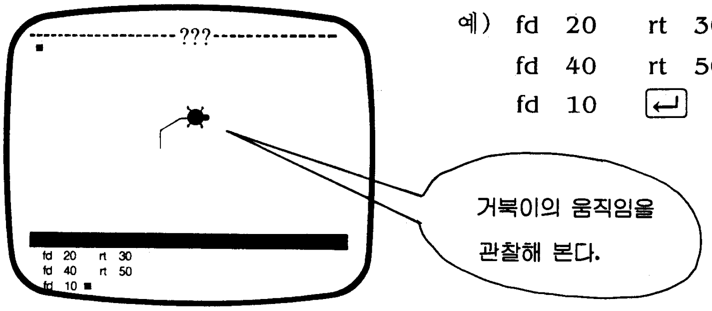
② 거북이의 방향을 바꾸기

㉠ 오른쪽으로 돌리기

right 90 Enter↵ 또는 rt 90 Enter↵

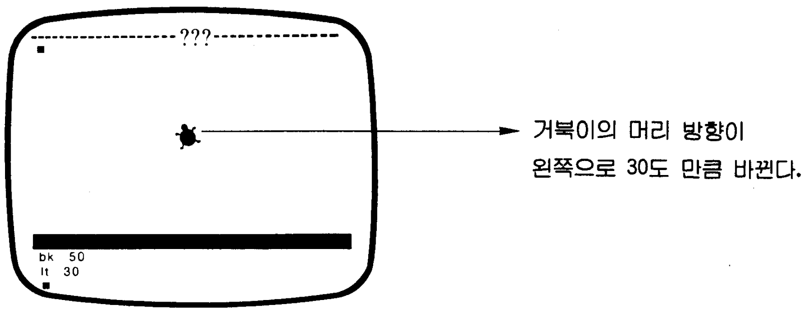


예) fd 20 rt 30 ↵
fd 40 rt 50 ↵
fd 10 ↵



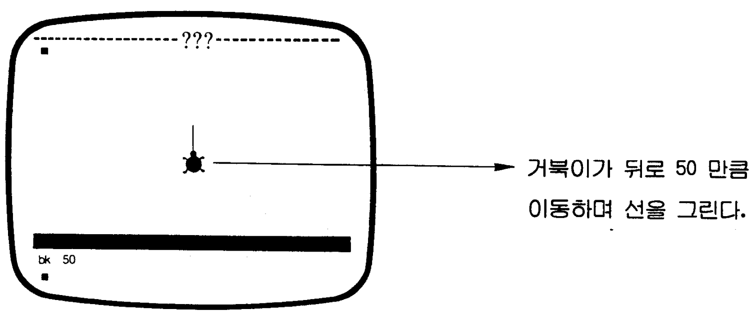
㉡ 왼쪽으로 돌리기

left 30 Enter↵ 또는 lt 30 Enter↵

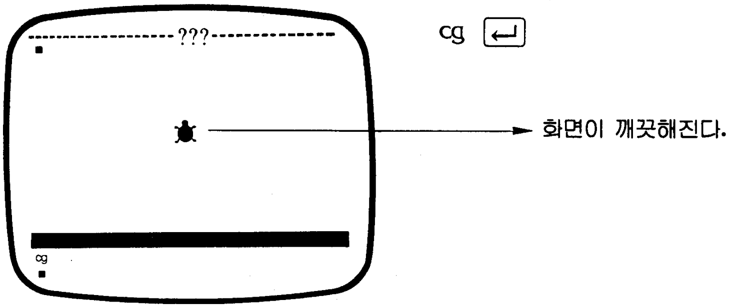


③ 거북이를 뒤로 이동시키기

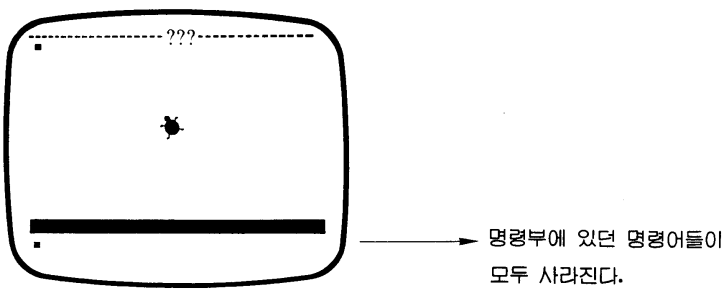
back 50 Enter↵ 또는 bk 50 Enter↵



④ 화면의 그림을 지우기: cg를 입력하고 Enter↵ 를 친다.

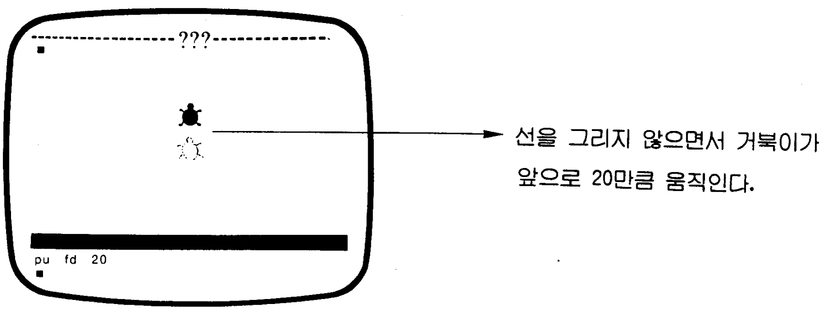


⑤ 명령부의 명령어들을 지우기: cc [Enter↵] 를 친다.



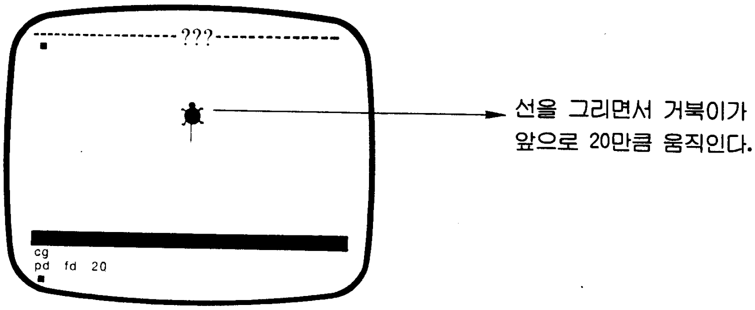
⑥ 선의 유무: 선을 그리지 않을 경우 pu [Enter↵], 선을 그리려면 pd [Enter↵] 를 이용한다.

㉠ pu fd20 [Enter↵]



ⓛ cg [Enter↵]

pd fd20 [Enter↵]



(3) 기본 도형 그리기 응용

① 정사각형 그리기

(1) fd 50 [Enter↵]

(2) rt 90 [Enter↵]

(3) fd 50 [Enter↵]

(4) rt 90 [Enter↵]

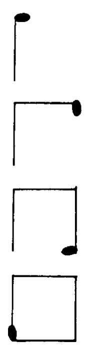
(5) fd 50 [Enter↵]

(6) rt 90 [Enter↵]

(7) fd 50 [Enter↵]

(8) rt 90 [Enter↵]

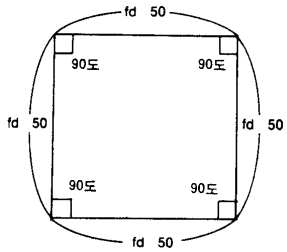
2.



⇒ 정사각형은 네 변의 길이가 모두 같고 네 각이 각각 90도이다. 따라서 '한 변의 길이

50, 한 각의 크기 90도'가 4번 반복된 것이다.

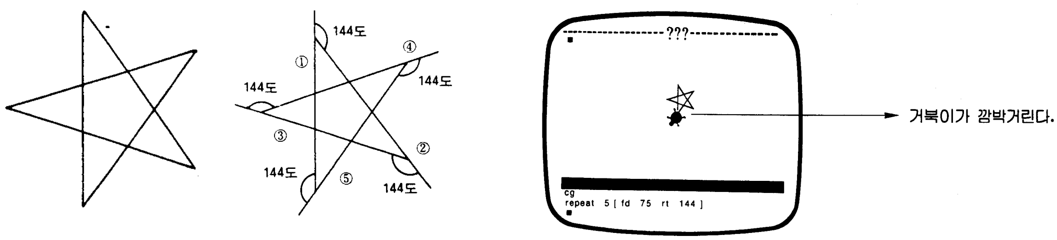
∴ repeat 4 [fd 50 rt 90] Enter↵



② 별 모양 그리기

㉠ cg Enter↵

repeat 5 [fd 75 rt 144] Enter↵



[확인]
ⓐ bk: 거북이를 입력된 숫자의 거리만큼 뒤에 가게 한다.
ⓑ cc: 명령부에 있는 모든 글을 지운다.
ⓒ cg: 화면의 그림을 지운다.
ⓓ fd: 거북이를 입력된 숫자의 거리만큼 앞으로 가게 한다.
ⓔ lt: 거북이를 입력된 각도만큼 왼쪽으로 돌린다.
ⓕ pd: 거북이의 펜을 내린다. 거북이가 이동할 때 선을 그린다.
ⓖ pu: 거북이의 펜을 들어 올린다. 거북이가 이동할 때 선을 그리지 않는다.
ⓗ repeat: 입력된 숫자만큼 [ ] 안의 내용을 반복해서 실행한다.
ⓘ rt: 거북이를 입력된 각도만큼 오른쪽으로 돌린다.

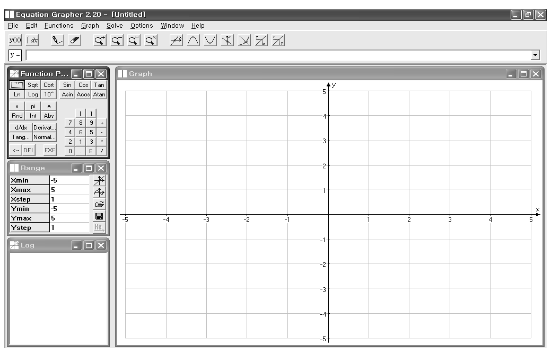
3.3. Equation Grapher와 활용

1) Equation Grapher의 특징

Equation Grapher는 함수를 그리고 해석하는 프로그램으로 $y=2x$ 등의 그래프를 최대 12개까지 한 화면에 그릴 수 있다. 일단 함수를 그리면 Equation Grapher는 근 구하기, 최댓값/최솟값 구하기, 교점 찾기 등의 기능이 있으며, 계산과 적분영역을 볼 수 있다. 또한Zoom Factor를 이용하거나 값의 범위를 대입해서 그래프의 범위를 지정할 수 있고, 윈도우에서 그래프를 복사해서 다른 워드 프로세서에 붙일 수 있는 기능도 가지고 있으며 저장과 불러오기가 모두 가능하다.

2) 학교수학에서의 Equation Grapher 활용

(1) 초기 화면



함수를 그리기 위해 학생은 한글에서의 수식편집기를 이용할 줄 알면 쉽게 함수를 그릴 수 있다. 워드작업 때 우리가 사용했던 수식편집기 형식과 Equation Grapher의 형식이 거의 같기 때문이다. 단, 한글에서의 {}를 Equation Grapher는 ()로 사용한다.

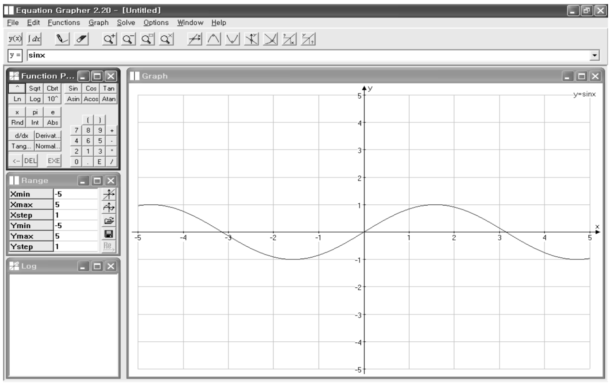
(2) 함수 그리기

① 함수를 그리기 위해서는 먼저

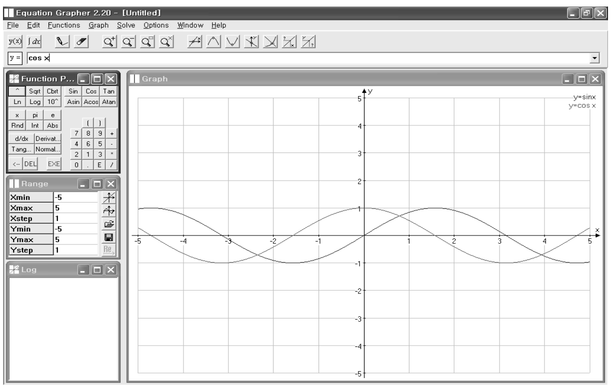


칸에 원하는 함수를 적으면 된다. 예를 들어 $y=\sin x$를 입력하고 를 사용하거나

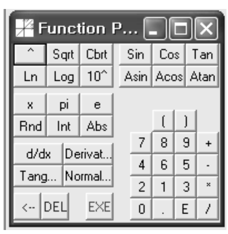
Enter를 누르면 아래와 같이 사인함수가 그려진다.



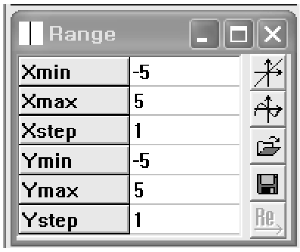
② 만약 같은 $y = \sin x$를 지우고 $y = \cos x$를 넣으면 다른 색으로 $y = \sin x$ 위에 그려진다.

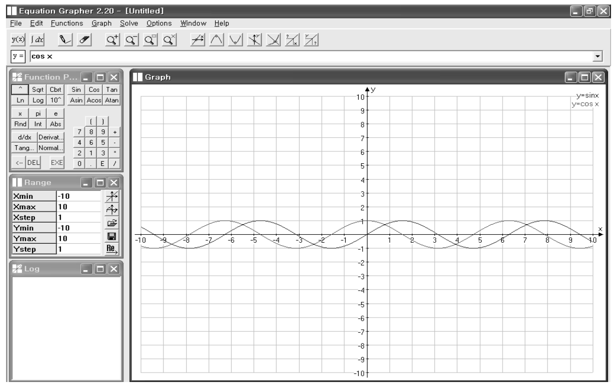


③입력할 함수를 잘 모르는 경우 아래의 창을 이용하면 쉽게 함수를 그릴 수 있다.



④ 또 아래의 창을 이용하여 x축의 범위와 y축의 범위를 자유롭게 변경할 수 있다.





: 표준 좌표값 지정하기

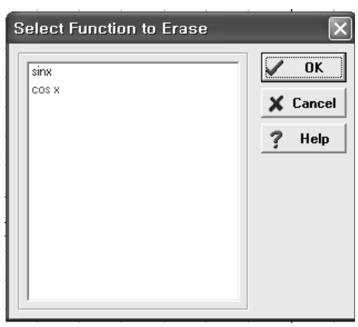
: 파이 눈금 지정하기

: 작업된 좌표 풀러오기

: 작업한 좌표 저장하기

: 새로운 좌표값을 지정했을 때 그 좌표값을 불러오기

⑤ 함수 그리기에서 2개 이상을 그렸을 경우 잘못된 그림이나 필요 없는 그림을 지울 수 있다. 다음 을 클릭하면 아래와 같은 화면이 뜬다.



그러면 지우려는 함수를 클릭하고 OK버튼을 누르면 함수를 지울 수 있다.

⑥ 마지막으로 화면의 크기를 조절할 때에는 를 이용한다.

 Zoom In: 확대

 Zoom Out: 축소

 Zoom Box: 부분 확대

 Undo Zoom: 확대 취소

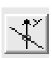
(3) 함숫값의 계산

함수의 특정값을 계산할 때에는 를 이용한다.

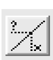
 root: 축 근을 구할 때

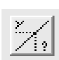
 max: 최댓값을 구할 때

 min: 최솟값을 구할 때

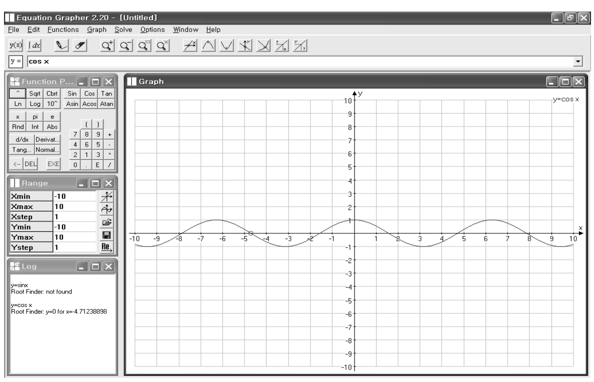
 y-intersection: y축 근을 구할 때

 intersection: 교점을 구할 때

 x-calc: x의 값을 결정하여 y의 값을 구할 때

 y-calc: y의 값을 결정하여 x의 값을 구할 때

(예) $y=\cos x$에서 한 근을 구한 경우



3.4. GeoGebra와 활용[18)]

1) GeoGebra의 개발

① 오스트리아의 마르쿠스 호헨바터(Markus Hohenwarter)외 50명의 개발팀은 역동적 기하 소프트웨어(DGS; Dynamic Geometry Software)와 컴퓨터 대수 시스템(CAS; Computer Algebra System)이 결합된 소프트웨어인 GeoGebra를 개발하여 2002년 인터넷을 통해 공개하였다.

② 우리나라에는 2009년 최경식에 의해 GeoGebra 3.2의 사용자 인터페이스와 공식 매뉴얼이 한국어로 번역되어 소개되었다.

③ 2013년부터 아이패드, 안드로이드, 윈도우 버전의 앱을 무료 공개하였으며, 태블릿 PC에서도 GeoGebra를 사용할 수 있다.

2) GeoGebra의 특징

① 사용법이 간단하다. GSP, Cabri, Graph, Graphmatica, Mathematica, JavaMAL 등 다양한 수학소프트웨어보다 GeoGebra는 명령어를 몰라도 마우스 클릭만으로 간단한 도형부터 복잡한 도형을 나타낼 수 있다. 또한 나타낸 도형이 고정되어 있지 않고 필요에 따라 도형을 쉽게 이동하거나 변화시킬 수 있다.

② 대수적 표현과 기하적 표현이 결합되어 있다. GeoGebra는 기하 요소들에 대한 대수적 정보를 한 번에 나타냄으로써 기하와 대수의 관계를 쉽게 알 수 있다.

(예) 직선을 그렸을 경우 직선의 방정식이 대수창에 나타난다. 반대로 대수창에 변수 값을 변화시키면 기하창에서 변화된 도형을 바로 확인할 수 있다.

③ 무상으로 제공되는 프로그램이다. 인터넷 접속이 가능한 환경이라면 누구나 다운로드 받아서 장소에 제한 없이 사용할 수 있어 학교뿐만 아니라 가정에서까지 확장될 수 있다.

④ 학습과정을 확인할 수 있다. GeoGebra는 슬라이더 기능이 있어서 변수 값을 쉽게 변화시킬 수 있고 애니메이션 기능으로 변수 값에 따른 도형의 변화를 생동감 있게 확인할 수 있다. 뿐만 아니라 구성네비게이션 기능이 있어서 도형을 나타내기까지 어떤 과

---

18) 오솔 (2015),『GoeGebra를 활용한 공간벡터 교수학습 자료 개발에 관한 연구』경기대학교 교육대학원.

정을 거쳤는지 확인할 수 있다.

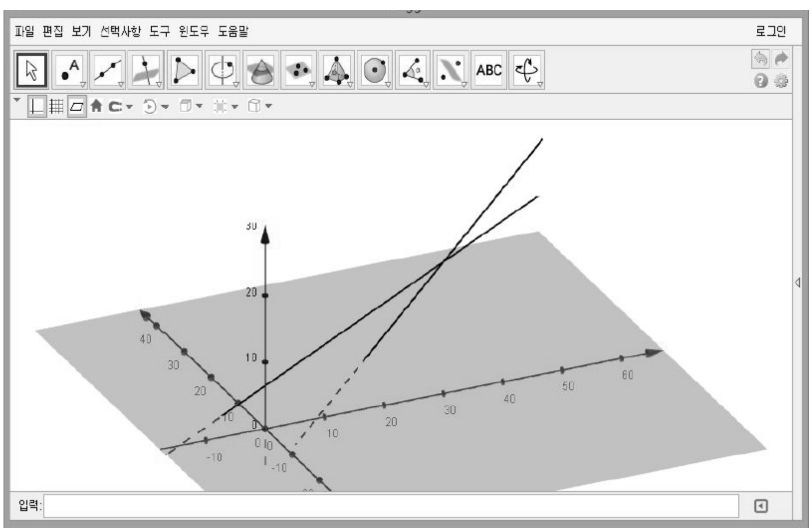
⑤ 세계적인 커뮤니티를 통해 소통이 가능하다. GeoGebra 포럼, GeoGebra tube, GeoGebra wiki는 전 세계적인 커뮤니티이며 이곳을 통해 자료를 업로드 할 수 있고 업로드 된 자료를 찾아 공유할 수 있다.

3) 학교에서의 GeoGebra 활용

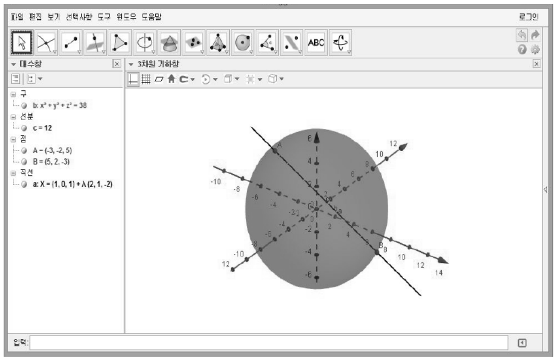
*인터넷 사이트 http://www.geogebra.org에 접속하여 GeoGebra를 다운 받는다.

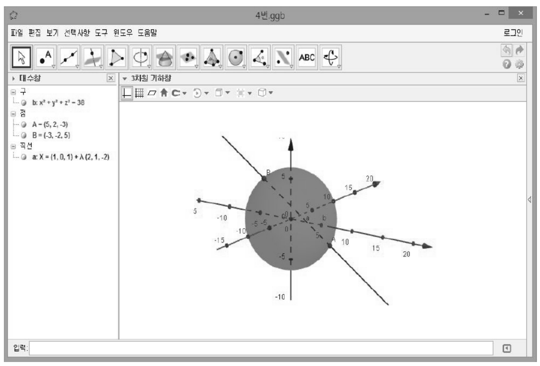


1) 두 직선 $\frac{x-2}{3}=5-y=\frac{z-4}{2}$ 와 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=z+9$ 이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



2) 직선 $\frac{x-1}{2}=y=\frac{1-z}{2}$ 와 그 $x^2+y^2+z^2=38$ 의 교점을 각각 A, B라고 할 때, 선분 AB 의 길이를 구하여라.





4. 학교 수학지도에서 활용되고 있는 공학 활용의 예시[19]

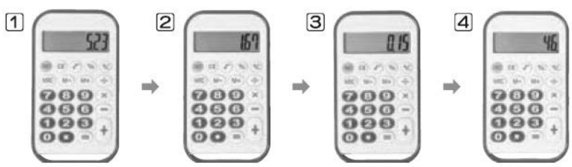
4.1. 중학교 1~3학년군

1) 중학교 1학년

(1) 계산기로 방정식의 해 구하기

계수에 분수나 소수 또는 큰 수가 있는 방정식은 계산기를 사용하여 해를 구하면 편리하다. 또, 구한 해가 맞는지 쉽게 확인할 수도 있다.

[예] 일차방정식 $0.15x-1.67=5.23$을 계산기를 사용하여 풀어보자. 계산기로 일차방정식의 해를 구할 때에는 '거꾸로 생각하기' 과정을 거쳐 결과로부터 x의 값을 구한다.

주어진 문제	거꾸로 생각하기
어떤 수 x ⇓ x에 0.15를 곱한다. ⇓ 결과에서 1.67을 뺀다. ⇓ 결과 5.23을 얻는다.	4 어떤 수 x를 얻는다. ⇑ 3 그 결과를 0.15로 나눈다. ⇑ 2 5.23에 1.67을 더한다. ⇑ 1 결과 5.23이 있다. 

(2) 계산기로 평균 구하기

실생활 자료에서 평균을 구할 때, 계산기를 이용하여 빠르고 간편하게 계산할 수 있다.

19) 두산동아, 우정호 외에서.

[문제] 다음은 어느 초등학교 앞 A문구점에 오후 3시부터 3시 20분 사이에 방문한 방문객의 연령별 분포를 조사하여 나타낸 도수분포표이다. A문구점에 방문한 방문객의 평균 연령을 구하여라.

〈출연 배우의 연령〉

연령(세)	배우 수(명)
0이상 ~ 10미만	30
10 ~ 20	12
20 ~ 30	7
30 ~ 40	0
40 ~ 50	1
합계	50

5 × 3 0 M+
1 5 × 1 2 M+
2 5 × 7 M+
3 5 × 0 M+
4 5 × 1 M+
MR → 550
÷ 5 0 = → 11



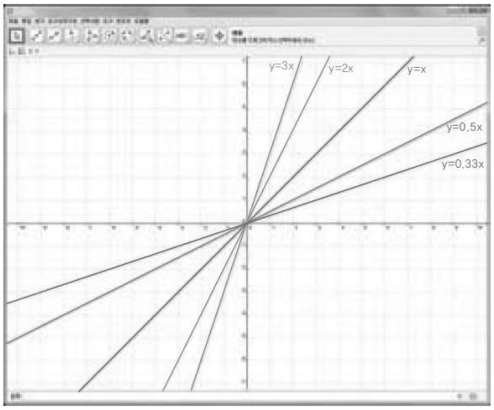
MC : 메모리 값을 지운다.
MR : 메모리 값을 읽는다.
M+ : 현재 나온 값을 메모리 값에 있는 값에 더한다.
AC : 계산 전체를 지우고 초기화 상태로 만든다.
CE : 바로 직전의 값을 지운다.

(3) GeoGebra 프로그램을 활용하여 ‘함수 그래프의 성질’ 지도하기

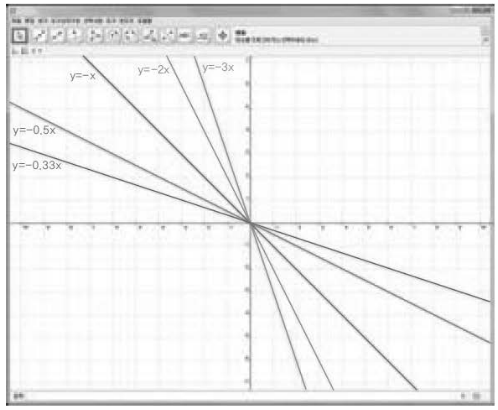
컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수의 그래프를 그리면
① 여러 가지 함수의 그래프를 빠르고 정확하게 그릴 수 있다.
② 큰 수나 복잡한 수가 있는 식으로 표현된 함수라도 그 함수의 그래프를 간편하게 그릴 수 있다.
③ 좌표평면 위에 여러 함수의 그래프를 함께 그리는 기능을 이용하면 함수의 그래프가 갖는 특징을 쉽게 파악할 수 있다.

중학교 1학년 함수 $y = ax\ (a \neq 0)$의 그래프와 함수 $y = \frac{a}{x}\ (a \neq 0)$의 그래프의 성질을 직관적으로 파악할 수 있도록 지도한다.

1) 함수 $y = ax\ (a \neq 0)$에서 a의 절댓값이 커질수록 이 함수의 그래프가 어떻게 변하는지 살펴보자.



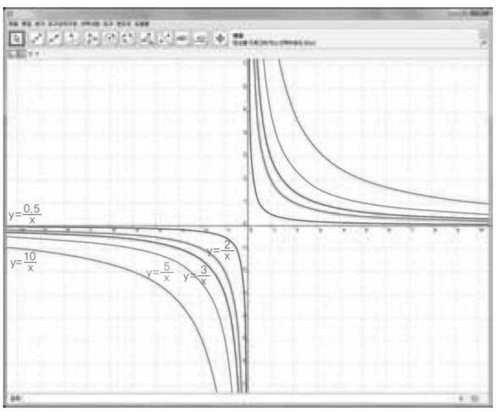
$a>0$일 때 $y=ax$의 그래프



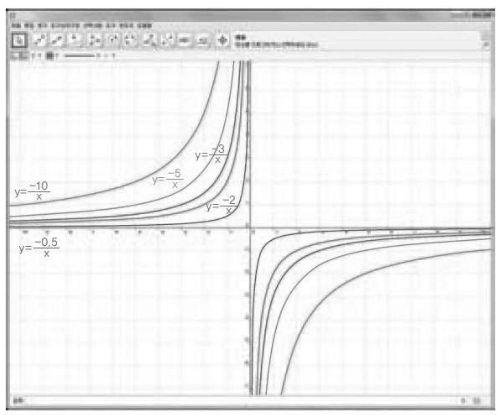
$a<0$일 때 $y=ax$의 그래프

그 결과 함수 $y=ax\,(a\neq 0)$의 그래프는 a의 절댓값이 커질수록 그래프가 점점 y축에 가까워진다. 한편, 함수 $y=ax\,(a\neq 0)$의 그래프는 원점을 지나는 직선이고, $a>0$일 때 제1사분면과 제3사분면을, $a<0$일 때 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

2) 함수 $y=\dfrac{a}{x}\,(a\neq 0)$에서 a의 절댓값이 커질수록 이 함수의 그래프가 어떻게 변하는지 살펴보자.



$a>0$일 때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프



$a<0$일 때 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프

그 결과 함수 $y=\dfrac{a}{x}\,(a\neq 0)$의 그래프는 a의 절댓값이 커질수록 그래프가 점점 원점에서 멀어지며 좌표축에 접근하면서 한없이 뻗어나가는 한 쌍의 매끄러운 곡선이다. $a>0$일 때 제1사분면과 제3사분면을, $a<0$일 때 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

[수학교육적 의의]

컴퓨터 프로그램을 활용하여 변수 a의 변화에 따른 함수의 그래프의 모양을 관찰하게 한다. 변수 a의 값이 변함에 따라 컴퓨터 화면상에서 함수의 그래프가 어떻게 변화하는지를 역동적으로 관찰할 수 있다. 지필환경에서는 그래프를 일일이 손으로 그리면서 다양한 그래프를 동시에 비교하기에는 시간적으로 어려움이 있다. 따라서 함수 $y=ax\,(a\neq 0)$의 그래프와 함수 $y=\dfrac{a}{x}\,(a\neq 0)$의 그래프의 성질을 컴퓨터 프로그램을 이용하여 탐구하도록 한다. 이러한 활동은 미국수학교사협의회(NCTM)에서 제시한 학교수학의 원리 중 하나인 '공학적 도구의 원리' 구현 측면에서도 큰 의의가 있다.

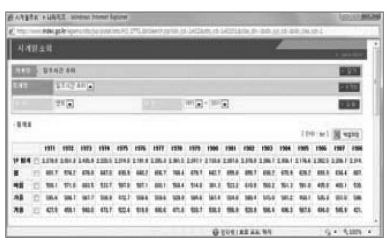
[수학교육적 해석]

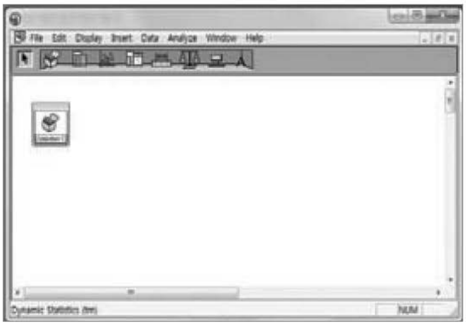
위와 같은 수업은 수학교육학자 딘즈(Z. P. Dienes; 1916~)가 제시한 수학 학습원리 중의 하나인 '수학적 다양성의 원리' 활용과 관련이 있다. 즉, '수학적 다양성의 원리'는 수학적 개념의 충실한 일반화를 위한 전략으로, 일반적인 수학적 개념을 이루는 불변의 특성이 드러나게 하기 위해서는 비본질적인 모든 특성을 변화시켜야 한다는 것이다. '수학적 다양성의 원리'에 의하면, 변수를 포함하는 개념은 가능한 한 많은 경우를 다루는 경험에 의하여 학습되어야 한다. 예를 들어 함수의 성질을 이해할 때 컴퓨터 프로그램을 활용하면, 변수의 변화가 그래프의 모양에 가져오는 변화를 쉽게 볼 수 있기 때문에 함수 개념의 일반화가 용이해진다.

(4) Fathom 프로그램을 활용하여 '히스토그램' 지도하기

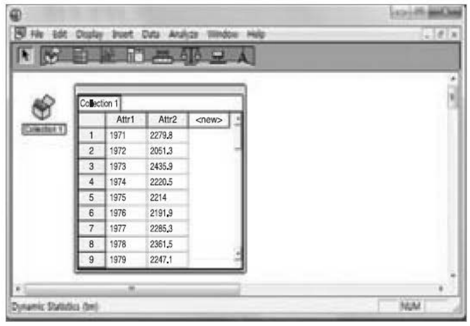
① 히스토그램 그리기

오른쪽은 1971년부터 2011년까지 우리나라의 일조 시간을 조사한 자료이다. 통계 프로그램을 이용하여 이 자료를 히스토그램으로 나타내어 보자.

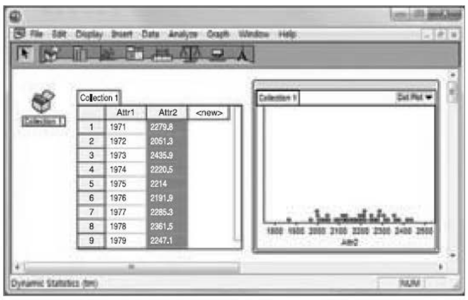




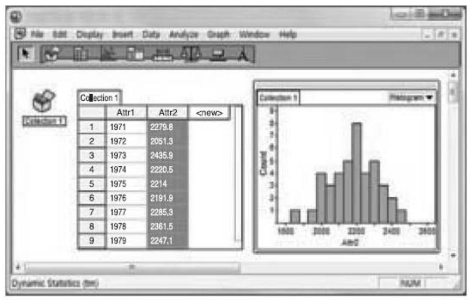
❶ 통계 프로그램을 실행하고, 을 선택하여 놓고, 스프레드시트로 정리한 자료를 복사하여 넣는다.



❷ 을 선택하여 놓으면 자료가 표로 변환된다.



❸ 을 선택한 후, ❷의 표에서 일조 시간 자료(Attr2)를 선택하여 그래프의 가로축으로 드래그(끌기)하면 그래프가 그려진다.



❹ 그래프 모양을 Dot Plot 에서 Histogram(히스토그램)으로 변환한다.

[수학교육적 의의]

통계 단원에서는 자료를 그래프로 나타내고, 때로는 복잡한 자료를 계산해야 하는 과정이 필요한 경우가 대부분이다. 이때 통계 관련 컴퓨터 프로그램을 활용하면

① 방대한 양의 자료를 정리하고 일일이 손으로 그래프를 그리는 시간을 줄일 수 있다.

② 완성된 그래프를 보고 자료의 분포 상태를 해석하는데 집중할 수 있다.

③ 시간과 노력을 절약하면서 짧은 시간에 정확한 결과를 얻을 수 있다.

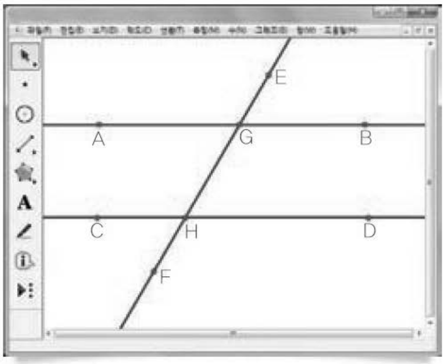
④ 대용량의 자료를 처리할 수 있어서 방대한 양의 자료를 쉽게 다룰 수 있다.

⑤ 교과서의 제한된 자료의 범위를 넘어서 실생활의 자료(예를 들어 통계청 자료)를 다루게 되므로, 수학의 유용성을 증대시키고 학습자의 흥미를 유발할 수 있다.

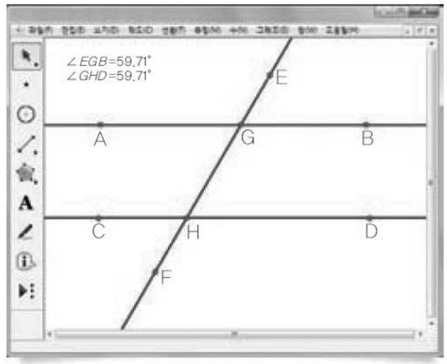
(5) 수학교육용 탐구형 소프트웨어인 GSP(Geometer's Sketch Pad)를 활용하여 '동위각과 엇각의 성질' 지도하기

[탐구1] ❸의 과정에서 추측할 수 있는 것을 이야기해 보자.

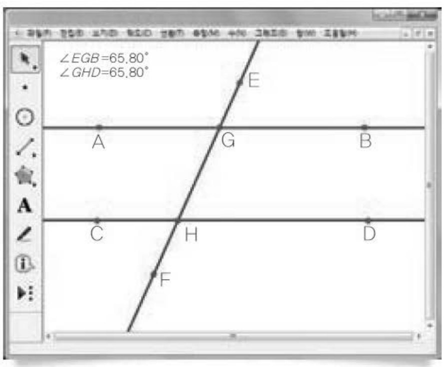
[탐구2] ❹의 과정에서 추측할 수 있는 것을 이야기해 보자.



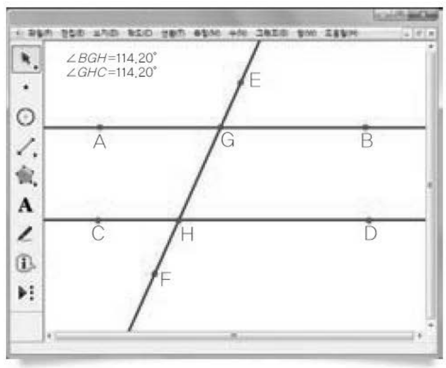
❶ 컴퓨터 프로그램을 실행하여 직선 AB에 평행한 직선 CD를 만들고 직선 EF가 두 직선과 만나는 점을 각각 G, H라고 하자.



❷ [측정]－[각의 크기]를 이용하여 ∠EGB, ∠GHD의 크기를 구하고 그 결과를 비교한다.



❸ 점 E를 움직여 직선 EF의 위치를 변화시키면서 ∠EGB, ∠GHD의 크기를 관찰한다.



❹ ❷~❸의 방법으로 직선 EF의 위치를 변화시키면서 ∠BGH, ∠GHC의 크기를 관찰한다.

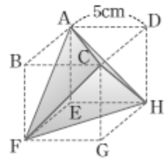
[수학교육적 의의]

컴퓨터 프로그램을 사용하여 이미 학습한 내용에 대한 직관적 확신을 제공할 수 있다. 컴퓨터의 시각적 기능과 조작적 기능은 학생들로 하여금 형식적인 수학내용에 보다 쉽게 접근할 수 있도록 도와준다. 그러나 자칫 시각화나 구체적 조작에만 머무른다면 더 상위 수준의 학습을 기대하기 어려워진다. 시각화나 구체적 조작 활동을 행한 후에는 반드시 되돌아보

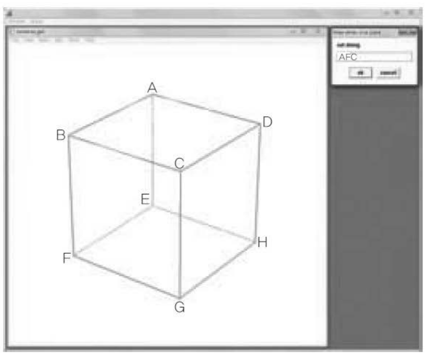
고 검토하는 반성의 과정을 가져야 한다. 따라서 실행하기 이후에 탐구하기의 과정을 의미 있게 다룰 필요가 있다.

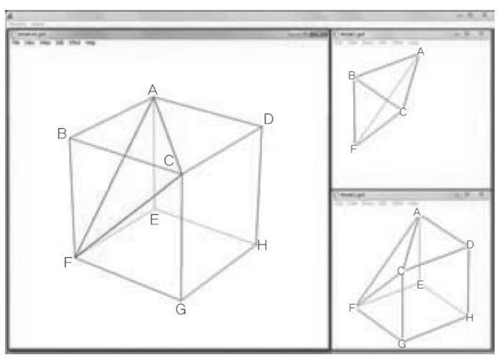
(6) 입체도형을 탐구할 수 있는 WinGeom 프로그램을 활용하여 '다면체의 부피 구하기' 지도하기

[문제] 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 5cm인 정육면체가 있다. 이 정육면체의 네 꼭짓점 A, C, F, H를 꼭짓점으로 하는 사면체의 부피를 구하여라.



컴퓨터 프로그램을 이용하여 정육면체를 절단하면 그림과 같이 두 개의 입체도형으로 나누어진다.

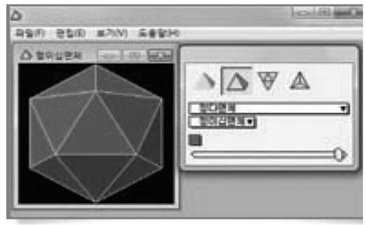




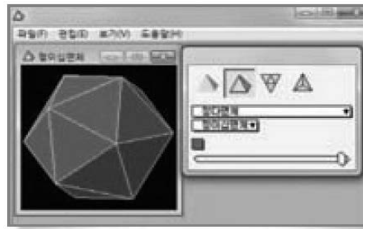
• 정육면체를 절단하여 위의 사면체를 만드는 과정을 설명하시오.
• 이 과정을 이용하여 위의 사면체의 부피를 구하는 방법을 설명하시오.

(7) Poly 프로그램을 활용하여 '여러 가지 입체도형의 관찰' 지도하기

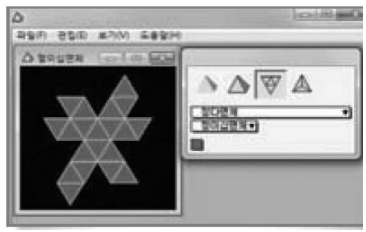
① 관찰하고자 하는 다면체의 종류를 선택한다. 여기서는 정이십면체를 관찰해 보자.



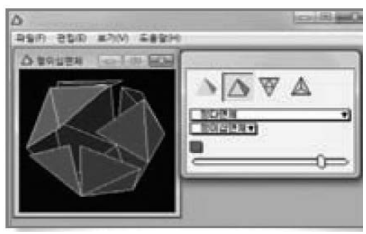
② 정이십면체를 마우스로 선택하여, 도형을 회전시키면서 면의 모양, 한 꼭짓점에서 만나는 면의 개수 등을 관찰한다.



③ 아이콘 을 눌러 정이십면체의 전개도를 살펴본다.



④ 오른쪽 화면의 스크롤바를 사용하여 정이십면체를 서서히 펼치면서 전개도를 만들어 본다. 반대로 하면, 전개도에서 서서히 입체도형이 만들어지는 과정을 확인해 볼 수도 있다.



[탐구①] 정다면체 다섯 개를 모두 관찰하여 면의 개수, 모서리의 개수, 꼭짓점의 개수, 면의 모양, 한 꼭짓점에서 만나는 면의 개수를 구하여라.

⇒ 다음과 같이 표를 완성해 본다.

정다면체	정사면체	정육면체	정팔면체	정십이면체	정이십면체
면의 개수	4	6	8	12	20
모서리의 개수	6	12	12	30	30
꼭짓점의 개수	4	8	6	20	12
면의 모양	정삼각형	정사각형	정삼각형	정오각형	정삼각형
한 꼭짓점에서 만나는 면의 개수	3	3	4	3	5

[탐구②] 컴퓨터 프로그램으로 정다면체가 아닌 입체도형도 관찰하여라.

⇒ 축구공 모양의 입체도형을 관찰해 보자. 정이십면체의 각 꼭짓점을 절단하여 생긴 깎은 정이십면체가 축구공의 모양에 가깝다. Poly에서 준정다면체인 깎은 정이십면체를 선택하고 〈보기〉 메뉴의 〈데모시작〉을 누르면 입체에서 전개도로의 점진적인 변화를 애니메이션으로 볼 수 있다. 또, 깎은 정이십면체 위에 커서를 놓고 마우스를 누르면서 끌면 입체를 회전시키면서 여러 방향으로 관찰해 볼 수도 있다. 깎은 정이십면체의 면의 모양을 관찰해 보면 정오각형과 정육각형으로 이루어져 있음을 알 수 있다.

[수학교육적 의의]

지필환경에서는 입체도형의 모양을 직접 만들기가 쉽지 않다. 전개도를 그리게 하고 전개도를 가지고 입체도형을 만들어 보는 활동을 과제로 내 줄 수도 있지만 짧은 시간에 입체도형의 시각적 관찰이 필요할 때는 도형을 관찰하는 컴퓨터 프로그램을 사용하는 것이 효율적일 수 있다. 특히, 도형을 관찰할 수 있는 컴퓨터 프로그램으로 정다면체 이외의 다양한 다면체를 관찰할 수 있어서 학생들의 흥미를 유도하고 공간 감각을 활성화시키는데 도움이 된다.

[이론적 배경]

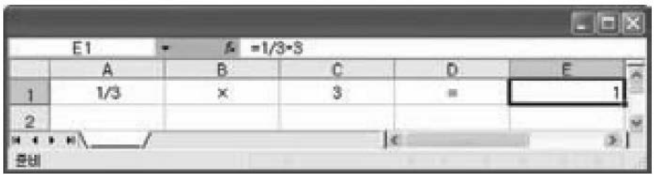
수학교육학자 딘즈(Z. P. Dienes, 1916~)는 수학 학습의 4가지 원리를 제시하고 있는데 이 중 하나가 '구성의 원리'이다. 구성의 원리란 아동은 분석적 사고를 하기 이전에 구성적 사고를 발달시키므로 아동에게 제시하는 수학적 상황은 분석보다는 구성을 요구하는 것이 우선되어야 한다는 것이다. 구성의 원리에 따라 입체도형을 지도한다면, 입체도형을 주고

도형의 성질을 분석하게 하는 활동보다는 입체도형을 만들어 보는 구성의 경험을 먼저 제공할 필요가 있다.

2) 중학교 2학년

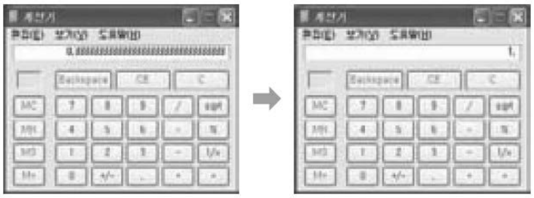
(1) 엑셀을 활용하여 '$\frac{1}{3}\times 3$을 계산' 지도하기

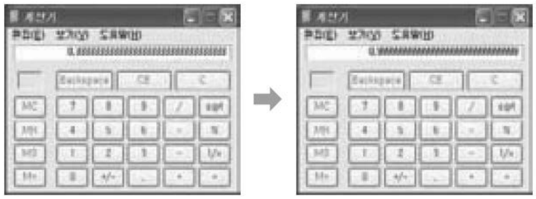
컴퓨터에서는 순환소수를 표현할 수 있는 별도의 방법이 없다. 그러나 $\frac{1}{3}$과 같이 유한소수로 나타낼 수 없는 수의 계산을 컴퓨터에서 할 수 있는 방법이 있다. 컴퓨터에서 표 계산 프로그램을 사용하면 $\frac{1}{3}\times 3$의 계산을 할 수 있다. 표 계산 프로그램에서 [=] → [1] → [/] → [3]의 순서로 유리수 $\frac{1}{3}$을 입력하고, [*] → [3]을 차례로 입력하면 그 계산 결과를 1로 보여준다.



컴퓨터에 있는 계산기에서도 $\frac{1}{3}\times 3$을 계산할 수 있다. 계산기의 숫자 [3]을 누른 후 [1/x] 을 누르면 0.33333333333333333333333333333333이라는 소수가 표시된다. 이 소수는 사실상 순환소수 $0.\dot{3}$을 유한소수처럼 표시한 것이다. 따라서 이 수와 3을 곱하면 그 결과는 1이 된다.

이와는 달리 0.33333333333333333333333333333333을 직접 입력하면 유한소수이다. 따라서 이 유한소수에 3을 곱하면 그 결과는 0.99999999999999999999999999999999인 유한소수로 표시된다. 계산기 화면에서는 두 경우가 똑같이 유한소수에 3을 곱하는 것처럼 보이지만 계산기는 입력된 소수가 순환소수인지, 유한소수인지를 잘 파악하여 계산한다.





$\frac{1}{3}\times 3$을 계산한 결과 $0.333333333333333333333333\times 3$을 계산한 결과

[단] 컴퓨터에 있는 계산기는 표현할 수 있는 숫자의 수가 제한되어 있기 때문에 무한소수의 경우 소수 마지막 자리는 반올림하여 나타난다. 학생들에게 이런 점을 이해하도록 지도한다.

[수학교육적 의의]

수학교육에서 스프레드시트를 활용함으로써 얻게 되는 장점은

① 복잡한 수식을 자동으로 계산하여 학생들이 수를 다루는 번거로움에서 벗어나 보다 개념적이고 본질적인 수학적 내용과 실제적인 문제들을 탐구할 수 있도록 해 준다.

② 반복적인 많은 계산을 수행하여 쉽게 볼 수 있는 표로 나타내어 변수들 사이의 전체적인 패턴을 파악할 수 있도록 해 준다.

③ 수식과 표, 그리고 그래프 사이의 관계를 화면상에서 역동적으로 고찰할 수 있게 해 준다.

④ 문제해결과정에서 "What if" 유형의 질문을 탐구할 수 있도록 해 준다.

⑤ 스프레드시트에 사용하는 식은 여러 가지 아이콘과 함께 수식을 지원하므로 프로그래밍 언어보다 더 시각적이고 더 쉽게 사용할 수 있다.

⑥ 스프레드시트를 사용하는 동안 학생 상호간, 교사와 학생, 컴퓨터와 학생의 상호작용을 활발히 만들어 준다.

⑦ 문제해결 도구로서 학생에게 산술이나 초기 대수의 영역에서 강력한 사고와 전략을 제시한다.

(2) 웹사이트 http://www.wolframalpha.com에 접속하여 '식의 값 구하기'를 지도하기

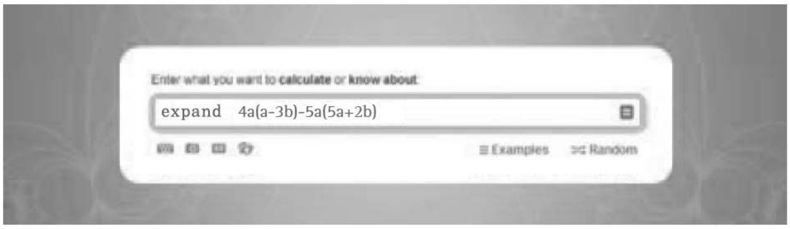
$4a(a-3b)-5a(5a+2b)$를 계산하여 보자.

① 식을 계산하여 주는 인터넷 사이트에 접속하여 입력창에 식을 전개하는 명령어

expand를 입력한다.

② 한 칸을 띄우고, 식 $4a(a-3b)-5a(5a+2b)$를 입력한다.

③ 입력한 수식을 확인하고 [=]를 누른다.



그러면 컴퓨터는 다음과 같이 $4a(a-3b)-5a(5a+2b)$를 계산한 결과가 $-21a^2-22ab$라는 것을 보여준다.

Result: Show steps

$-21a^2-22ab$

또한 Show steps 를 클릭하면 다음과 같이 그 계산 과정을 자세히 살펴볼 수 있다. 이 과정을 보면 컴퓨터가 식을 계산할 때 지수법칙을 포함한 다양한 법칙을 이용한다는 것을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&4a(a-3b)-5a(5a+2b)\\
&=4(aa+a(-1)3b)-5(a5a+a2b)\\
&=4(aa-3ab)-5(5aa+2ab)\\
&=4aa+4(-1)3ab-5\times 5aa-5\times 2ab\\
&=4aa-3\times 4ab-5\times 5aa-2\times 5ab\\
&=4a^{1+1}-3\times 4ab-5^{1+1}a^{1+1}-2\times 5ab\\
&=4a^2-3\times 4ab-25a^2-2\times 5ab\\
&=4a^2-12ab-25a^2-10ab\\
&=-21a^2-22ab
\end{aligned}
$$

그 결과 자신의 문제해결 오류를 직접 확인할 수 있다.

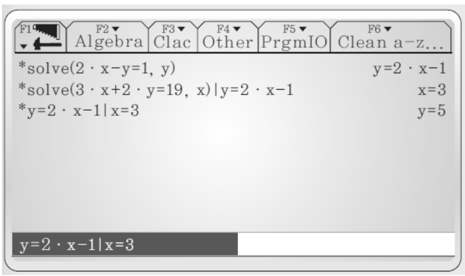
(3) 공학용 계산기를 사용하여 '연립방정식 풀이' 지도하기

① 미지수가 x, y의 2개인 연립방정식이 주어질 때, 등식의 성질을 이용하여 한 일차방정식을 x 또는 y에 관하여 푼 다음 그 식을 공학용 계산기에 기억시킨 후, 그것을 다른 한 일차방정식의 x 또는 y에 대입하면 원하는 값을 구할 수 있다.

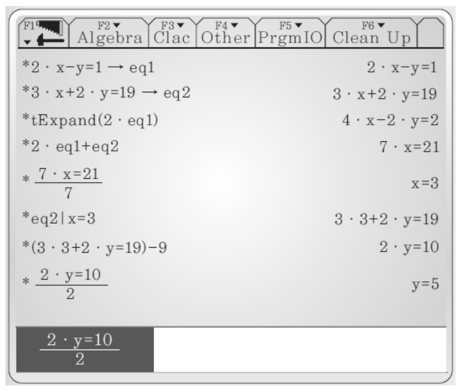


② 공학용 계산기에 기억시킨 두 일차방정식에 각각 적절한 수를 곱한 후 더하거나 빼어서 x 또는 y에 관한 방정식을 만다는 방법으로 연립방정식을 풀 수도 있다.

<대입을 이용한 연립방정식의 풀이>



<두 식의 덧셈을 이용한 연립방정식의 풀이>



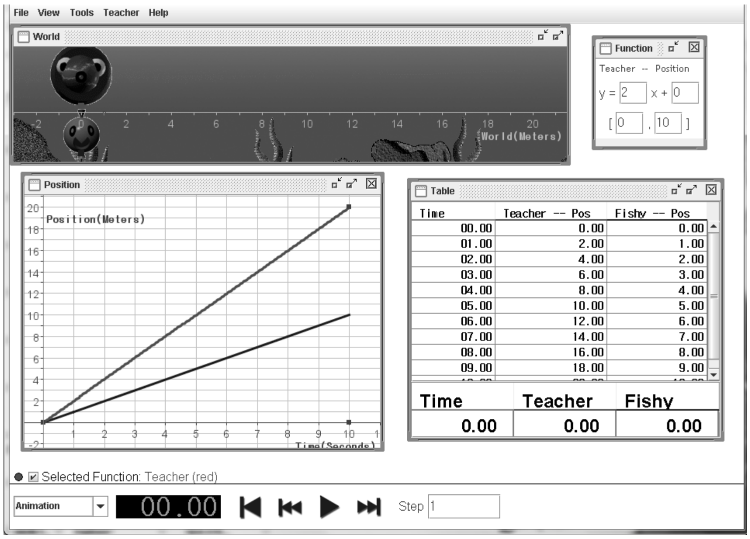
[수학교육적 의의]

연립방정식의 지도에서는 학생들에게 계산의 어려움을 가중시키지 않기 위해 주로 해결과정이 비교적 간단한 수치로 나오는 문제를 다루고 있다. 그러나 이는 적용 범위가 좁고 학생들이 실제로 접하는 다양한 현상과는 관련 없는 빈약하고 인위적인 문제만을 다루게 되는 결과를 초래할 수 있다. 따라서 계산기와 같은 공학적 도구를 이용하면 이를 어느 정도 극복할 수 있다.

연립방정식의 활용 단원에서 문제해결의 중요한 아이디어는 학생의 사고로 탐색하게 하되, 그 이외의 문제해결의 수단이 되는 복잡한 과정은 공학적 도구의 다양한 기능을 이용하게 한다면, 학생들이 생활에서 접하는 다양한 현상과 관련성이 깊은 풍부한 맥락의 문제들을 다룰 수 있을 것이다. 그러나 공학용 계산기를 사용할 때 그 사용 방식이 연립방정식을 학습하는데 방해가 되지 않도록 면밀히 검토하여 사용할 필요가 있다.

(4) 인터넷에 접속하여 프로그램을 다운받아 설치한 후 ‘일차함수의 그래프’ 지도하기

인터넷 http://www.kaputcenter.umassd.edu/products/software/smwcomp/download/에 접속하여 프로그램을 다운받아 설치한 후, 실행하면 다음과 같은 첫 화면이 나온다.



위의 그림에서 화면에 보이는 파란 그래프는 Fish Position이고, 빨간 그래프는 Teacher Position이다. Fish Position에 해당하는 그래프를 클릭하면 오른쪽 윗부분에 그래프 입력창이 나타난다. 여기에 $y=3x$를 입력하면 $y=3x$의 그래프와 표를 즉시 보여준다.

$$y=\boxed{3}(x-0)+0$$

Domain: $[\boxed{0},\ \boxed{10}]$

이때 Domain은 0에서 10까지의 범위를 의미한다.

같은 방법으로 Teacher Position에 해당하는 그래프를 클릭하면 오른쪽 윗부분에 그래프 입력창이 나타난다. 여기에 $y=3x+2$를 입력하면 $y=3x+2$의 그래프와 표를 즉시 보여준다.

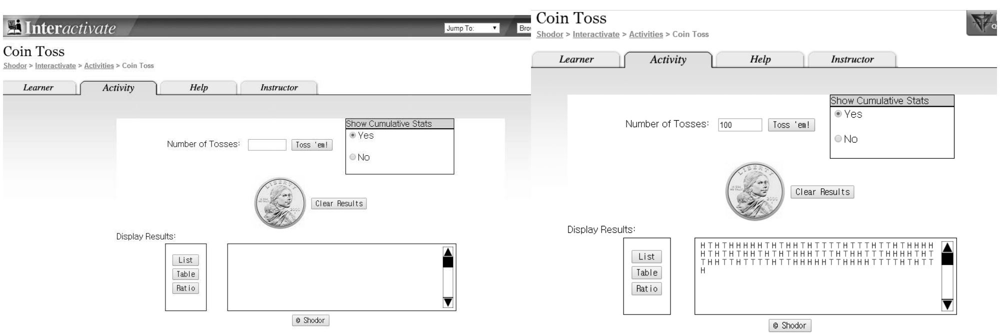
한편, 화면의 아랫부분에 있는 애니메이션 메뉴에서 ▶를 클릭하면 Fish와 Teahcer가 일정한 간격을 유지하면서 같은 속력으로 이동하는 것을 확인할 수 있다.

[수학교육적 의의]

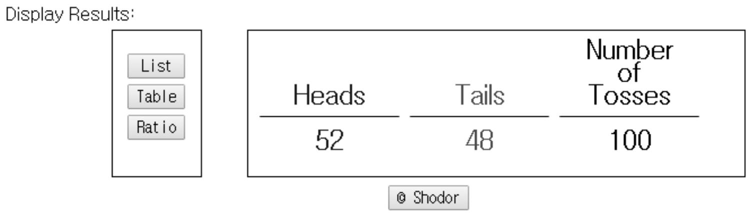
함수 개념을 이해하기 위해서는 함수를 나타내는 표현들 사이를 유연하게 이동할 수 있어야 한다. 함수 개념 지도에서 테크놀로지는, 필요에 따라 하나의 함수를 대수적인 식의 형태, 표의 형태, 그래프의 형태로 적절하게 표현하도록 도와준다는 점에서 중요한 역할을 할 수 있다. 특히, 표현과 표현 사이의 전환이 간편하다는 점, 동적인 형태로 함수의 그래프의 생성 과정을 살펴볼 수 있다는 점은 기존의 지필 도구가 가지지 못한 테크놀로지의 장점이다. 함수학습과정에서는 가능한 한 처음부터 그리고 지속적으로, 서로 관련을 맺고 있는 것들이 전체적으로 조직되어야 한다. 이를 위해서는 표, 그래프, 식이 하나의 전체로 제공될 수 있는 독특한 환경이 필요하다. 여기에서 소개하고 있는 프로그램은 하나의 함수를 다양한 측면에서 표현한 여러 가지 것들을 하나의 전체로 바라볼 수 있게 해준다는 점에서 의미가 있다. 테크놀로지는 표현과 표현 사이를 연결하는 가교가 되어 어떤 상황과 수학적 표현을 연결하는 것, 궁극적으로 함수 개념의 이해를 도와준다.

(5) 인터넷에 접속하여 시뮬레이션 프로그램을 설치한 후 ‘동전 던지기 실험’ 지도하기

① 인터넷 사이트 http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/에 접속한다.



② 시뮬레이션 프로그램에 던지는 횟수를 입력하고 Toss 'em! 버튼을 누른다. 이후 List, Table, Ratio 결과들을 확인할 수 있다.





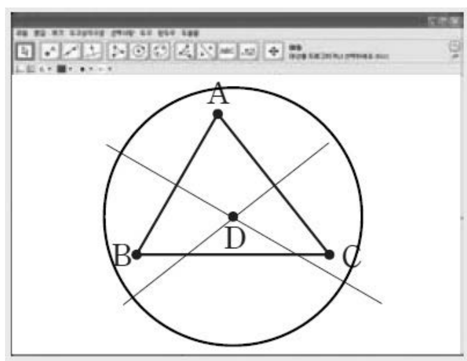
(6) GeoGebra를 사용하여 '외접원/내접원 성질' 지도하기

*http://www.geogebra.org 에 접속하여 GeoGebra를 다운받아 실행한다.

가. 외접원 그리기

① [도구]-[다각형 도구]-[다각형]을 선택하여 삼각형 ABC를 그린다.

② [도구]-[기타 직선 도구]-[수직이등분선]을 선택한 후, $\overline{AB}$를 선택하여 $\overline{AB}$의 수직이등분석을 그린다. 같은 방법으로 $\overline{AC}$의 수직이등분선을 그린다.



③ ②에서 각각 그린 수직이등분선의 교점 D를 잡고, [도구]-[원과 호 도구]-[중심이 있고, 한 점을 지나는 원]을 선택하여 중심이 D이고 반지름의 길이를 자유자재로 바꿀 수 있는 원을 그려본다.

④ ③에서 그린 원이 꼭짓점 A를 지나도록 하면 나머지 꼭짓점 B, C도 지나게 됨을 확인할 수 있다. 따라서 이 원은 △ABC의 외접원이다.

나. 내접원 그리기

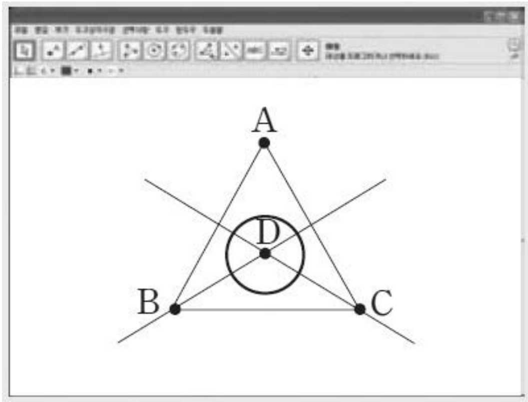
① [도구]-[다각형 도구]-[다각형]을 선택하여 삼각형 ABC를 그린다.

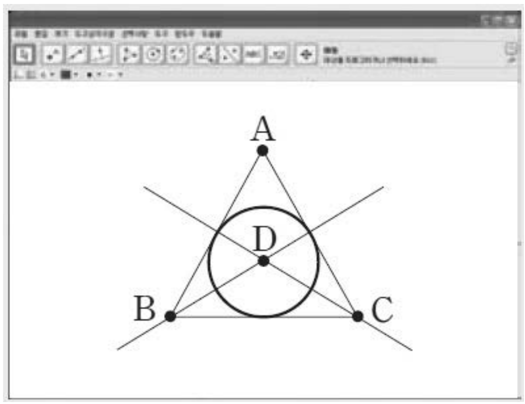
② [도구]-[기타 직선 도구]-[각의 이등분선]을 선택한 후, 꼭짓점 A, B, C를 순서대

로 선택하여 $\angle B$ 의 이등분선을 그린다. 같은 방법으로 $\angle C$ 의 이등분선을 그린다.

③ ②에서 각각 그린 각의 이등분선의 교점 D 를 잡고, [도구]-[원과 호 도구]-[중심이 있고, 한 점을 지나는 원]을 선택하여 중심이 D 이고 반지름의 길이를 자유자재로 바꿀 수 있는 원을 그려본다.

④ ③에서 그린 원이 $\overline{AB}$ 에 접하도록 하면 나머지 $\overline{BC}$ 와 $\overline{AC}$ 에 대해서도 각각 접하게 됨을 확인할 수 있다. 따라서 이 원은 $\triangle ABC$ 의 내접원이다.

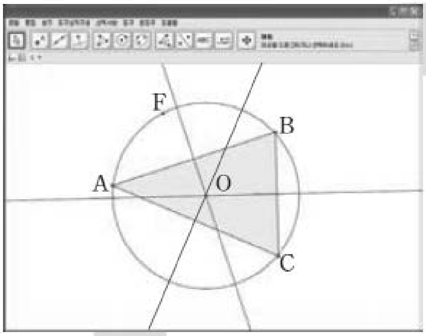




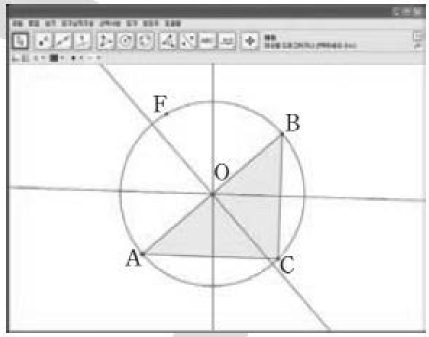
다. 삼각형의 외심/내심의 성질 탐구

① 컴퓨터 프로그램을 이용해 여러 경우를 관찰하고, 왜 항상 삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점인지를 직관적으로 파악할 수 있다.

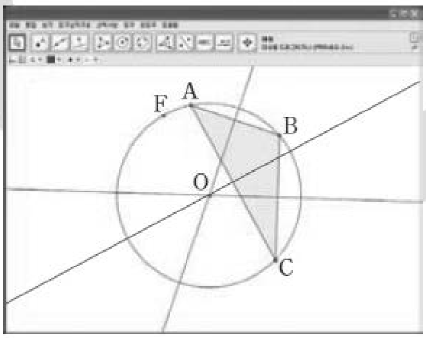
② 삼각형의 외심은 예각삼각형인지, 직각삼각형인지, 둔각삼각형인지에 따라 각각 삼각형의 내부, 삼각형의 빗변의 중점, 삼각형의 외부에 위치하는지를 관찰할 수 있다.



외심이 삼각형의 내부에 있는 경우



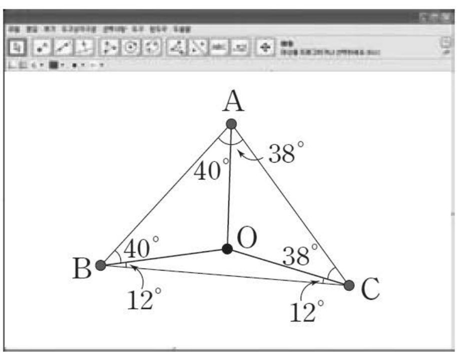
외심이 삼각형의 빗변의 중점에 있는 경우

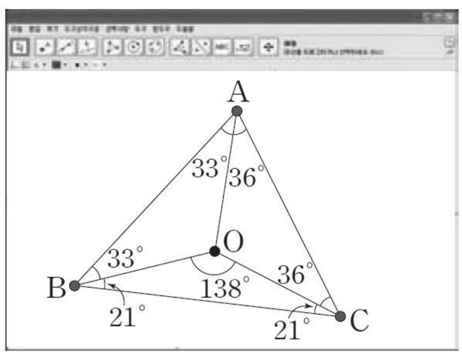


외심이 삼각형의 외부에 있는 경우

③ 변의 길이, 여러 가지 각의 크기 등 외심과 다른 요소 사이의 관계도 추측하고 확인할 수 있다.

④ 측정 도구를 이용하여 삼각형의 변화에 따른 측정값들을 관찰하고, 값들 사이의 관계와 성질들에 대하여 학생 스스로 추론할 수 있게 한다.





△OAB, △OBC, △OCA가 이등변삼각형임을 확인

∠BOC=2∠A임을 확인

(7) GeoGebra를 사용하여 '마름모의 성질' 지도하기

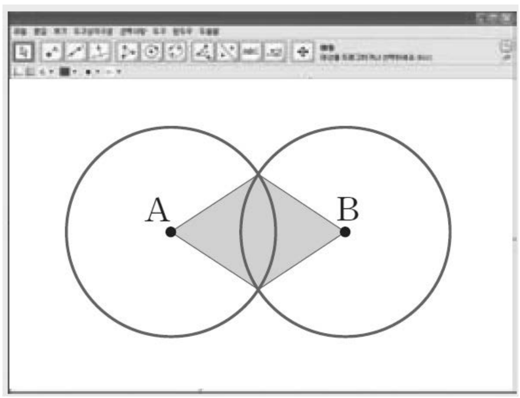
① [보기]–[격자]를 선택한 후, 두 점 A, B를 잡고, 반지름의 길이가 같은 원을 각각 그린다.

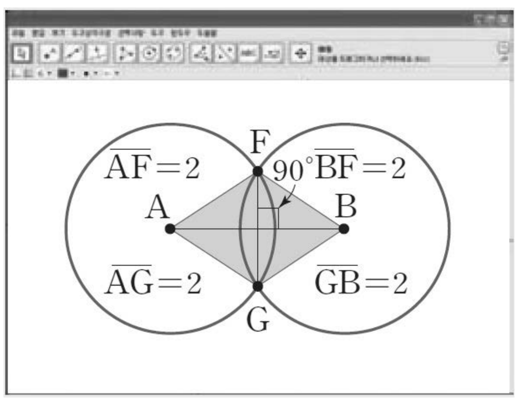
② 두 원의 중심과 두 원의 교점을 선분으로 연결하여 사각형을 그리면 이 사각형은 마름모이다.

③ [보기]–[격자]를 선택하여 격자를 없애고, 도형만 보이게 하여 관찰을 보다 쉽게 할 수 있게 한다.

④ [도구]–[측정 도구]–[거리 또는 길이]를 선택하여 각 변의 길이를 측정하고, [도구]–[측정 도구]–[각]을 선택하여 두 대각선이 이루는 각의 크기를 측정한다.

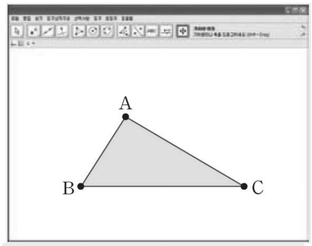
⑤ 를 선택한 후, 원 B를 이동시키면서 그려진 마름모의 두 대각선이 이루는 각을 관찰해 보면 항상 수직을 이루고 있음을 확인할 수 있다.





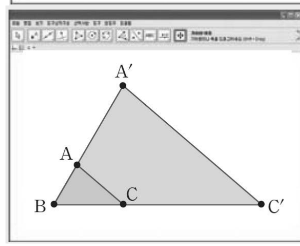
(8) GeoGebra를 사용하여 '닮음 도형의 성질' 지도하기

① Ctrl+Shift+1을 눌러 기하창이 실행되도록 한다. 이때  와 를 눌러 좌표축과 격자가 보이지 않도록 한다.



② 를 클릭하여 나타나는 메뉴에서 [다각형]을 선택하고, 마우스로 세 점을 골라 삼각형 ABC를 그린다.

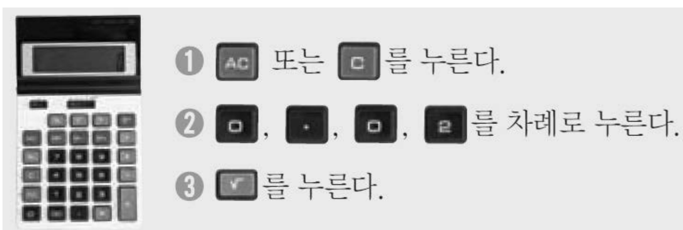
③ 를 클릭하여 나오는 메뉴에서 [비율에 의하여, 점으로부터 대상을 확대]를 누른다. 마우스를 사용하여 삼각형을 선택한 후, 삼각형의 꼭짓점 중 하나를 눌러 나오는 네모에 3을 입력하여 마무리한다.



3) 중학교 3학년

(1) 계산기를 사용하여 '제곱근을 소수로 나타내고 규칙성 찾기'를 지도하기

① 계산기를 사용하여 $\sqrt{0.02}$ 를 소수로 나타내는 과정을 다음과 같이 소개한다.



② 다음 표의 제곱근을 소수로 나타내고, 규칙을 찾아보게 한다.

$\sqrt{0.02}$	0.14142135623⋯
$\sqrt{0.2}$	
$\sqrt{2}$	
$\sqrt{20}$	
$\sqrt{200}$	
$\sqrt{2000}$	

③ 다음을 정리한다.

: 어떤 수의 100배의 제곱근은 처음 수의 제곱근의 10배이고 어떤 수의 1/100배의 제곱근은 처음 수의 제곱근의 1/10배이다. 따라서 근호 안에 있는 수의 소수점의 위치가 두 자리씩 옮겨질 때마다 그 제곱근의 소수점의 위치는 처음 수의 제곱근의 소수점의 위치에서 같은 방향으로 한 자리씩 옮겨진다.

(2) 스프레드시트를 사용하여 '제곱근의 값 구하기' 지도하기

스프레드시트를 사용하여 제곱근을 소수로 나타내어 보고, 이를 통하여 무리수가 순환하지 않는 무한소수임을 알게 한다.

① B2 셀에 '=A2^2'를 입력하여 A2 셀에 입력한 값의 제곱이 B2 셀에 표시되도록 한다.

=A2^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱
2		=A2^2								

같은 방법으로 B, D, F, H, J 열의 나머지 셀에도 그 셀의 왼쪽 셀에 입력한 값의 제곱이 표시되도록 한다.

② A2, A3, …, A7 셀에 차례로 1, 0, 1.1, …, 1.5를 입력하면 B열에 각각의 수를 제곱한 값이 나타난다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱
2	1.0	1.00								
3	1.1	1.21								
4	1.2	1.44								
5	1.3	1.69								
6	1.4	1.96								
7	1.5	2.25								

③ 소수점 아래 자릿수를 늘려가며 제곱한 값이 2보다 작으면서 2와 가장 가까운 수를 찾는다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱
2	1.0	1.00	1.40	1.9600	1.410	1.988100	1.4140	1.999396	1.41420	1.999962
3	1.1	1.21	1.41	1.9881	1.411	1.990921	1.4141	1.999679	1.41421	1.999990
4	1.2	1.44	1.42	2.0164	1.412	1.993744	1.4142	1.999962	1.41422	2.000018
5	1.3	1.69			1.413	1.996569	1.4143	2.000244		
6	1.4	1.96			1.414	1.999396				
7	1.5	2.25			1.415	2.002225				

④ 다른 무리수, 예를 들어 $\sqrt{3}$ 을 소수로 나타내도록 한다.

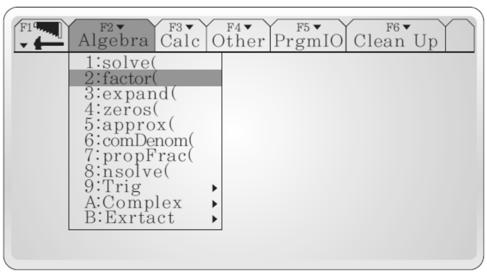
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱	x	x의 제곱
2	1.5	2.25	1.70	2.8900	1.730	2.992900	1.7320	2.999824	1.73200	2.999824
3	1.6	2.56	1.71	2.9241	1.731	2.996361	1.7321	3.000170	1.73201	2.999859
4	1.7	2.89	1.72	2.9584	1.732	2.999824			1.73202	2.999893
5	1.8	3.24	1.73	2.9929	1.733	3.003289			1.73203	2.999928
6			1.74	3.0276					1.73204	2.999963
7									1.73205	2.999997
8									1.73206	3.000032

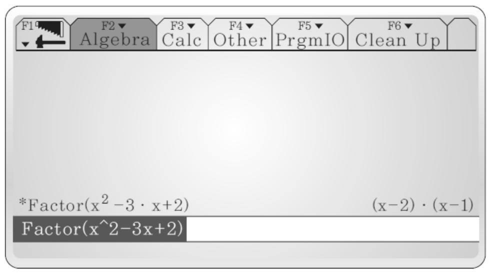
(3) CAS 그래핑 계산기를 사용하여 '인수분해와 이차방정식의 풀이' 지도하기

가. 인수분해 하기

① 명령어 불러오기: 메뉴에서 명령어 'factor('를 선택한다.

② 다항식 입력하기: 화면 아래쪽 입력 창에 'x^2−3x+2'를 입력하면 화면에 인수분해 된 결과가 나타난다.

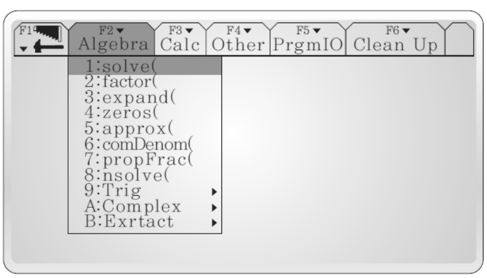


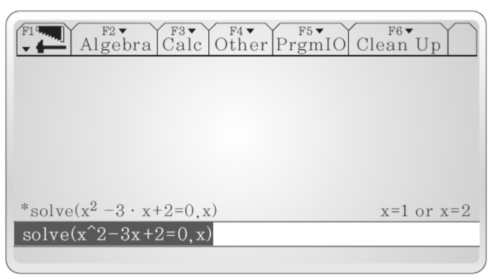


나. 이차방정식의 해 구하기

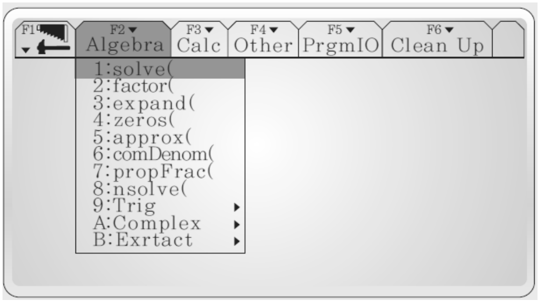
① 명령어 불러오기: 메뉴에서 명령어 'solve('를 선택한다.

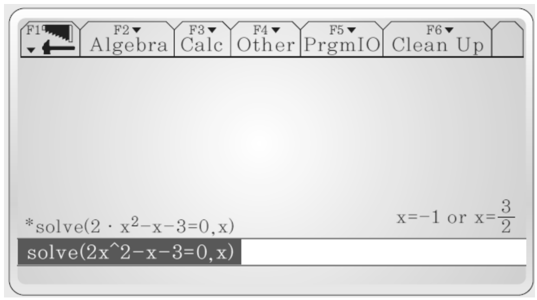
② 다항식 입력하기: 화면 아래쪽 입력 창에 'x^2−3x+2=0, x)'를 입력하면 화면에 이차방정식의 해가 나타난다.





③ 이차방정식 $2x^2-x-3=0$의 해를 구해 보기

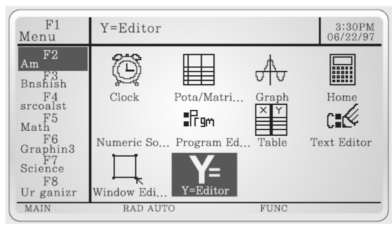


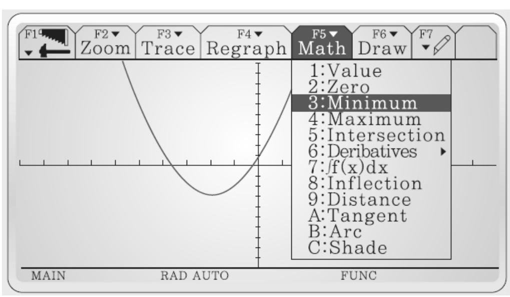


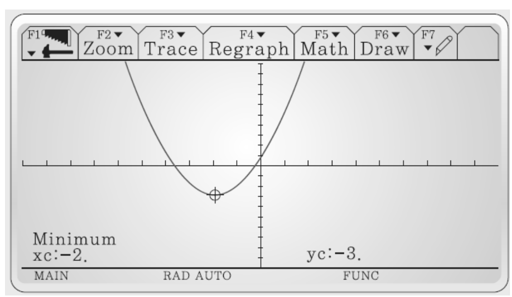
(4) CAS 그래핑 계산기를 사용하여 '이차방정식의 최댓값 · 최솟값 구하기' 지도하기

① 메인 메뉴에서 'Y='을 선택하고 $y=x^2+4x+1$을 입력한 뒤 버튼을 누르면 화면에 그래프가 그려진다.

② F5 메뉴에서 'minimum' 명령어를 선택한 후 x의 범위를 지정해 주면 화면에 최솟값을 갖는 점이 표시되고 최솟값과 그때의 x의 값이 출력된다.







[CAS 그래핑 계산기]

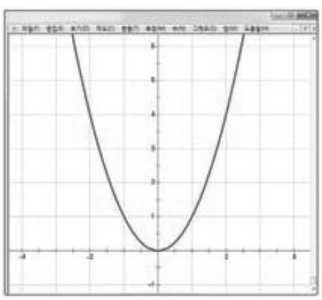
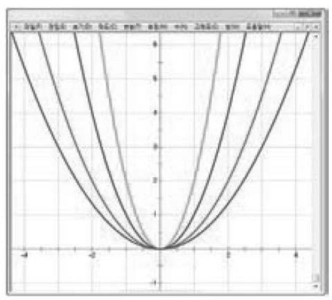
CAS 그래핑 계산기는 컴퓨터 대수 체계(Computer Algebra Systems)를 내장한 계산기로, 프로그래밍, 그래픽, 자료 분석 등 컴퓨터에 준하는 기능이 갖추어진 포켓형의 공학용 계산기이다. factor, solve 기능을 이용하여 인수분해, 방정식의 해를 구할 수 있으며 함수의 그래프를 그릴 수 있다. 또, 행렬과 벡터, 미적분, 통계 등에 유용하게 활용할 수 있고 화면을 분할하는 기능이 있어 대수 계산이 가능한 화면과 그래프가 그려지는 화면을 동시에 보면서 두 영역의 연결성을 한 화면에서 확인할 수 있다. solve 명령어를 이용한 이차방정식의 풀이는 이차방정식의 풀이 절차의 이해를 필요로 하지 않는다는 단점이 있다. 이에 계산기에 내장되어 있는 Symbolic Math Guide를 이용하면 이차방정식을 풀기 위한 대수적 알고리즘을 학생 스스로 탐색하게 할 수 있어 풀이에 대한 이해를 도울 수 있다.

(5) Equation grapher를 사용하여 '이차함수의 그래프의 성질' 지도하기

① 입력 창에 'y=x^2'를 입력하면 $y=x^2$의 그래프가 그려진다.

② $y=ax^2$에서 a의 값을 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$로 차례로 변화시키면서 ①과 같은 방법으로 $y=ax^2$의 그래프를 그린다.

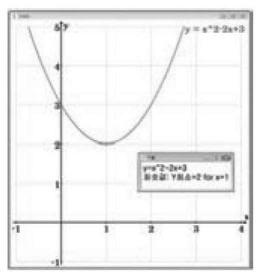
③ a의 값에 따른 $y=ax^2$의 그래프의 폭의 변화를 살펴본다.

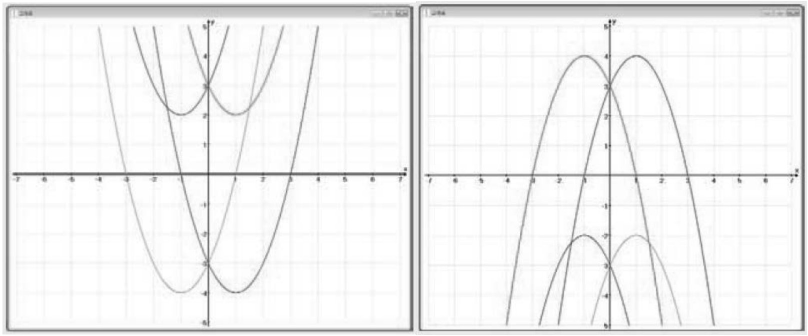



④ 그래프를 그린 후, 메뉴에서 최솟값을 나타내는 아이콘을 누른다.

⑤ 그래프 위에 마우스를 놓고 끌기를 하면 그래프 위에 최솟값을 갖는 점이 표시되고 기록 창에 최솟값이 나타난다.

⑥ 위와 같은 방법으로 a, b, c의 값이 변함에 따라 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 어떻게 변하는지 알아본다.

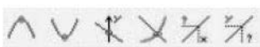




[Equation grapher 프로그램의 활용]

함수 지도에 컴퓨터 프로그램을 활용하면 그래프의 절편, 점근선, 기울기나 볼록 또는 오목한 상태를 직접적으로 관찰할 수 있으므로 함수에 대한 직관적인 이해를 도울 수 있고 계수의 값을 다양하게 변화시켜 가며 그래프의 특징을 스스로 발견할 수 있다. 특히 Equation grapher는 최댓값, 최솟값, 교점 등을 자동적으로 구할 수 있는 기능이 있다.

① 입력창에 함수식을 입력하고 엔터를 누르면 그래프 창에 함수가 그려진다. 함수의 그래프를 지우려면 지우개 아이콘()을 누르고 지우고자 하는 함수를 선택하면 된다.

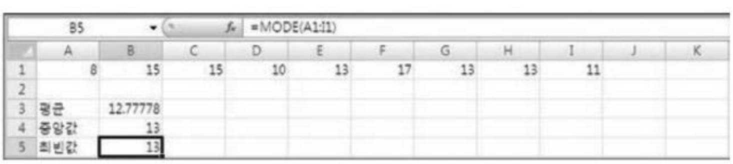
② 아이콘 은 차례로 최댓값, 최솟값, y절편, 교점, y의 값, x의 값을 구하는 기능으로 해당 아이콘을 누른 후 마우스로 그래프 위의 범위를 선택한다. 이때 아이콘을 클릭하는 것 대신 메뉴에서 구하기 메뉴를 눌러 원하는 값을 택할 수도 있다.

(6) 스프레드시트를 사용하여 '자료의 대푯값과 산포도 구하기' 지도하기

다음 자료의 대푯값과 산포도를 각각 구할 수 있다.

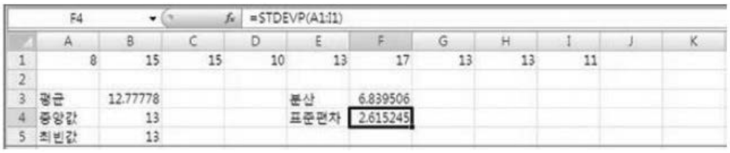
8	15	15	10	13	17	13	13	11	(단위:개)

① 자료를 입력하고 '=AVERAGE(A1:I1)', '=MEDIAN(A1:I1)', '=MODE(A1:I1)'을 입력한 후, ENTER키를 누르면, 평균, 중앙값, 최빈값을 각각 구할 수 있다.


B5 =MODE(A1:I1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	8	15	15	10	13	17	13	13	11		
2											
3	평균	12.77778									
4	중앙값	13									
5	최빈값	13									

② 자료를 입력하고 '=VARP(A1:I1)', '=STDEVP(A1:I1)'을 입력한 후, ENTER키를 누르면 분산과 표준편차를 각각 구할 수 있다.


F4 =STDEVP(A1:I1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	8	15	15	10	13	17	13	13	11		
2											
3	평균	12.77778			분산	6.839506					
4	중앙값	13			표준편차	2.615245					
5	최빈값	13									

③ 다음 자료의 평균, 중앙값, 최빈값과 분산, 표준편차를 각각 구할 수 있다.

〈시도별 고령화 비율〉

서울	경기	인천	대전	대구	광주	부산	울산
9.6	8.9	8.8	8.8	10.3	9.1	11.7	7.0
강원	**경남**	**경북**	**전남**	**전북**	**충남**	**충북**	**제주**
15.5	12.5	16.7	20.4	16.4	15.5	13.9	12.8

(단위:%)

⇒ 평균:12.36875, 중앙값:12.1, 최빈값:8.8, 15.5

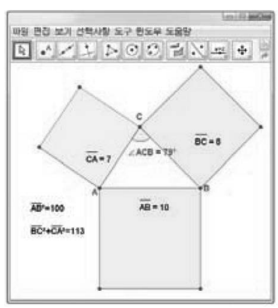
분산:13.19215, 표준편차:3.6321

[수학교육적 의의]

① 컴퓨터 프로그램을 사용하여 평균, 중앙값, 최빈값과 같은 대푯값과 분산, 표준편차와 같은 산포도를 간편하게 구할 수 있다.

② 학생들은 인터넷을 이용하여 통계 자료를 검색한 후 자료를 저장하여 스프레드시트에서 대푯값과 산포도를 구하는 활동을 통해 자료의 특성을 분석하고 비교하는 능력이 신장된다.

(7) GSP를 사용하여 '삼각형의 각의 크기와 변의 길이의 제곱 사이의 관계' 지도하기



① 각 C가 예각인 삼각형 ABC를 그린다.

② 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 각각 그린다.

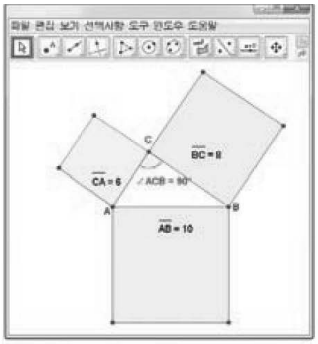
③ 측정 기능을 사용하여 ∠C의 크기를 측정한다.

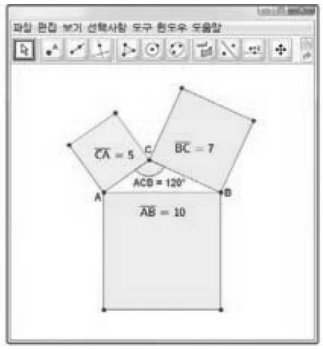
④ 마찬가지 방법으로 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 측정한다.

⑤ $\overline{AB}^2$와 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$의 값을 각각 구하여 비교한다.

⑥ 점 C를 움직여서 ∠C가 직각인 삼각형을 만들고, $\overline{AB}^2$와 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$의 값을 각각 구하여 비교한다.

⑦ 점 C를 움직여서 ∠C가 둔각인 삼각형을 만들고, $\overline{AB}^2$와 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$의 값을 각각 구하여 비교한다.





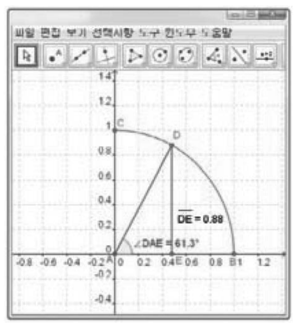
(8) GeoGebra를 사용하여 '삼각비 $\sin A$의 값의 변화' 지도하기

① 호 BC를 그리고, 그 위에 임의의 점 D를 잡는다.

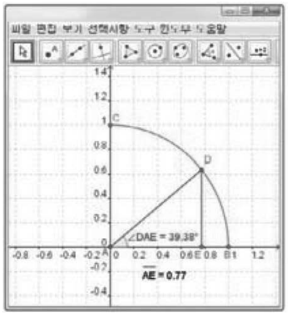
② $\sin A = \overline{DE}$의 값을 구한다.

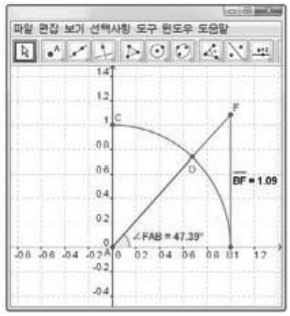
③ 점 D를 호 BC 위에서 움직이면서 $\sin A$의 값의 변화를 관찰한다.

⇒ 직각삼각형 DAE에서 $\sin A$의 값은 각 A의 크기가 커질수록 점점 커지고 각 A의 크기가 작아질수록 점점 작아짐을 알 수 있다. 또, $\sin A$의 값은 각A의 크기가 0도에서 90도까지 변함에 따라 0에서 1까지의 값을 가짐을 알 수 있다.



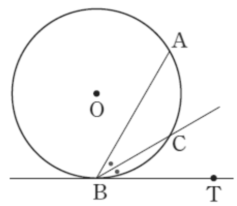
④ 직각삼각형 DAE에서 $\cos A$의 값과 직각삼각형 FAB에서 $\tan A$의 값의 변화를 관찰한다.





(9) GeoGebra를 사용하여 ‘원의 접선과 현이 이루는 각의 이등분선’ 지도하기

[문제] 오른쪽 그림에서 $\overline{BT}$는 원 O의 접선이고, $\overline{BC}$는 각 ABT의 이등분선일 때, 어떤 성질이 성립하는지 설명하시오.



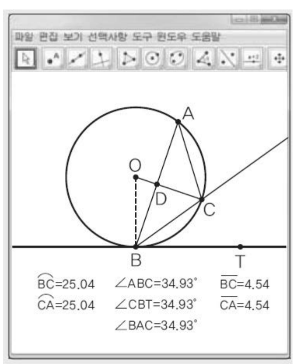
① 원 O와 현 AB를 그린다.

② 점 B에서 $\overline{OB}$의 수선을 그어 원의 접선 BT를 그린다.

③ 각 ABT의 이등분선을 그어 이 이등분선과 원의 교점을 C라고 한다.

④ 컴퓨터 프로그램의 그리기 기능을 사용하여 원하는 도형을 추가로 그리고, 측정 기능을 사용하여 호나 현의 길이와 각의 크기를 측정한다.

⑤ 점 A의 위치를 옮겨 가면서 어떤 성질이 성립하는지 알아본다.



⑥ 그 결과, 각ABC=각CBT=각BAC, $\overline{BC}=\overline{CA}$, $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CA}$를 발견한다.

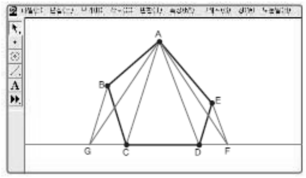
[수업의 의의]

컴퓨터 프로그램의 작도기능, 측정기능, 끌기기능 등 여러 기능을 사용하면 도형 속에 숨겨져 있는 성질을 발견할 수 있다. 먼저 학생들이 컴퓨터 프로그램의 여러 기능을 사용하면서 탐구하여 도형 속에 숨겨져 있는 성질들을 발견하게 한다. 그리고 이어서 자신들이 발견한 성질들이 성립하는 이유를 논리적으로 설명하게 한다. 이러한 과정으로부터 학생들은 귀납적 탐구를 통해 수학적인 성질을 발견하고, 이

어서 그 성질이 성립하는 이유를 논리적으로 탐구하는 두 단계로 이루어진 수학적 추론 활동을 경험하게 된다.

(10) GSP를 사용하여 '임의의 오각형과 넓이가 같은 정사각형 작도하기' 지도하기

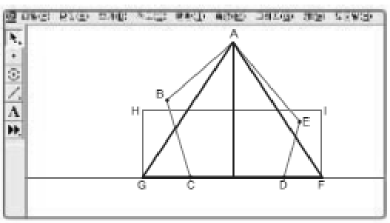
① 오각형 ABCDE와 넓이가 같은 삼각형을 작도하기 위하여 $\overline{CD}$의 연장선 위에 $\overline{AD}//\overline{EF}$인 점 F를 잡으면 △ADE=△ADF, 같은 방법으로 $\overline{CD}$의 연장선 $\overline{AC}//\overline{BG}$인 점 G를 잡으면 △ABC=△AGC이다.

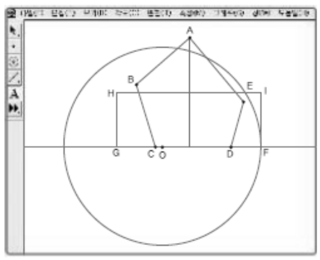


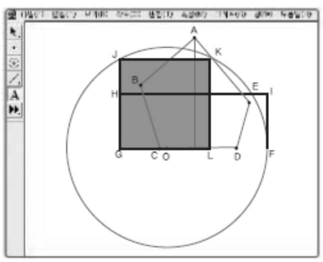
② $\overline{GF}$를 가로의 길이로 하고, $\overline{GF}$를 밑변으로 하는 삼각형 AGF의 높이의 1/2을 세로의 길이로 하는 직사각형 GFIH를 작도하면 △AGF와 ▫GFIH의 넓이는 서로 같다.

③ ▫GFIH의 가로의 길이와 세로의 길이의 합을 지름으로 하는 원 O를 작도한다.

④ $\overline{GJ}$를 한 변으로 하는 정사각형 JGLK의 넓이는 직사각형 GFIH의 넓이와 같다.







4.2. 고등학교 선택 과목

1) 고등학교 1학년

(1) 스프레드시트를 활용하여 '다항식의 나눗셈에서 몫과 나머지 구하기' 지도하기

다항식과 일차식을 바꾸어 가며 (다항식)÷(일차식)을 계산하고 나머지 정리를 이용하여 확인한다.

[예] $(x^3-3x^2-x-2)\div(x-4)$

① 몫과 나머지를 구하는 화면을 다음과 같이 만든다.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x^3	x^2	x	1	
3	다항식					
4	나누는 식					
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11		x^3	x^2	x	1	
12	몫					
13	나머지					
14						
15						
16						

② 스프레드시트의 각 셀에 다음과 같이 각 항의 계수와 상수항, 식을 입력한다. 이때 입력한 식은 조립제법이 연산되는 과정을 나타낸 것이다. 몫과 나머지를 나타내는 셀을 아래와 같이 지정한다.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x^3	x^2	x	1	
3	다항식	1	−3	−1	−2	
4	나누는 식			1	−4	
5						
6						
7	=−E4	=B3	=C3	=D3	=E3	
8			=A7*B9	=A7*C9	=A7*D9	
9		=B7	=C7+C8	=D7+D8	=E7+E8	
10						
11		x^3	x^2	x	1	
12	몫		=B9	=C9	=D9	
13	나머지				=E9	
14						
15						
16						

③ 각 셀의 값이 아래와 같이 계산되어 나타난다. 그리고 몫은 x^2+x+3이고, 나머지는 10임을 알 수 있다.

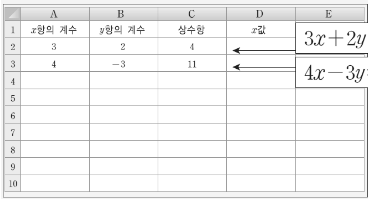
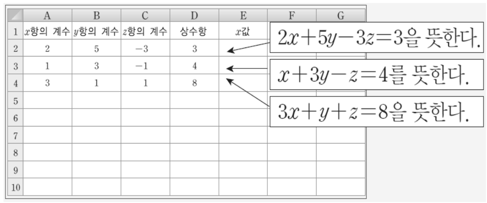
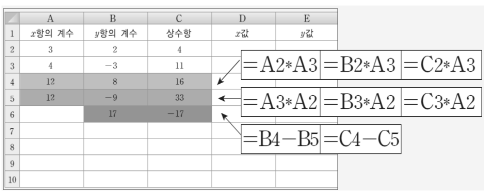
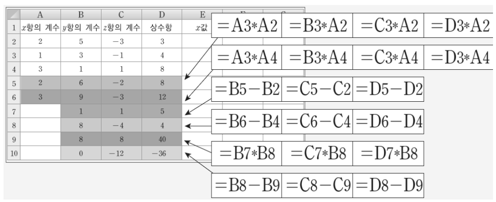
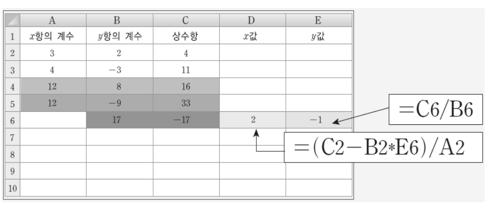
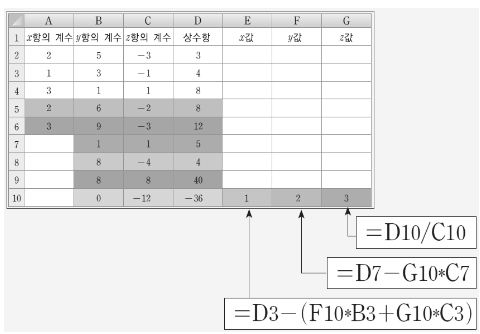
	A	B	C	D	E	F
1						
2		x^3	x^2	x	1	
3	다항식	1	−3	−1	−2	
4	나누는 식			1	−4	
5						
6						
7	4	1	−3	−1	−2	
8			4	4	12	
9		1	1	3	10	
10						
11		x^3	x^2	x	1	
12	몫		1	1	3	
13	나머지				10	
14						
15						
16						

$P(x)=x^3-3x^2-x-2$라고 할 때, 나머지정리를 이용하여 나머지를 구하면

$P(4)=4^3-3\times4^2-4-2$

이다. 즉, 스프레드시트를 사용하여 구한 나머지가 나머지정리를 이용하여 구한 것과 같음을 알 수 있다.

(2) 스프레드시트를 활용하여 ‘연립일차방정식의 풀이’ 지도하기

미지수가 2개인 연립일차방정식 $\begin{cases} 3x+2y=4 & \cdots ① \\ 4x-3y=11 & \cdots ② \end{cases}$ 를 푸시오.	연립일차방정식 $\begin{cases} 2x+5y-3z=3 \\ x+3y-z=4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$ 을 푸시오.
① 셀에 각 항의 계수와 상수항에 해당하는 수를 입력한다. 	① 셀에 각 항의 계수와 상수항에 해당하는 수를 입력한다. 
② x의 계수를 같게 하여 x를 없애기 위해, 각 셀에 다음 오른쪽의 수식을 차례로 입력한다. 	② x의 계수를 같게 하여 x를 없애고, y의 계수를 같게 하여 y를 없애기 위해 각 셀에 다음 오른쪽의 수식을 차례로 입력한다. 
③ y의 값을 구하고, 그것을 $3x+2y=4$의 y에 대입하여 x의 값을 구한다.  따라서 이 연립일차방정식의 해는 $x=2, y=-1$이다.	③ z의 값을 구하고, 그것을 $y+z=5$에 대입하여 y의 값을 구한 후, y, z의 값을 $x+3y-z=4$에 대입하여 x의 값을 구한다. 
	따라서 주어진 연립일차방정식의 해는 $x=1,\ y=2,\ z=3$이다.

[참고] 컴퓨터를 이용한 기하 교육

컴퓨터의 빠른 계산 처리와 시각적 대상의 다양한 조작능력 등은 수학교수학습에 새로운

환경을 제공하며, 수학에서 다루어지는 주제의 특성과 그것이 활용되어지는 방법을 변화시키고 있다. 컴퓨터를 이용한 기하교육에서도 여러 가지 탐구형 소프트웨어들이 있는데 대표적으로는 Cabri Ⅱ, GSP가 있다. 이들 소프트웨어가 갖고 있는 주요 기능으로는 드래그 기능, 사용자에 의해 정의된 작도 기능, 애니메이트(animate)와 자취 기능, 평면기하의 여러 가지 성질에 대한 해석기하학적 접근을 가능하게 하거나 작도 과정을 필요에 따라 보이거나 숨길 수 있는 기능, 측정 기능, 변환 기능 등이 있다. 이 중에 특히 애니메이트와 자취 기능은 평면기하의 성질을 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있게 한다. 따라서 교사들은 학습자의 능동적인 참여와 흥미를 유발하기 위해 이 기능을 활용할 수 있다. 또한 이 기능은 자취문제를 탐구하고, 어떤 정의된 자취에 근거한 기하학적 곡선을 만드는데 효과적으로 활용될 수 있다.

① 지오지브라(GeoGebra)

지오지브라는 Geometry와 Algebra의 합성어로 기하와 대수가 합쳐진 프로그램이다. 2002년 오스트리아 찰스부르크 대상의 마르쿠스 호헨바터(Markus Hohenwarter)에 의해 개발된 프로그램으로 기하, 대수, 미적분, 통계 및 이산수학을 쉽게 다룰 수 있는 무료 교육용 수학소프트웨어이다.

② GSP

GSP는 the Geometer's Sketchpad의 약자로 기하학자의 그림판이라는 뜻이다. GSP는 학생들이 직접 도형을 그리고 탐구하게 할 수 있는 탐구형 프로그램으로 애니메이션과 드래그 기능은 평면기하의 성질을 연속적이고 역동적으로 관찰할 수 있도록 하여 도형에 대한 학생들의 이해를 향상시키는데 도움이 된다.

2) 고등학교 '미적분'

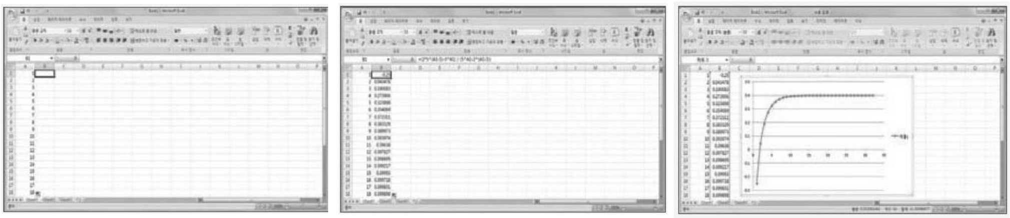
(1) 스프레드시트를 활용하여 '수열 $\left\{\dfrac{2\times 5^{n-1}-3^n}{5^n-2^{n-1}}\right\}$의 극한값' 지도하기

① 프로그램을 실행하고 A열에 1, 2, 3, …을 입력한다.

② B열의 첫 행에 '=(2*5^(A1−1)−3^A1)/(5^A1−2^(A1−1))'을 입력한 후, 셀의 오른쪽 밑 부분을 아래로 끌어내리면 ①에서 입력한 n의 값에 따른 $\dfrac{2\times 5^{n-1}-3^n}{5^n-2^{n-1}}$의 값이 자동으로 계산되어 채워진다.

③ B열 전체를 블록으로 설정한 뒤, [삽입]에서 [분산형 차트]를 선택한다. [곡선 및 표식

이 있는 분산형]을 선택하면, 다음 그림과 같이 수열이 그래프로 나타난다. 다음 그래프와 B열의 값을 통하여 수열 $\left\{\dfrac{2\times5^{n-1}-3^n}{5^n-2^{n-1}}\right\}$의 극한값이 2/5임을 시각적으로 확인할 수 있다.

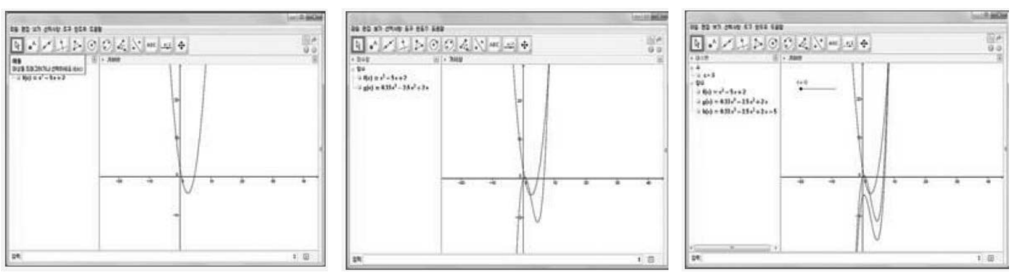


(2) GeoGebra를 활용하여 '부정적분과 적분상수' 지도하기

① 프로그램을 실행하고 입력 창에 'f(x)=x^2-5x+2'를 입력한다. [Enter]키를 누르면 함수 $f(x)=x^2-5x+2$의 그래프가 그려진다.

② 입력 창에 '적분(f)'를 입력한다. [Enter]키를 누르면 아래 그림과 같이 f(x)의 부정적분 g(x)와 그 그래프가 나타난다. 이때 나타나는 부정적분과 그래프는 적분상수가 0인 부정적분과 그 그래프이다.

③ 도구상자의 [슬라이더]를 클릭하여 기하 창에 적분상수 역할을 할 슬라이더를 만들고, 입력 창에 'y=g+c'를 입력한다. 슬라이더의 점에 커서를 놓고 마우스 오른쪽 버튼을 클릭하여 [애니메이션 시작]을 선택하면 슬라이더에서 지정한 범위에서 적분상수가 변하면서 부정적분의 그래프가 움직이다.

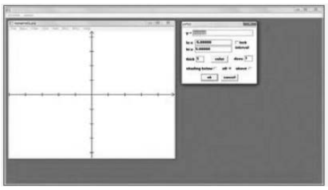
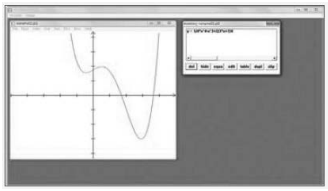
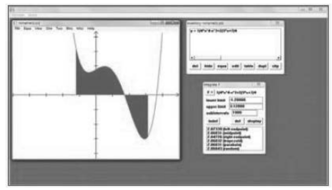


(3) GeoGebra를 활용하여 '정적분 $\displaystyle\int_{-1.2}^{3.12}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{2}{3}x+\frac{7}{4}\right)dx$ 구하기' 지도하기

① 프로그램을 실행하고 메뉴의 [windows]에서 [2-dim]을 눌러 그래프 창을 연다. 메뉴의 [Equa]에서 [y=f(x)]를 선택한다.

② 함수 입력 창에 '1/4*x^4−x^3+2/3*x+7/4'을 입력하고 [ok]를 누르면, 함수 $y=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{2}{3}x+\frac{7}{4}$의 그래프가 그려진다.

③ 메뉴의 [One]에서 [Integral]을 선택하여 생긴 새로운 창에 −1.2와 3.12를 각각 입력하고 [def]를 클릭하면, 정적분의 값이 약 2.06임을 확인할 수 있다.

3) 고등학교 '기하와 벡터'

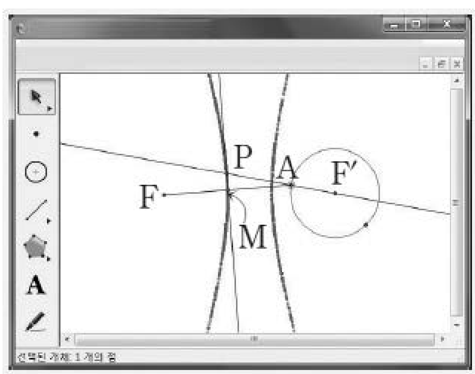
(1) GPS를 활용하여 '이차곡선 작도하기' 지도하기

① 중심이 F'인 원을 작도하고 원 밖의 임의의 점 F를 잡는다.

② 점 F와 원 위의 임의의 점 A를 선분으로 이은 후 중점 M을 작도한다.

③ 점 M을 지나고 선분 AF에 수직인 직선과 직선 AF'을 작도한 후, 이 두 직선의 교점을 P라고 한다.

④ 점 A가 원 위를 움직일 때, 점 P의 자취를 그린다. 그 결과 쌍곡선이 된다.



[참고] 작도한 결과가 포물선, 타원, 쌍곡선이 되는 이유

Ⓐ 포물선: 작도할 때 점 A가 준선 위를 움직이면 점 P의 자취가 점 F와 준선에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 나타내므로 포물선이 된다.

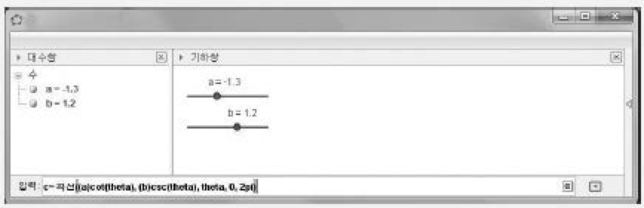
Ⓑ 타원: 작도할 때 점 A가 원 위를 움직이면 점 P의 자취가 두 점 F, F'으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 나타내므로 타원이 된다.

Ⓒ 쌍곡선: 작도할 때 점 A가 원위를 움직이면서 점 P의 자취가 두 점 F, F'으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 나타내므로 쌍곡선이 된다.

(2) 컴퓨터 프로그램을 활용하여 ‘매개변수로 나타내어진 함수의 그래프 그리기’ 지도하기

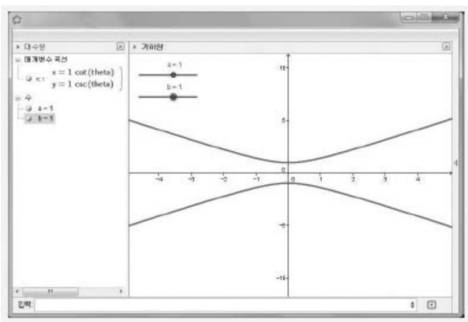
실수 a, b 의 값을 변화시키며 함수 $\begin{cases} x = a\cot\theta \\ y = b\csc\theta \end{cases} (0 \le \theta < 2\pi)$ 의 그래프의 모양을 확인할 수 있다.

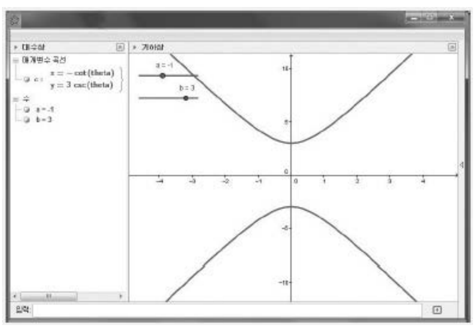
① 실수 a, b 의 값을 움직여 볼 수 있는 선분을 만든다.



② 함수 $\begin{cases} x = a\cot\theta \\ y = b\csc\theta \end{cases} (0 \le \theta < 2\pi)$ 를 수식창에 입력한다. 이때 매개변수가 θ이고 θ의 범위가 0 이상 2π 미만임을 함께 입력한다.

③ 입력한 함수의 그래프를 그려 $a=1,\ b=1$ 일 때 또는 $a=-1,\ b=3$일 때 등의 모양을 비교한다.





(3) 스프레드시트를 활용하여 ‘물체의 운동 탐구하기’ 지도하기

처음에 던진 속력 v_0의 값과 지면과 이루는 각의 크기 $\theta(0^\circ \le \theta \le 90^\circ)$의 값을 변화시키면 물체의 운동이 어떻게 달라지는지 확인해 보자.

① 수직 입력창에 $v_0=50$, 중력가속도 $g=9.8$, 시간 간격 $\Delta t=0.1$의 값을 입력하고, 스크롤 막대 도구를 이용하여 θ의 값이 0부터 90까지 1씩 변하도록 한다.

② θ의 값을 도($^\circ$)로 입력했으므로, $\frac{\pi}{180}$ 를 곱해서 라디안으로 변환한다.

스크롤 막대 1 | f_x =B2

	A	B	C	D	E	F
1	v_0	50				
2	θ	34				
3	Δt	0.1				
4	g	9.8				

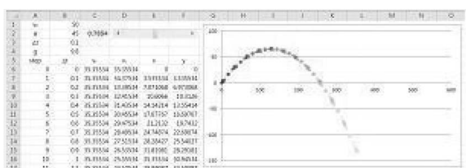
theta | f_x =B2*PI()/180

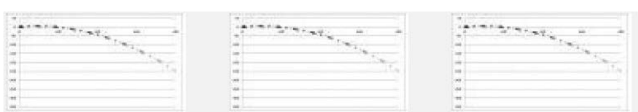
	A	B	C	D	E	F
1	v_0	50				
2	θ	34	0.59341			
3	Δt	0.1				
4	g	9.8				

③ $v_x = v_0 \cos\theta,\ v_y = v_0 \sin\theta - gt$ 임을 이용하여 시각 t에 따른 $x,\ y$ 의 값을 구한다.

	A	B	C	D	E	F
1	v_0	50				
2	θ	45	0.7854			
3	Δt	0.1				
4	g	9.8				
5	step	Δt	v_x	v_y	x	y
6	0	0	35.35534	35.35534	0	0
7	1	0.1	35.35534	34.37534	3.535534	3.535534
8	2	0.2	35.35534	33.39534	7.071068	6.973068
9	3	0.3	35.35534	32.41534	10.6066	10.3126
10	4	0.4	35.35534	31.43534	14.14214	13.55414

④ θ의 값을 변화시키면서 점 $P(x, y)$의 좌표를 이용하여 그린 그래프의 모양을 확인한다. $\theta = 45^\circ$ 일 때, 공이 가장 멀리 나아간다는 것을 그래프를 통하여 확인할 수 있다.





$\theta=10^\circ$ $\theta=45^\circ$ $\theta=80^\circ$

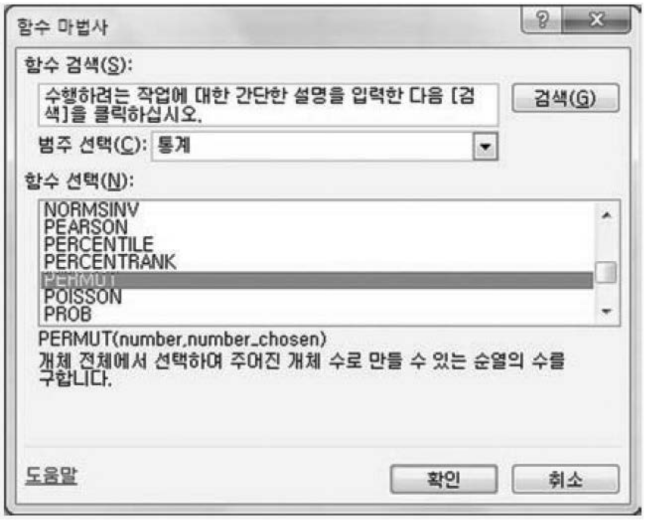
4) 고등학교 ‘확률과 통계’

(1) 스프레스시트를 활용하여 ‘순열의 수 구하기’ 지도하기

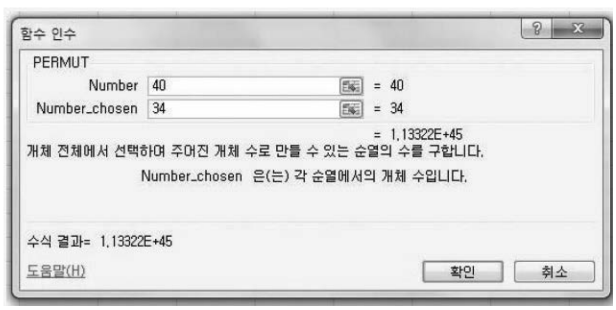
순열의 수 ${}_{40}\mathrm{P}_{34}$의 값을 계산해 보자.

① 메뉴에서 [수식]–[함수 삽입]을 선택하면 함수 마법사 창이 나타난다.

② 범주 선택에서 ‘통계’를 선택하고 함수 선택에서 ‘PERMUT’를 선택한 후 확인을 누르면 PERMUT 도구 상자가 나타난다.



③ 도구 상자의 Number에는 40을, Number_chosen에는 34를 입력한 후 확인을 누르면 도구 상자 아래에 ${}_{40}\mathrm{P}_{34}$의 값인 1.13322×10^{45}이 나타난다.



08

여러 가지 수학지도법

1. 직관과 시각화

1.1 수학 학습-지도의 형식적 전개

1) 수학과 형식적 사고

① 수학은 이상적인 대상과 이상적인 연산, 형식적으로 확립된 정의와 법칙에 의해서 완전히 결정되는 이상적인 증명을 다루는 학문이다. 따라서 수학은 형식적으로 언급된 법칙에 의해서 지배되는 정신적 구성물의 세계이다[20].

② 형식적 사고란 환경과 관계없이 추론되고 형식적으로 언급된 법칙에 의해서 지배되는 정신적 구성물의 세계이다. 따라서 이 사고에 의한 전개는 즉각적이지 못하고, 자명함이 부족하며, 직접적인 믿음이 결여되어 있다.

2) 형식적 사고와 직관

① 형식적 사고로 전개된 지식은 실제적인 현상이 갖는 신뢰감, 풍요함 그리고 확신감을 포함하고 있지 않다. 더불어 생산적인 능력을 소유하지 않는다.

(예) '함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에서 적어도 하나 존재한다'라는 명제를 증명과 함께 제시하면 학생들은 '아마도' 이 명제가 옳다는 것을 확신할 것이다. 그러나 그 이상의 것을 예측하거나 추론하여 발전시키지는 못한다.

② 형식적 사고로 전개된 지식에 대한 문제점은 '직관'을 이용한 전개로 대치됨으로써 해결 가능하다.

㉠ 직관은 전체적 · 직접적으로 표상 할 수 있는 전체 과정을 안내한다.

㉡ 직관은 겉보기에 정적인 표상에 행동적인 의미를 부여한다.

㉢ 직관은 구체적인 범위와 과정으로부터 일반적인 구성 원리를 파악하도록 유도한다.

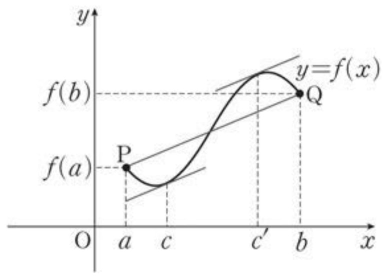
따라서 직관은 개념에 생산성을 부여하고 실제적인 적응 행위에 효율성을 보증하는 해석을 가능하게 한다.

예 '함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

---

20) 형식적인 닫힌 세계로서의 수학은 『Gödel의 불완전성의 정리』에 의해서 더 이상 신뢰할 수 없는 수학으로 자리가 흔들리게 되었다.

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에서 적어도 하나 존재한다'는 오른쪽 그림을 통해 쉽게 이해되고 그 이상의 무엇인가를 인정하게 된다.



1.2. 직관에 의한 수학교육

1) 직관의 의미와 역할

① 직관이란 명백한 정당화나 해설이 없이 직접적으로 파악되는 인지작용을 의미한다.

㉠ 지적인 직관: 감각적인 것이 아닌 개성이나 형식적인 이론에 대한 즉각적인 파악을 가리키는데 사용하는 직관이다.

(예) 모든 자연수는 후자를 갖는다.

㉡ 감각적 직관: 대상의 무게나 움직이는 물체의 속도에 대한 직관적인 판단을 가리키는 직관이다.

(예) 그림, 도해

② 직관은 확실한 인식의 일차적인 근원은 아니지만 우리의 사고와 행동을 신뢰하고 확신하도록 안내한다(신뢰감과 확신감 제공: 핵심적 역할). 더불어 직관은 경험을 요약하고, 일단의 자료에 대한 간결하고 전체적인 표상을 제공하며, 정보의 불충분함을 극복하도록 도와주고, 추론과정에서 의미 있는 해석을 도입하고, 정신활동에 유연한 연속성과 능동적인 적응행위를 특징짓는 굳건함과 효율성을 부여한다(부차적 역할).

2) 직관의 일반적 특성

① 자명성: 정당화가 필요 없이 참이라고 느끼는 것이다.

(예) 전체는 부분보다 크다. 모든 자연수는 후자를 갖는다. 두 점은 한 직선을 결정한다.

② 내재적 확실성: 자명하지는 않지만 자기 스스로 확실한 것으로 수용하는 느낌이다.

(예) 학교에서 배운 수학적 정리, Pythagoras의 정리, Euclid 기하의 공리

③ 강건성과 고착성: 자명성과 내재적 확실성에 의해 그것이 옳던 그르던 학생들에게 절대적으로 고착화 되어버리는 것을 의미한다.

④ 강제성: 직관은 개인에게 주관적인 면에서 절대적이고 유일한 표상 혹은 해석으로 부과되며, 일반적으로 다른 대안은 수용 불가능한 것으로 배제된다.

⑤ 외삽성: 어떠한 결론에 도달하기 위해 요구되는 단서가 충분치 못해도 결론에 도달할 수 있는 것, 즉 정보의 불완전성에도 불구하고 내재적 확신감을 느끼는 것을 의미한다.

(예) 수학적 귀납법의 원리는 경험에 의해서 얻어지지 않는다. 이는 한번 가능하면 같은 것의 무한반복을 인식할 수 있다고 느끼는 정신의 힘에 좌우된다(Poincaré).

⑥ 전체성: 추론이나 분석적 사고와 반대되는 전체적인 종합적 관점을 갖는 것을 말한다.

⑦ 암묵성: 무의식적이고 무비판적으로 발생하는 것을 의미한다.

(예) 여러 가지 양(넓이, 속도, 확률 등)을 직관적으로 비교할 때 어떤 대수적인 계산(덧셈, 곱셈 등)이 무의식적으로 일어나는 것

1.3. 직관에 의한 수학 학습-지도

1) 직관적 교수법: Pestalozzi의 내적 직관의 원리

Pestalozzi: 아동이 직접 사물을 눈으로 보고 손으로 만지는 경험을 하면서 감각 인상을 형성하게 한 다음, 이를 내적 직관(Anschaung)에 의하여 사물의 내적 관계를 인식하여 명확한 관념이 형성되도록 해야 한다

① 직관적 교수법: 언어적 설명 방법에 의하지 않고 실제적인 실물이나 표본, 그림 등에 대한 직접적인 관찰을 통해서 지식을 습득시키는 것이다.

② 모든 인식의 바탕이 되는 기본적인 직관은 "형(形)·수(數)·어(語)의 직관"이며, 이 직관을 "직관의 ABC"라 부른다.

먼저 형(形)을 정확히 판단하여 사물의 공간적인 관계를 파악하고, 수적인 관계를 이해하여 사물의 크기와 순서를 알고, 다시 그것을 명확한 언어와 결합하여 안으로는 사물의 명확한 관념을 확립하고 밖으로는 표현능력을 발전시키게 된다.

㉠ 기하와 산술과 언어의 각 분야에 대하여 그 기본 개념을 요소화하고 계열화하여 그러한 순서에 따라 아동의 내적 직관을 도야하는 일이 교사가 해야 할 주요한 임무이다.
㉡ 수학교육은 아동의 사물에 대한 감각적 인상으로부터 시작되어야 한다.
㉢ 아동이 도표를 가리키면서 교사가 말하는 것을 따라 한다든가 손으로 그리게 한다.

2) 추론직관

수학교육은 학생들에게 형식적인 논리적 사고법칙에 대응하는 지적 기능이 형성되도록 지도해야 할 뿐만 아니라 그에 대한 직관이 구성되도록 해야 한다.

① 추론직관: 논리적 조작에 수반되는 타당성에 대한 느낌을 의미한다.
㉠ 삼단논법에서 결론은 전제에 의해서 결정되는데, 그 타당성은 증명될 수 없으며 직관에 의해 받아들인다.
㉡ 귀납추론을 당연하게 느낀다.
㉢ 수학적 귀납법은 자연수의 전개와 관련하여 인식이 쉽다.
㉣ 구체적 조작기의 아동들이 AAA형의 정언 삼단논법을 바르게 이끌어 낸다.
② 추론직관과 추론능력의 발달
㉠ 논리적 조작의 기능을 안다는 사실이 실제적인 문제해결을 위해 자동적으로 사용될 것이라고 볼 수 없으며, 논리적 사고양식만으로 학생이 올바른 결론에 도달할 수 있을 것이라고 볼 수는 없다.
㉡ 논리적 추론 양식은 개인의 정신적 행위능력에 유기적으로 합체된 메커니즘으로 전환되어 직관적인 도구로 사용되어야 한다.
㉢ 논리적 추론 시 진리표가 아닌 함의관계의 완전한 구조를 직관적으로 동화하도록 즉, 관련된 개념이 내재적으로 분명하고 행동적으로 의미 있는 인지로 바뀌도록 해야 한다.
(예) [네 장의 카드 문제] 카드의 한 면에 모음이 적혀 있으면 다른 면에는 짝수가 적혀 있다. 제시된 카드에 E, 4, k, 7이라고 적혀 있다. 제시된 규칙이 참인지 어떤지를 알아보기 위해 카드의 다른 면에 쓰여 있는 것을 알아볼 필요가 있는 카드는 어느 것인가?

3) 직관적인 전체적 판단을 통한 지도

① 직관적인 판단은(분석적이고 논리적인 추론과 대조) 전체적인 견해로 나타난다.

전체적인 관점은 몇 가지 구성요소를 무시하고, 겉보기에 일관된 구조를 신속하게 생산할 수 있는 한두 가지 구성요소에만 의존함으로써 달성되거나, 이용 가능한 대부분의 요소를 종합하여 의미 있는 계층적인 단일구조로 조직함으로써 달성된다.

② 어떤 문제에 대한 풀이나 어떤 정리에 대한 증명이 발견된 후, 문제 해결자는 분석적인 전개를 직관적으로 수용할 수 있는 전체적인 의미 있는 견해로 종합하는 경향이 있다.

(예) 「Pythagoras 정리를 증명하여라.」

[증명] $\angle A^1 = \angle B,\ \angle D^3 = \angle A$

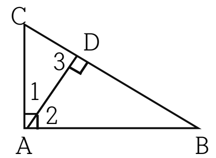
따라서 $\triangle ADC \approx \triangle BAC,\ \triangle BDA \approx \triangle BAC$

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD},\ \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{DB}$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DB}$$

$$= \overline{BC}(\overline{CD} + \overline{DB})$$

$$= \overline{BC}^2$$

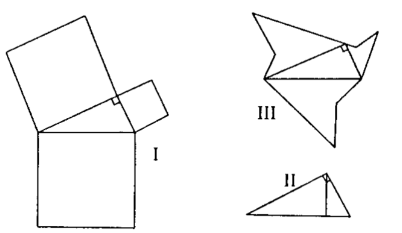


첫 번째 단계		두 번째 단계
삼각형의 닮음을 이용하여, 직각을 낀 각 변의 제곱이 빗변과 그 빗변 위에의 그 정사영과의 합과 같음을 증명한다.	➡	두 식을 더한다.

③ 폴리아에 의하면, 직관적인 전체적 파악은 특수한 예의 다양성을 넘어 본질적으로 필요하고 자명한 것으로 보이는 원리의 일반성을 파악하는 것이다.

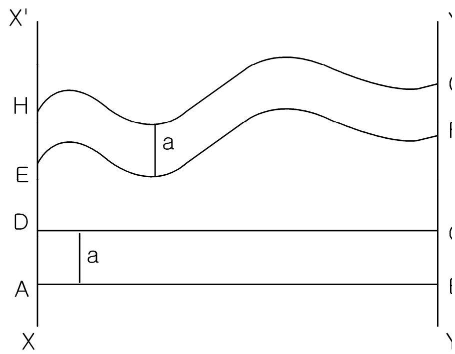
(예) Pythagoras 정리를 증명하여라

[증명] Pythagoras 정리를 증명하는 문제를 일반적인 정리 곧, 직각삼각형의 각 변위에 닮은 다각형을 그리면 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 다른 두 다각형의 넓이의 합과 같다는 정리를 증명하는 것으로 생각한다.



④ 직관적인 전체적 판단은 연령과 교육에 따라서 결정된다.

(예) 「오른쪽 〈그림〉에서 XX′//YY′이고AB//CD이며 AB와 CD 사이의 거리와 곡선 EF와 HG 사이의 거리가 같을 때, ABCD와 EFGH의 넓이를 비교하여라」고 하면, 정적분을 배운 학생일지라도 EFGH의 넓이가 더 넓다고 답한다. 그 이유를 물으면 더 길어 보이기 때문이라고 답한다.[21)]



4) 직관적 모델 활용

① 직관적 모델이란 직관적으로 파악할 수 없을 때 직관적으로 접근 가능한 동형인 대체물이다. 직관적 모델은 그 본질상 감각적인 것이며, 구체적인 실체와 같이 지각되고 표현되며 직접 다룰 수 있다.

(예) 벡터를 나타내는 유향선분, 방향, 붙은 수를 나타내는 수직선, 조합 문제를 해결하기 위한 수형도, 함수를 나타내는 그래프, 다이어그램 등

② 도해모델

㉠ Venn 다이어그램, 수형도, 히스토그램 등과 같이 도해는 현상이나 현상 사이의 관계에 대한 그림 표현이다. 이때 도해란 원형을 모델화하기 위하여 의도적으로 창안된 인공적인 구성물이다[22)].

㉡ 도해를 구성하고 해석하는 것을 배움으로써 학생들은 자신의 정신적인 과정을 보다 잘 조종하고, 개념적 뒷받침이 된 고도의 직관적인 사고능력을 개발할 수 있게 된다.

---

21) 그러나 카발리에리 원리에 의하면 두 도형의 넓이는 같다.

22) ① 도해는 추상적인 관계를 직관적인 표현으로 번역하는 데 기본적으로 중요하다.
② 도해는 어떤 구조나 과정에 대한 개관적인 전체적 표상을 제공하며 즉각적인 이해에 기여한다.
③ 도해는 상징적인 표현과 영상적인 표현이란 겉보기에 대립되는 두 가지 형태의 표현의 종합이다.

[참고] 전형적인 모델(예)

i) 전형적인 모델(예)이란 학교 수학에서 추상적인 진술과 함께 본보기로 보여주는 모델(예)를 의미한다.

(예) 삼각형 → '예각삼각형', 복소수 → '$x+yi$ ', 접선 → '원의 접선'

p이면 q이다가 참dls 명제이다 → '$p \Rightarrow q$'

ii) 전형적인 모델의 역할과 중요성

• 어떤 개념에 부여된 전형적인 모델은 특별한 예를 확인하는 방식에 영향을 준다.

(예) 삼각형의 높이 개념에 대한 전형적인 모델은 예각삼각형과 관련된다. 따라서 예각삼각형이 아닌 특정 삼각형의 높이를 예각삼각형과 관련지어 주었을 때, 높이에 대한 이해가 용이해진다.

• 문제를 해결하기 위해 채택하는 전략과 풀이 자체에 영향을 준다.

(예) 「아버지의 나이는 철수의 나이보다 3배 많으시며, 할아버지의 나이는 철수 아버지 나이 보다 2배 많으십니다. 철수가 10살이라면 아버지와 할아버지의 나이는 각각 얼마입니까?」라는 문제에서 그 문제 유형상 다른 전략보다 '방정식 세우기' 전략을 이용하려는 경향이 높다.

• 학생들의 수학적 개념은 전형적인 모델에 의해 좌우된다.

(예) 복소수를 $x+yi$ 로만 생각하고 y 가 0일 때는 자연수나 유리수로만 생각한다.

(예) 접선은 원의 접선에 대한 표상을 갖고 있다.

iii) 전형적인 예에 의해 발생될 수 있는 문제점을 극복할 수 있는 교수학적인 수단

• 학생은 수학적 개념, 정의, 성질, 문제해결 등과 관련된 모델을 스스로 찾을 수 있는 기회를 갖아야 한다.

• 아동은 정의가 의미하는 것을 충분히 일찍 배워야 한다. 특히 그 정의를 모를 때조차 다양한 모델을 일찍 접해 보는 기회를 갖아야 한다.

• 특수화를 고려하여 전형적인 예, 특수한 예 그리고 일반적인 예들을 함께 지도해야 한다.

③ 모델이 가져야할 특성

㉠ 모델은 원형과 구조적으로 일관성 있게 대응해야 한다.

(예) '모델에 의해서 얻어진 해'와 '원형의 대응하는 항목으로 얻어진 해'는 대등

㉡ 모델은 원형에 대해서 상대적인 자율성이 있어야 한다. 즉 잘 구조화되고 내적으로 모순 없이 그 자체의 법칙에 의해서 일관성 있게 작용할 수 있어야 한다. 따라서 좋은 모델이란 자율적인 실체이어야 하는 동시에 원래의 상황과 해결자의 지적 활동 사이의 신용할 수 있는 중개자이어야 한다.

1.4. 직관에 의한 수학 학습-지도 시 유의점

1) 직관 형성과 경험

① 직관은 경험에 의해 형성된다. 그러나 경험은 제한된 환경에 한정(한계성)되고 구체적인 입장만을 인정(구체성)하므로 경험에 의해 형성된 직관은 직관적 편견과 현실에 대한 왜곡된 표상으로 변형되는 경향이 있다.

㉠ 구체성

예 길이가 다른 두 선분이 같은 수의 점을 포함한다는 것을 직관적으로 수용할 수 없는 것은 점이 구체적이지 않기 때문이다.

㉡ 유한성: 대상을 무한히 확장 가능하다고(역동적 무한을 의미함) 상상할 수는 있지만 시간적으로 제한되어 있다.

예 직선을 무한히 확장시킬 수 있지만 아무리 오랜 시간을 확장하여도 매순간에 얻는 것은 실제로 유한인 선분이다.

㉢ '복제' 장애: 동일한 원소가 서로 다른 두 집합에 동시에 속하는 것에 대해 어려움을 느낀다.

예 '삼각형에서 두 각이 같으면 두 변이 같다'는 정리에 대한 Pappus의 우아한 증명을 이해하는데 어려움을 느낀다.

② 경험은 제한된 환경에 한정되므로 직관의 신뢰성과 효율성을 제한하게 된다. 그럼에도 불구하고, 학생들(인간)은 경험에 의해 형성된 주관적으로 확실하고 일관성이 있고 보편적으로 타당한 표상을 신뢰하고 자기 일관성에 따라 판단하려는 경향이 높다.

③ 교수학적 권고

㉠ 여러 가지 개념과 명제에 대한 학생들의 직관적인 이해를 깊게 하는 것이 중요하다.

⇒ 학생들이 개인적, 경험적으로 정신적인 생산적 활동에 참여할 수 있는 교수학적인 상황을 만들어 주어야 한다.

㉡ 학생들이 비직관적인 것에 대한 직관을 가지도록 안내한다.

2) 직관적인 의미의 실제성과 수학 지식의 형식성(음수를 바탕으로)

① 양수는 실제적인 양을 표현하므로 실제적인 의미를 갖는 수로 간주되는 반면에, 음수는 없는 것보다 작은 실제적인 현상을 확인할 수 없기 때문에 실제로 존재한다는 관념과 부합되지 않는 반직관적인 개념으로 받아들여진다.

② 음수의 역사

㉠ A.D. 3세기~19세기 중반: 음수의 존재성을 부정하였다. 왜냐하면 음수를 정당화하기 위한 구체적인 모델을 못 찾았기 때문이다.

㉡ 19세기 중반(Herman Hankel): 음수를 정당화하기 위한 구체적인 모델을 더 이상 찾지 않았다. 즉 음수를 형식적인 구성물로 간주하고 $\mathbb{R}^+$(실수)에서의 곱셈을 '형식불역의 원리'에 따라 $\mathbb{R}$의 곱셈으로 확장할 것을 제한하였다.

[의의] 수학적 사고가 구체적이고 경험적인 속박으로부터 해방되려는 투쟁의 많은 예 가운데 하나이다.

③ 프로이덴탈(H. Freudenthal, 1983): 음수는 처음부터 형식적으로 취급되어야 한다고 주장하고 '귀납적 외삽법' 사용을 제안하고 있다.

3) 직관적인 편견과 극복 방안

① 직관적인 편견: 직관적인 인지 가운데 추론활동에서의 일관된 적절성의 결과로 우리의 인지 체계에 강력하고 가장 저항력이 있는 안정된 요소로 남아 교육적 딜레마를 야기하는 것을 의미한다.

예 나눗셈은 '수를 크게 할 수 있다', 곱셈은 '수를 작게 할 수 있다', '자연수의 집합은 짝수의 집합과 대등하다'와 같은 명제

⇒ 직관적 편견은 학생이 단순하게 개념적 수준에서 변화해야할 것이 아니라 인지적 신념 체계를 재조직하여야 한다. 특히 학생이 쉽게 받아들이려 하지 않는 부분에 대해, 교사는 지적인 교육의 과정에서 학생의 자신감이 파괴되지 않는 상태에 학생들의 오개념을 수정해야 한다.

② 직관적인 편견의 극복 방안과 메타인지적 능력의 개발

㉠ 아동, 어른 모두 직관적 장애에 부딪히며, 이는 자연스럽고 정상적인 사고 경향임을 가능한 한 일찍 분명히 해야 한다.

㉡ 자신의 정신 활동을 분석하고 조종하는 것을 배워야 한다.

㉢ 학생들이 메타인지적 능력을 기르도록 해야 한다. 즉, 어려운 수학문제를 푼 후에 깊게 생각에 잠겨 문제를 마음 가운데에로 분석하며 굴리는 반성, 즉 사후 분석을 통해 사고과정을 조종하는 메타인지적 능력을 개발시킨다. 또한 메타인지적 능력의 개발은 학생들의 사후조종을 개선시킬 수 있다.

[메타인지적 능력의 개발을 위한 바람직한 전략]
•조작적 수준에서 자동적으로 작용하는 자기 조절 스키마를 개발한다.
•추론 가운데 잠재적인 함정(사전 경험으로부터 그럴 것으로 판단되는)에 이를 때마다 학생 자신에게 경고하는 '경보장치'를 개발하게 한다.

진정한 교육적 문제는 사후적 반성을 통하여 그의 추론과정을 체계적으로 조종하는 지적인 수단과 추론과정에 포함된 관념과 추론의 타당성을 자동적으로 조종하는 기능을 체계적인 실행을 통하여 개발하는 지적인 수단을 부여하는 것이다.

4) 직관의 고착성과 대처방안

① 직관의 고착성: 개인의 경험에 깊이 뿌리를 내리고 있는 직관에 대하여 그 나름의 자기 설명 능력을 갖고 있어 외적인 정당화와 타당화를 요하는 체계로 대체될 수 없이 고착화되는 상태를 의미한다(직관은 정신적인 양식 속에 매우 깊게 뿌리를 내리고 있어 주체에게 일관성이 있고 자명하게 여겨지므로 쉽게 바뀌지 않는다).

예 수는 실제적 대상을 계산하기 위한 수단이며, 음수는 직관적으로 연산 불가능하므로 수가 아니다.

② 직관의 고착성에 대한 교육적 대처방안

㉠ 초기 모델을 제시할 때 가능한 한 일찍 교육적 방향을 근거로 한 모델을 정련하고 점차적으로 그리고 체계적으로 일반화시킨다.

㉡ 가능한 한 일찍(초등학교부터) 점진적으로 보다 복잡하고 추상적인 개념을 동화할 수 있게 지도한다.

5) 직관 특성 중 시각화와 대표성에 따른 문제점

① 시각적 표상은 정보의 개관적인 표상에 도움을 주며, 전체를 인식하는데 중요한 요인이 되지만 직관적인 전체적 추정이 자료의 특정한 요소의 두드러진 측면에 의해 치우치는 경우가 발생한다.

예 피쉬바인(Fischbein); 중학교 학생들에게 5초 동안에 $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$과 $1\times2\times3\times4\times\ 5\times6\times7\times8$의 값을 추정하라고 하였을 때, 정답은 40,320인데 후자의 평균 추정값은 512인 반면에 전자의 평균 추정값은 2,250이었다.

⇒ 시간 제약 아래에서 처음 몇 개의 수의 크기가 전반적인 추정에 영향을 주고 있다.

② 대체로 사건 A가 사건 B보다 겉보기에 더 대표성이 있어 보일 때 보다 더 일어날 가능

성이 많은 쪽으로 판단하는 경향이 있다.

(예) 동전 시행에서 HTHTT는 HHHHH보다 직관적으로 무작위 과정을 더 잘 대표하며 따라서 더 잘 일어나기 쉽다고 판단한다.

1.5. 직관에 의한 효율적인 수학교육을 위한 권고사항

> 직관은 중요한 생산적인 아이디어의 원천이지만 수학적 사고를 왜곡하거나 방해할 수도 있다. 따라서 학생들이 자신의 직관적인 개념을 계속 조종하고 형식적인 수학적 요구와 일치하는 새로운 직관을 구성하는 능력을 개발하도록 교사와 수학교육은 끊임없이 노력해야 한다.

① 학생들은 수학적 사고에 생산적인 직관적 측면을 배워야 한다. 더불어 이러한 직관과 수학적 사고과정 사이의 위치를 조정하는 것도 배워야 한다.

∴ 학생들은 수학적 개념의 정확한 형식적인 의미, 함의, 그리고 그 바탕에 깔려있는 생각을 직관하도록 학습해야 한다.

② 학생은 메타인지적 방법을 통하여 자신이 사용한 수학적 개념의 형식적인 정의를 분명히 인식하고 그 오개념의 직관적인 근원을 이해하도록 노력해야 한다.

③ 교사는 학생들에게 수학적 개념과 연산에 대한 '형식적 해석과 직관적인 해석' 사이의 가능한 갈등을 의식하도록 도와줄 수 있는 교수학적인 상황을 창안해야 한다.

④ 직관적 모델을 사용할 경우, 가능한 한 일찍 지도되는 개념의 형식적인 의미와 형식적인 구조를 이해할 준비를 시키도록 해야 한다.

⑤ 직관적인 느낌, 직관적인 신념과 형식적으로 뒷받침된 확신을 구분하는 학생의 능력을 개발시켜야 한다.

⑥ 학생은 잘못된 추측의 위험성을 배워야 하며, 이것이 모든 사람이 문제를 해결하는 방식에 개재됨을 이해해야 한다. 형식적이고 직관적으로 자신이 발견, 예상한 해를 분석하고 검사하는 능력을 개발해야 한다.

⑦ 수학에서 모든 것에 대한 직관적 해석이 가능한 것은 아님을 학생들에게 분명히 이해시켜야 한다.

⑧ 교사는 학생들이 개념에 부여한 암묵적인 해석, 직관적인 반응, 그들이 사용하는 직관적인 모델, 새로운 개념의 획득으로 받는 영향 등이 무엇인지 알아야 한다.

⑨ 교사는 수학적 개념의 직관적인 측면과 그 형식적인 구조 사이의 복잡한 관계에 여러 가지 교수학적인 수단이 미치는 영향을 평가해야 한다.

1.6. 시각화와 수학교육

수학은 수학적 대상에서 이질적인 요소는 버리고, 공통적인 요소를 추출하여 형식화하는 추상화에 의하여 생성된 개념을 다루는 학문이다. 이러한 추상성의 특징으로 인하여, 학생들은 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 쉽게 인식하지 못하였으며, 수학적 사실을 이해하는데 어려움을 느껴왔다. 따라서 학생들이 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 학습할 때, 그들의 직접적인 인식을 통하여 수학적 개념 · 원리 · 법칙에 쉽게 접근할 수 있도록 고안된 교수-학습방안이 요구되고 이를 위해 지각에 도움을 주는 구체물이나 매개체들을 통한 수학적 사실의 시각화가 수학의 추상성을 극복하여 학습자의 직접적인 이해에 도움을 줄 수 있다.

1) 시각화

① 시각적 표상: 정보의 개관적인 표상에 도움을 주며, 전체성 인식의 중요한 요인이 된다.

② 시각적 이미지의 구체성: 자명함과 즉시성의 느낌을 창안하는 데 본질적인 요인이 된다.

③ 시각적 이미지: 가지고 있는 자료를 의미 있는 구조로 조직할 뿐만 아니라 해의 분석을 안내하는 중요한 인자이다.

④ 스켐프(R. R. Skemp)가 제시한 시각적 기호와 언어-대수적 기호

시각적 기호	언어-대수적 기호
· 모양, 위치 등 공간 성질의 추상화	· 수와 같이, 공간적 형태와 무관한 성질의 추상화
· 의사소통하기가 어렵다.	· 의사소통하기가 쉽다.
· 보다 개별적인 사고를 표상	· 보다 사회화된 사고를 표상
· 통합적, 구조를 명시	· 분석적, 세부사항을 명시
· 동시적	· 순서적
· 직관적	· 논리적

2) 학교에서 시각화를 소홀히 다루는 이유

① 학교 수학의 정신을 논리적 엄밀성의 추구로 보고, 학교 수학의 여러 영역에서 논리적 접근을 강조하기 때문이다.

② 시각화 자료나 시각화를 위한 도구가 부족하거나 결여되었기 때문이다.

⇒ 현재는 수학교수방법론의 변화와 다양한 교수 공학의 발달로 인하여 시각화의 소홀함이 극복되고 있다.

3) 시각화의 의의

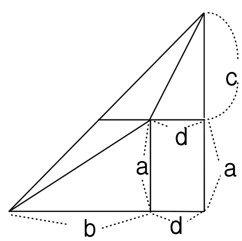
① 수학적 사실이나 수학적 개념을 보다 쉽고 직관적으로 이해하고 이와 더불어 이해에 깊이와 의미를 준다.
② 문제해결에 믿음직한 안내자를 제공한다.
③ 창의적인 발견을 고취시키도록 부추긴다.
④ (학교 수학에서 다루는 수학적 사실들은 시각적으로 표현 가능하다) 시각적으로 표현된 표상은 상징적으로 표현된 문자식에 비해 창의적 활동을 가능하게 한다.

4) 직관적인 문제해결과정에서 시각화의 역할

시각화는 추상적인 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 구체적이고 직접적으로 지도하는데 효과적인 방안의 하나이다.
* Polya(1957) "그림은 기하 문제의 대상이 될 뿐 아니라, 처음에 전혀 기하적이 아닌 모든 문제 풀이에 중요한 도움이 된다."(p. 93)

① 수학적 개념 · 원리 · 법칙에 대한 직관적 인지와 즉시성과 자명성을 창안해 준다(시각화된 표상은 그 자체의 이미지에 의해 번뜩이는 아이디어가 발현되게 하는 직관을 경험할 수 있게 하는 유용한 매개체이다).

(예) 부등식의 성질 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

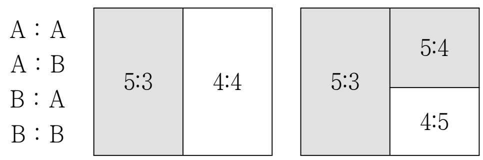


⇒ 이와 같은 시각화된 표상은 학습자가 '대수적이고 논리적인 증명'에 의해 주어진 부등식이 성립함을 보이는 것보다, 그 자체의 이미지에 의해 입증하고자 하는 성질을 직관적으로 이해하도록 도와준다.

② 수학문제를 직관적으로 이해하고 해결하는데 유용한 전략이 된다.

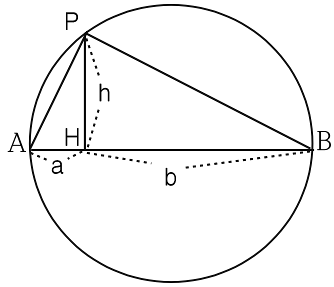
(예) 확률론 '분배 문제'

「A, B 두 사람이 먼저 5번을 이기는 사람이 상금을 갖기로 하고, 이길 가능성이 서로 똑같은 게 임을 하는데, A는 4게임을, B는 3게임을 이긴 상태에서 게임을 중단하게 되었다. 상금은 어떻게 나누는 것이 바람직한가?」



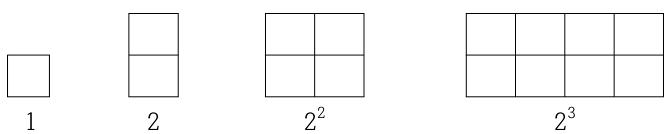
③ 수학의 개념이나 정리에 대한 직관적 이해가 가능하게 해 준다(수학의 많은 정리들은 시각화가 가능하며, 시각화된 수학의 개념이나 정리는 수학교수 · 학습에서 수학적 사실의 직관적 이해에 도움이 된다).

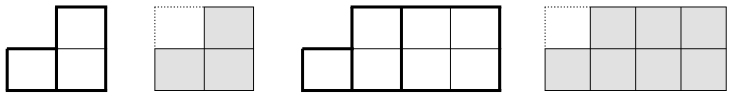
(예) 산술평균과 기하평균의 대소 관계: $a > 0 \quad b > 0$ 일 때, $\frac{(a+b)}{2} \geq \sqrt{ab}$



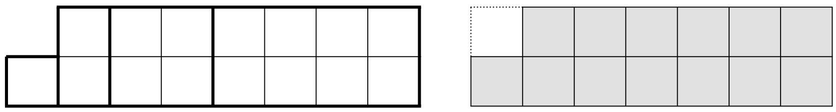
④ 사고 영역 내에서 쉽게 지각할 수 있고 구체적으로 다룰 수 있는 대상을 이용함으로써, 문제해결에 대한 단서나 해결책을 발견하도록 하는 '예측 직관'을 경험할 수 있다.

(예) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$





$1+2 = 2^2-1$ $\qquad$ $1+2+2^2 = 2^3-1$



$1+2+2^2+2^3 = 2^4-1$

[문제] 다음 예제를 시각화하여 보시오.

(예제1) $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$

(예제2) $1+k+k^2+k^3+\cdots\ k^{n-1}=\dfrac{k^n-1}{k-1}$

> Fischbein(1987) 시각화된 표상은 단순한 이미지가 아니다. 이는 전체적인 해가 완전히 개발되지 않았다 할지라도 내재적 확실성의 느낌과 결합하여 전체적인 정보를 조직하고, 문제에 대한 의미 있는 구조로 즉각적으로 자료를 조직하여 분석적인 발달을 안내하는 중요한 요인이 된다.

5) 시각화가 수학 학습에 주는 부정적인 효과

① 우리의 시각에는 한계가 있으므로 정확한 시각화는 불가능하다.

② 시각을 통하여 얻은 정보를 지나치게 과신하는 경향이 있다.

③ 동일한 장소에서 동일한 대상을 보더라도 관찰자에 따라 대상이 다르게 인식된다.

④ 시각을 통해 인식된 대상에 대해 면밀히 분석하지 않은 즉각적인 판단 때문에 사물의 특성을 왜곡하게 된다.

⑤ 시각적으로 상상할 수 없는 경우에도 이용 가능한(시각적으로 이용되는) 정보에 치우치기에 잘못된 결론이 나타날 수 있다.

1.7. 컴퓨터 탐구형 소프트웨어를 통한 시각화에 의한 직관 신장

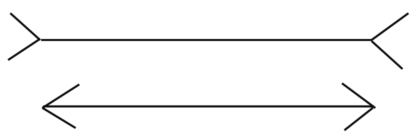
① 탐구형 소프트웨어는 학생들에게 직접적인 조작의 기회를 제공함으로써, 역동적인 동영상을 통하여 지필환경에서 구현하기 어려운 시각화를 제공하고, 수학적 사실의 불변성을 보여줄 수 있다. ⇒ 딘즈(Dines, 1960)의 '지각적 다양성의 원리'와 '수학적 다양성의 원리'와 관련

② 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계에서 그래픽, 애니메이션 그리고 시뮬레이션을 통한 학생들의 자기 주도적인 직관적 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

1.8. 시각화 이용 시 주의점

① 시각화된 이미지는 직관적인 판단의 상황에서 오류를 일으킬 수 있음에 유의한다.

(예) Mach 착시



(예) '선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이다'라는 사실을 받아들이기 힘들다.

② 시각화된 표상은 인간의 지각의 한계를 벗어나지 않도록 구안되어야 하며, 원형과 관련된 개념의 명확한 분석의 결과로 제시되어야 한다. 또한, 시각화된 표상 자체에 집중함으로써 논리-연역적인 접근 방식을 외면하는 것을 피해야 하며, 소위 메타인지적 이동이 일어나지 않도록 유의할 필요가 있다.

③ 수학적 사실의 시각화된 표상이 직관의 즉시성을 창안하는 중요한 요인은 되지만 그 자체로 직관적 지식은 아니다.

④ 시각화된 표상이 원형과 관련된 의미의 명확한 개념적 분석과 이해를 바탕으로 제시되지 못할 경우 학습자는 학습목표의 도달에 어려움을 겪게 된다.

⑤ 학생들은 시각화된 표상이 제공하는 정보에 지나치게 과신하는 경우가 있다.

> 수학적 사실의 시각화는 시각화되어지는 원형과 관련하여 이에 대한 추상적인 수학적 사실을 시각화하기 전에 명확하고 체계적인 개념적 분석과 이해가 선행되어야 한다.

2. 분석법과 종합법

2.1. 문제해결과 분석-종합법

어떤 문제든 각 문제가 해결되는 풀이 방법이 존재한다. 결국 각 문제해결은 풀이 방법을 발견한 뒤 그 발견한 풀이 방법을 바탕으로 문제를 해결하는 것이 타당하다.

증명문제	작도문제	방정식 문제	답 구하는 문제
증명(D)이 되었다고 하자	주어진 조건을 만족하는 도형을 작도(D)했다고 하자	미지의 값을 찾았다 하고 조건에 맞는 식 세우기(D)	구하고자 하는 것(D)을 이미 구했다고 하자
⇧	⇩	⇩	⇩
증명(D)이 되려면 어떤 조건(A)이 선행되어야 하는가?	D를 작도하기 위해 필요한 도형 찾기(A)	등식의 성질을 적용하여 방정식 변형하기(A)	구한 것으로부터 유도될 수 있는 명제 도출하기(A)
⇧	⇩	⇩	⇩
증명문제	**작도문제**	**방정식 문제**	**답 구하는 문제**
A가 되려면 어떤 조건(B)가 선행되어야 하는가?	A를 작도하기 위해 필요한 도형 찾기(B)	A를 만족하는 답 구하기(B)	A로부터 유도될 수 있는 명제 도출(B)
…	…	…	…
충분조건 찾기	필요조건 찾기		

① 찾고 있는 것이 마치 존재하고 참인 것처럼 가정한 다음 잇따른 결과를 찾아 그들 또한 마치 참이며, 우리의 가정에 의해서 확립된 것처럼 여기고 거쳐서 인정된 것에 이른다.

㉠ 인정된 것이 참이면 찾고 있는 것도 또한 참이며, 증명은 분석과 역순으로 대응한다.

㉡ 우리가 명백히 거짓인 것으로 인정된 것에 이르면 찾고 있는 것 또한 거짓이다.

② 제의된 것을 마치 알고 있는 것처럼 가정한 다음 그 잇따른 결과를 참일 것으로 여기고 거쳐서 인정된 것까지 이른다.

㉠ 만일 인정된 것이 가능하고 얻을 수 있다면, 곧 수학자들이 주어진 것이라고 부르는 것이라면, 원래 제안된 것도 가능할 것이며 증명은 또한 분석과 역순으로 대응할 것이다.

㉡ 우리가 명백히 불가능한 것에 이르면 문제도 또한 불가능할 것이다.

> [참고] Pappus[23)]의 분석법[24)]
> … 우리는 찾고 있는 것을 마치 이미 이루어진 것처럼 가정하고, 이것이 결과되는 것이 무엇인지를 찾고, 다시 후자의 선행하는 원인이 무엇인지를 찾는 식으로 우리의 발자취를 되밟아 이미 알려져 있는 것이나 제 1 원리의 부류에 속하는 것에 이를 때까지 계속하기 때문이며, 우리는 그러한 방법을 분석 또는 거꾸로 풀이하는 것이라고 부른다. 그러나 종합에서는 그 과정을 뒤집어 분석에서 마지막에 도달한 것을 이미 이루어진 것으로 여기고 앞에서 선행자이었던 것을 결과로 자연스러운 순서로 배열하고 그들을 차례로 잇달아 연결함으로써 마지막에 찾고 있는 것의 구성에 이르는데, 이것을 우리는 종합이라고 부른다.

③ 위의 기술을 요약하자면,

분석법	종합법
구하거나 증명하고자 하는 것을 이미 구하거나 증명한 것처럼 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하고, 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속하여, 이미 알고 있는 명제에 도달하는 과정	분석의 과정을 거꾸로 하여 분석에서 마지막에 도달한 지점, 곧 이미 알려져 있거나 참인 것으로 가정한 명제로부터 출발하여 분석 과정을 거꾸로 되밟아 감으로써, 마지막에 요구하는 명제에 도달하는 과정
풀이 계획을 발견하는 과정	그 계획을 실행하는 과정

2.2. 분석-종합법 적용 사례[25)]

1) 명제의 증명에서의 분석-종합법

① 기하에서 명제의 증명 방법을 발견하고자 하는 경우, 결론이 증명되었다고 가정하고 그 선행조건인 충분조건을 찾아간다. 그 결과 원 명제의 조건에 도달하게 된다(분석). 이제 조건으로부터 논리적으로 추론의 도움을 받아 결론으로 나아가는 일련의 관계를 구성해야 한다(종합).

(예) 「모든 삼각형에는 내접원이 하나 존재함을 증명하여라.」

---

23) 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람으로 기원전 3세기경의 그리스 수학자이다.

24) 수학적 발견술 가운데 가장 강력하면서 가장 오래 전부터 사용되어 온 방법으로 기원전 6세기경에 Pythagoras 학파의 수학자들에 의해 사용되었으며 Platon에 의해 그 중요성이 강조되었다고 하는데, 『Euclid 원론』에는 분석법의 가치를 높게 평가하여 그것을 소중한 비밀로 간직하기를 원했기에(Lakatos, 1978) 분석의 과정은 나오지 않고 종합의 과정인 증명만이 기술되어 있다고 한다.

25) 『수학 학습-지도 원리와 방법(2000)』, 우정호 저, P.45~54 참고.

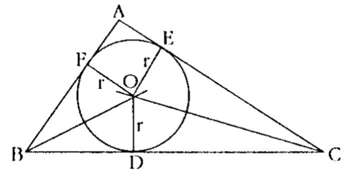
[분석과정]

(a) 삼각형 ABC의 내접원이 존재한다

(b) 삼각형 ABC의 각 변에 접하는 원이 존재한다

(c) 삼각형 ABC의 각 변으로부터 같은 거리에 있는 한 점 r이 존재한다

(d) 각 A의 이등분선 위의 모든 점은 변 AB, AC

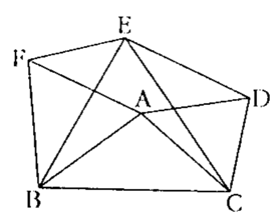


부터 같은 거리에 있다. 각 C의 이등분선 위의 모든 점은 변 CB, CA로부터 같은 거리에 있다. 각 A와 각 C의 이등분선은 서로 교차하며, 그 교점은 변 AB, AC, CB로부터 같은 거리에 있다.

⇒ 분석과정은 '(a)가 유도되는 관계 (b)를 찾은 다음 (b)가 유도되는 관계 (c)를 찾고, 마지막으로 (c)가 유도되는 관계 (d)를 찾는다. 그런데 관계 (a), (b), (c)는 동치이다. 관계 (c)가 타당하려면 관계 (d)가 타당하면 충분하다.'로 정리될 수 있다.

[종합과정]

각의 이등분선은 그 두 변으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취이므로, 각 A의 이등분선은 그 변 AB, AC로부터 같은 거리에 있는 모든 점으로 이루어지며, 각 C의 이등분선은 변 CB, CA로부터 같은 거리에 있는 모든 점으로 이루어진다. 그리고 이들 두 각의 이등분선은 점 O에서 만난다. 따라서 점 O는 삼각형 ABC의 모든 변으로부터 같은 거리에 있다. 곧 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$, $\overline{OE}\perp\overline{AC}$, $\overline{OF}\perp\overline{AB}$이고, $\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$이다. 중심이 O, 반지름이 OD인 원을 그리면, 반지름의 끝점에서 그은 반지름에 수직인 직선은 그 원에 접한다는 정리에 의해, 삼각형 ABC의 각 변에 접하는 원 곧 내접원을 얻는다.

(예)「오른쪽 그림과 같이 임의의 삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정삼각형을 그리고 그 각 꼭짓점을 각각 D, E, F라고 할 때, 사각형 $ADEF$는 평행사변형임을 증명하여라」	

[분석과정]

(a) 사각형 $ADEF$가 평행사변형이라고 가정하자

(b) 사각형 $ADEF$가 평행사변형이 되기 위한 충분(선행)조건은

$\overline{AF}=\overline{DE}$, $\overline{AD}=\overline{EF}$이다.

(c) $\overline{AF}=\overline{DE}$이기 위한 충분(선행)조건은, $\overline{AF}=\overline{AB}$이므로

$\triangle ABC\equiv\triangle DEC$

(d) $\triangle ABC\equiv\triangle DEC$이기 위한 충분(선행)조건은

$\overline{BC}=\overline{CE}$, $\overline{CA}=\overline{CD}, \angle DCE=\angle ACB$

(e) $\overline{BC}=\overline{CE}$, $\overline{CA}=\overline{CD}$는 주어진 조건에 의해 성립하며, $\angle ACD=\angle ECB=60°$이고 $\angle ECA$는 공통이므로 $\angle DCE=\angle ACB$이다. 따라서 이 명제는 참이다.

(f) $\overline{AD}=\overline{EF}$에 대해서도 마찬가지 방법으로 생각해 볼 수 있다.

[종합과정] 분석과정을 거꾸로 되밟아 결론에 도달하는 방법이 증명이다.

주어진 조건에 의해

$\overline{BC}=\overline{CE}$, $\overline{CA}=\overline{CD}$

$\angle ACD=\angle ECB=60°$이고 $\angle ECA$는 공통이므로

$\angle DCE=\angle ACB$

따라서 삼각형의 합동조건(SAS 합동조건)에 의해

$\triangle ABC\equiv\triangle DEC$

$\therefore \overline{AF}=\overline{DE}$

마찬가지 방법으로

$\therefore \overline{AD}=\overline{EF}$

따라서 사각형 $ADEF$는 평행사변형이다.

2) 작도 문제에서의 분석-종합법

주어진 성질 α 를 갖는 도형 F를 작도하는 문제를 해결하기 위한 분석은, 도형 F를 작도하기 위하여 도형 F'를 작도하는 것이 필요하도록, 도형 F에 의해서 완전히 결정되는 성질 α' 를 갖는 도형 F'를 찾는 것이다. 그리고 종합은 분석을 통하여 발견된 성질 x'를 갖는 도형 F′을 작도하여 이를 바탕으로 x를 갖는 도형 F를 작도하는 것이다.

(예) 빗변의 길이 a와 그 내접원의 반지름 r이 주어졌을 때 직각삼각형을 작도하여라.

[분석과정]

(a) 우선 미지인 삼각형이 작도되었다고 가정한다. 따라서 그 삼각형은 $BC=a$이고 O가 내접원의 중심이고 $\overline{OD}=\overline{DE}=OF=r$인 삼각형 ABC라고 하자.

(b) 삼각형 BOC에서 $\overline{BC}=a$, 높이 $OD=r$, $\angle BOC=180°-\frac{B+C}{2}=180°-45°=135°$ 이다.

(c) $\angle A$, a, r로부터 삼각형 ABC를 작도하는 문제는 꼭지각 BOC, 밑변 a, 높이 r로부터 삼각형 BOC를 작도하는 문제가 된다.

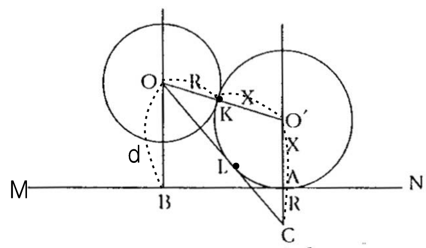
[종합과정]

밑변이 a이고 높이가 r이며 각 O가 $135°$ 인 삼각형 BOC를 작도하고, 반직선 BO, CO와 각각 $\angle OBC$, $\angle OCB$와 같은 각을 이루도록 반직선 BA, CA를 긋고 만나는 점을 A라고 하면 구하는 삼각형 ABC를 얻는다. 실제로

$\angle OBC+\angle OCB=45°, \angle ABC+\angle ACB=2(\angle OBC+\angle OCB)=90°$

이므로 두 반직선 BA, CA는 만나서 직각을 이룬다. 그리고 점 O는 삼각형 ABC의 $\angle B$, $\angle C$의 이등분선 BO, CO의 교점, 곧 내접원의 중심이다. 삼각형 BOC의 높이 DO는 삼각형 ABC의 내접원의 반지름이며 정확히 r과 같다.

(예) 반지름 R인 원과 이 원의 중심 O로부터의 거리가 d인 직선 MN이 주어졌을 때 원 O와 접하고 직선 MN과 주어진 점 A에 접하는 원을 작도하여라



[분석과정]

(a) 미지인 원이 작도되었다고 가정하자. 즉, 그림과 같이 그 원의 중심은 O'이고 점 K에서 원 O에 접하고 주어진 점 A에서 직선 MN에 접한다고 하자.

(b) 그림을 잘 살펴보면 구하는 원의 중심 O'는 점 A에서 직선 MN에 그은 수선 AC 위에 있다. 그리고 중심 O'는 O로부터 주어진 원의 반지름 R과 구하는 원의 반지름 X의 합과 같은 거리에 있다. 그리고 A로부터 거리 X만큼 떨어져 있다. 따라서 선분 AC를 수선 AC 위에 반지름 R과 같게 잡으면 중심 O'는 점O, C로부터 같은 거리에 있으며, 선분 OC의 중심 L에서 그은 수선 LO' 위에 있다. 따라서 구하는 원의 중심 O'는

ⓐ 점 A에서 직선 MN에 세운 수선 AC 위에 있다.

ⓑ 점 O와 C로부터 같은 거리에 있다. 따라서 선분 OC의 중심 L에 세운 수선 LO' 위에 있다.

ⓒ 수선 AC와 LO'의 교점이다.

이로부터 구하는 원의 중심을 작도하려면 수선 AC와 LO'를 작도해야 된다는 결론을 내릴 수 있다.

[종합과정]

$\overline{O'C} = \overline{OO'}$이므로 $\overline{O'A} + R = \overline{O'K} + R$이다. 따라서 $\overline{O'A} = \overline{O'K}$, 곧 중심이 O'이고 반지름이 $\overline{O'A}$인 원은 점 K를 지나므로 K는 원 O, O'의 공통점이며 중심선 $\overline{OO'}$ 위에 있으므로 그 접점이다. 직선 MN은 반지름 $O'A$의 끝점 A를 지나며 그에 수직이므로 원 O'에 접한다. (이러한 증명은 분석에서 미지인 도형을 작도하는 데 필요한 것으로 드러난 조건인 동시에 충분조건임을 보여준다.)

3) 방정식 풀이에서의 분석–종합법

[Descartes의 방정식 풀이의 규칙 4가지]

① 우선 문제를 잘 이해한 다음에 문제를 어떤 미지인 양, 곧 수를 결정하는 문제로 환원하여라.

② 문제가 풀렸다고 보고 조건에 따라서 미지인 것과 자료 사이에 성립하여야 할 모든 관계를 적절한 순서로 그려보면서 문제를 아주 자연스럽게 개관하여라.

③ 같은 양을 두 가지 방법으로 나타낼 수 있도록, 조건의 일부분을 분리하여 미지인 것 사이에 성립하는 방정식을 얻도록 하라. 결국, 조건을 여러 부분으로 쪼개어 미지인 것의 개수만큼의 방정식으로 이루어진 연립방정식을 얻게 된다.

④ 연립방정식을 한 방정식으로 환원하여라.

방정식은 미지수의 값에 따라 참인 명제도 되고 거짓인 명제도 되는 명제 함수이다. 그런데 방정식을 풀 때에는 그 방정식이 이미 풀린 것으로 가정하고 등식의 성질을 이용하여 방정식을 변형하여 해이기 위한 필요조건을 찾아 푸는 것이다.

(예) 연못에 펌프 2대가 설치되어 있다. 첫 번째 펌프는 물을 연못에 퍼 올리고 두 번째 펌프는 같은 양의 물을 연못에서 퍼내는 데 h시간이 더 걸린다. 두 펌프가 함께 가동하면 연못은 a시간 동안에 채워진다. 첫 번째 펌프로 연못을 채우려면 얼마나 걸리겠는가?

[분석과정]

(a) 먼저 주어진 문제의 미지인 시간 x가 존재한다고 가정하고, 조건에 따라 같은 양을 두 가지로 나타내도록 해야 한다.

(b) 연못에 들어갈 수 있는 물 전체의 양을 g라고 하면, 첫 번째 펌프로 물이 퍼올려지는 비율은 시간당 $\frac{g}{x}$이고 a시간 동안에 퍼올리는 양은 $\frac{g}{x}a$이다. 그리고 두 번째 펌프로 물을 퍼내는 비율은 시간당 $\frac{g}{x+h}$이고 a시간 동안에 퍼내는 양은 $\frac{g}{x+h}a$이다.

(c) 두 펌프가 동시에 가동하면 a시간 동안에 연못에 물이 가득 차므로 연못의 물의 양은 다음과 같이 두 가지로 나타내어진다.

$$\frac{g}{x}a-\frac{g}{x+h}a=g$$

(d) 이 방정식을 정리하면

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{x+h}=1$$

(e) x가 위의 방정식을 만족한다는 것은 해인 x가 존재하기 위한 필요조건이다. 다시 말하면 오직 이 방정식의 근인 미지인 값만이 문제의 해답이 될 수 있다. 그러나 x가 위의 방정식을 만족한다는 것이 문제의 해가 되기 위한 충분조건은 아니다. 따라서 위의 방정식을 푼 후에 그 근 가운데 어떤 것이 문제의 해답이 될 수도 있고 어떤 근도 해답이 될 수 없을 수도 있다는 것, 따라서 문제는 해를 갖지 않을 수도 있다는 것을 납득해야 한다. 우리가 그 존재성을 가정한 미지인 값 x에 대해 주의 깊게 생각해 보면 x는 또 하나의 관계

$$0 < x < a$$

를 만족함을 쉽게 알 수 있으며, 이는 문제의 해가 될 x가 존재하기 위한 또 하나의 필요조건이다. 그런데 $x > 0$이면 위의 방정식에서 $\frac{a}{x}=\frac{a}{x+h}+1$이므로 $\frac{a}{x} > 1$, 곧 $a > x$이다. 따라서 문제의 해가 될 미지인 양 x의 값이 하나 존재하기 위한 필요조건은

$$\frac{a}{x}-\frac{a}{x+h}=1,\ x > 0$$

이다.

(f) 필요조건인 위의 방정식을 풀면 그와 동치인 방정식

$$x=\frac{\sqrt{h^2+4ah}-h}{2}$$

을 얻는다.

[종합과정]

x가 $x=\frac{\sqrt{h^2+4ah}-h}{2}$인 값을 갖는 조건은 동시에 문제의 해가 되기 위한 충분조건이기도 하다. 따라서 이 x의 값은 구하는 문제의 해가 된다.

(예) 다음 분수방정식을 풀어라.

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}-1=0$$

[분석과정]

(a) 먼저 이 방정식이 풀렸다고 본다. 곧 이 방정식이 등식이라고 생각한다.

(b) 등식의 성질에 따라 양변에 분모의 최소공배수 x^2-1을 곱하면

$2-(x+1)-(x^2-1)=0$

(c) 이 방정식을 정리하면

$x^2+x-2=0$

(d) 이 방정식을 풀면

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2$

이는 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.

[종합과정]

그런데 $x=1$은 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하므로 해가 될 수 없으며, $x=-2$는 주어진 방정식을 만족한다. 곧 $x=-2$는 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요충분조건이다. 따라서 주어진 분수방정식의 해는 $x=-2$이다.

> 일차방정식과 이차방정식의 풀이과정이나 Euclid기하에 나오는 대부분의 정리의 증명에서처럼 모든 유도과정이 가역적일 때 곧 필요충분조건에 의한 추론이 이루어지는 경우에는 위의 분석과정과 종합과정이 일치한다.

2.3. 학교수학과 분석–종합법

① 현행 중 · 고등학교 수학교과서에는 명제의 증명이나 작도의 풀이 및 방정식의 풀이에서 명시적으로 분석과정을 다루고 있지 않다.

② '새 수학' 이전의 고등학교 수학의 논증기하 부분에는 명제의 증명에 앞서 분석과정이 '음미'란 이름으로 다루어졌으나 '새 수학' 이후 이 부분이 완전히 사라졌다.

③ 수학교사는 '사고교육'과 문제해결교육, 발견술 등의 변화에 발을 맞추어 학교수학에 분석 과정을 복귀시키도록 노력해야할 것이다.

2.4. 분석–종합법 활용의 의의

① 수학에 대한 인식 변화

모든 수학적 지식이 이미 존재하는 결과물로 단순히 전달되거나 전수된 지식이 아닌 누군가에 의해 발견되고 논의되고 계속적으로 연구된 결과임을 알게 된다.

② 동기유발

모든 문제는 해결될 수 있는 과정이 있음을 학생 스스로 인식하고 문제해결에 동기유발을 얻게 되며, 스스로 문제를 해결하려고 노력한다.

③ 발견적 사고 확장

스스로 수학적 문제를 해결하거나 수학적 지식을 이해하려는 노력을 함으로써 능동적인 사고를 기르게 된다.

3. 역사 발생적 원리

3.1. 학교 수학교육의 현실과 역사 발생적 원리

① 논리적·형식적으로 전개된 결과로써의 지식 체계를 가르치는 형식적인 수학교육이 이루어지고 있으며 그 결과, 학생들은 진정한 수학을 알지 못하고 피상적인 수학만을 공부하게 되고 수학 학습에 있어서 흥미와 활력을 잃어 버려 마치 수학을 골동품처럼 생각하고 있다.

② 형식적인 수학교육이 가진 학습의 결함을 반성하고 이를 극복하기 위하여 수학의 발달과정에 따라 수학의 개념을 폭 넓게 이해할 수 있도록 교재를 재구성하는 학습지도방법이 역사 발생적 원리이다.

③ 역사 발생적 원리는 수학을 완성된 생산품으로써가 아니라 역사적 발생과정 곧, '수학화' 과정을 되밟게 함으로써 바르게 이해하고 적용할 수 있다는 생각을 바탕으로 출발하였다.

④ 역사 발생적 원리의 인식론적 바탕은 개체발생이 계통발생을 단축된 형태로 반복한다는 생물학적 원리 곧, 다윈주의자인 Haeckel이 제기한 '재현의 원리'이다. 곧, 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사 자체를 따르며 따라서 개인의 지식교육은 인류의 지식발생과 같은 코스를 따라야 한다는 것이다.

⑤ 수학교사는 인류의 대역적인 학습과정 곧, 수학의 역사에 대한 지식을 습득해야 한다.

⑥ 학생들은 역사 발생적 원리를 활용한 수업을 통해 수학은 인류의 끊임없는 상상과 창조의 노력으로 이루어 진 것이라고 생각하게 되며 학생들이 스스로 개념들을 만들고 구성해 볼 수 있는 창의적이고 역동적인 학습 분위기를 연출할 수 있게 된다.

[정의] 역사 발생적 원리란 수학의 역사적 발달 과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재구성하여 학생들이 수학화 과정을 재발명할 수 있도록 하려는 교재구성 원리이다.

3.2. 역사 발생적 원리의 초기 발달사

르네상스 이후 수학이 발전하고 변화하면서 기하학의 교과서로서 《유클리드 원론》은 교육학적 측면에서 비판을 받기 시작하였다.

1) 프랑스 클레로의 「기하학의 원론(1741)」

① 프랑스의 클레로는 최초로 수학의 역사 발달에 의한 역사 발생적 원리를 활용한 기하학의 교과서인 《기하학의 원론(1741)》을 저술하였다.

② 기하학을 역사적인 순서에 따라 기하학의 이론을 연구하여 발견된 동기와 방법을 접하게 함으로써 창의적인 발견적 사고력을 가질 수 있도록 하기 위해서 쓰여 졌다.

③ 클레로는 자명한 정의, 공리, 명제 등을 일일이 쓰지 않았다. 그는 "간단한 상식으로 즉시 알 수 있는 것을 일일이 추론해 간다는 것은 오늘날에는 시간낭비에 지나지 않는다. 그것은 진리를 알 수 없게 만들고 독자로 하여금 싫증나게 할 따름이다"라고 했다.

④ 기하학의 이론을 실생활에 응용한 예를 들어 무미건조함을 극복하려고 노력하였다. 그의 이러한 저술의 노력은 '역사 발생적 원리'라 불리게 되었다.

2) 19세기 린드너(Lindner)의 발생적 수학교육의 원리

① 발생적 수학교육의 원리는 19세기에 린드너(Lindner)에 의해서 역사 발생적 원리로 정의되었다. 그의 정의는 "소재를 자연스런 순서에 따라 다루어서, 단순한 것으로부터 합성된 것으로, 원인으로부터 결과에, …, 쉬운 것에서부터 어려운 것으로 나아가되 하나하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것이다"라고 했다.

② 린드너는 개인의 수학적 사고 발달과 지식교육은 인류의 지식 발달과 같은 과정을 따라야 한다고 주장했다.

3) 20세기 초의 수학교육 근대화 운동

① 수학교육 근대화 운동의 선구자인 페리(Perry, 1901)는 유클리드의 엄정한 기하학 교육에서 탈피하고 진정한 수학교육이 이루어져야 국가가 번영할 수 있다고 주장했다.

② 클라인(Klein)은 "≪유클리드 원론≫은 아동을 위해서 쓴 것이 아니고 성인을 위해서 쓴 것이다"라고 하면서 수학교육은 아동의 심리에 적합하도록 해야 한다고 주장했다. 그는 연설에서 "소년의 자연적인 소질과 연결시켜 인류 전체가 그 순진한 원시 상태로부터 보다 높은 인식에 다다른 그 길을 따라 천천히 높은 곳으로, 마지막에 추상적인 형식화에 이르러야 한다. …. 모든 수학적 개념이 처음에 얼마나 더디게 발생했으며, 그것은 처음에는 거의 항상 예언적인 형태로 나타나 오랜 발전을 거친 후 비로소 굳건한 결정 형태의 체계적 표현을 취하는가를 알게 될 것이다"라고 했다.

③ 푸앵카레(Poincare)는 동물의 태아의 형성과정에서 진화의 역사를 보여주는 것처럼, 인간의 정신 발달도 조상이 거쳐 온 과정을 빠르게 통과할 때 학생을 잘 지도할 수 있다고 보았다.

4) 토에플리츠(Toeplitz)

① 토에플리츠는 "창조되던 당시에는 불타는 의문에 대한 해답이었음에 틀림없다. 우리가 이들의 사고의 근원으로 되돌아간다면 틀에 박힌 무미건조한 사실로 활기 없는 형태는 없어지고 생생하고 힘찬 생명이 되살아날 것이다"라 했다.
② 수학의 문제와 개념의 발생에서 결정적인 계기를 극화하거나 학습의 자료로 활용하여야 한다고 주장했다.

5) 20세기의 역사 발생적 원리

① 프로이덴탈(H. Freudental), 라카토스(I. Lakatos), 폴리아(G. Polya) 등에 의해서 연구되고 주장되었다.
② 수학교육자 폴리아와 프로이덴탈은 수학은 체계적이고 연역적인 발생상태의 수학과, 창조되고 구성되어 발명 중에 있는 수학으로 나누고, 발명되던 그 방식 그대로 다시 한 번 재발명 과정을 수학지도에서 보여주고 학생들 자신이 스스로 재발명 하도록 도와줄 때 가장 잘 배울 수 있다고 보았다.

3.3. 역사 발생적 원리의 재부각과 필요성

① 1960년대 새수학 운동[26]의 결과로는 영재교육에 관심이 많아지고 수학교육의 내용이

---

26) 새수학 운동.
① 수학의 완전한 구성을 위해 힐베르트(Hilbert)가 『기하학 기초론, (1899)』을 완성한 후, 공리적 방법이 강화되었고, 그의 영향을 받은 프랑스의 부르바키(bourbaki) 학파의 구조주의 철학이 형식적 추상수학에 영향을 주게 되었다.
② 형식주의적 수학은 피아제(Piaget), 가네(Gagne) 그리고 부르너(Brunner)의 교육학적인 이론으로 수학교육에 적용하게 되었다. 교육학자들은 인지발달이론, 완전학습법 그리고 부르너는 지식의 구조이론과 발견 학습법으로 나선형 방식의 교재 배열 등의 이론을 연구하였다.
[J. Bruner] 지식의 구조를 학습한다는 것은 그 지식을 이해, 기억, 적용할 수 있도록 학습하는 것을 의미하고, 구조를 파악하면 이해가 잘되고, 기억하기 쉽고, 전이효과가 있고, 고등지식과 초보적 지식 사이의 간격을 좁혀준다. 따라서 학문의 구조가 되는 기본원리들을 가르쳐야 한다.
③ 나선형 교육과정은 각 학문분야에서 가르쳐야할 기본개념은 많지 않은 것으로 가정하고 기본구조의 점진적, 위계적, 반복적인 학습을 강조하고 있다.
④ 새수학 운동은 진보적 학문주의로 모든 사람에게 문제를 해결할 수 있는 능력이 있다고 생각하며, 각 개인의 능력을 찾아내어 개발할 수 있다고 본다. 수학교육은 행동에 의한 수학지식의 획득과정으로는 먼저 구체적으로 행동할 수

풍부해지고 교수법이 개발되며 일부 우수한 학생들의 학업성취도가 높아졌다. 그러나 많은 학생들의 계산능력이 떨어지고 성적이 하락하여 실패하였다는 평가와 비판을 받게 되었다. 결국 〈새수학 운동〉의 반성으로 〈기초로 돌아가기 운동(Back to Basics)〉이 나왔고, 발생적 원리의 활용이 부각되었다.

② 학생들에게 수학에 관한 인식을 바꿔주기 위해 수학에 관한 재미있는 그림이나 호기심을 자극할 수 있는 것을 보여주고 생각하는 게기를 마련해 주어야 한다. 거시적인 수학과 수학의 역사 등 수학과 관련된 책들을 읽도록 한다면 수학의 역사가 인간이 축적해 온 문화의 역사이므로 수학의 중요성을 인식하게 된다.

3.4. 역사 발생적 원리의 활용

수학은 오랜 역사를 통해 많은 수학자들에 의해 창조되어 왔으며 직관적인 추측으로 이론들을 만들어 증명하고, 검토와 검증의 과정을 거쳐 수학적 이론들이 체계적으로 정리되어져 왔고, 또한 지금도 그렇게 창안되고 있다. 수학의 역사를 뒤돌아보면 수학의 발견과 창조는 인류의 삶과 상상 속에서 태어났으며 인간의 삶에 영향을 주고받으면서 변화하고 확대되어 왔다.

[참고] 역사 발생적 원리를 이용하기 위해 수학적 개념의 발생과 이론들이 확장되고 발달하는 과정을 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 교육재료를 재구성해야 한다. 이때 학습 방법적인 면에서는 소크라테스의 발견학습법을 적극적으로 활용하는 구성주의 수학교육이 되어야 한다.

(예) 수와 자연수의 발달, 기하학의 역사와 변환으로의 기하, 미분적분의 역사, 확률과 통계의 역사, 방정식의 역사, 해석기하학의 역사 등

있는 학습목표를 제시하고, 다음 학습내용의 단계와 순서별로 나선적(螺線的) 배열로 논리적 체계를 구성하여 학습자료를 만들어 수학의 추상성과 구조성을 이해하도록 하고, 기억하여 적용하도록 한다.

⑤ 학생들에게 의욕과 흥미를 위하여 다양한 학습방법의 기법과 전략을 개발하고, 교육보조재료를 적극 활용하고 피드백을 통한 학습평가와 행동변화를 관찰함으로써 학습내용과 지도방법을 고쳐나갈 수 있다. 이러한 수학지식의 획득과정으로 학생들은 수학적 기본개념과 지식을 전수 받아 반복적인 연습과 창의적 활동을 통해서 수학적 지식을 획득하고 만들 수 있다는 관점이다.

⑥ 그러나 이러한 과정에 의한 수학지식의 획득과정은 교사의 입장을 강조하고 학습자 각 개인의 입장을 간과한 외형적이고 관찰 가능한 교육으로 많은 한계점과 반성이 필요함이 지적 되었다.

⑦ 새수학 운동의 결과로 현대화를 위한 실험교과서를 출판하여 학문중심교육을 실시하게 되었다. 교과서는 집합개념과 수학의 구조, 논리적 엄밀성, 발견적 학습, 나선식배열 등 학문중심교육으로 통합화와 구조화를 강조하였으며 수학의 내용이 추상화와 일반화가 되어 학생들에게 수학이 어렵다는 인상을 주었다.

1) 함수의 지도

[참고] 프로이덴탈: 구체적인 자연과 사회현상의 변화로부터 함수를 발견할 수 있도록 하여 점진적인 수학화 과정을 재발명하도록 해야 한다.

㉠ 역사 발생적 원리에 따라 수학수업을 진행하려면, 수학적 지식을 완성된 결과가 아니라 수학화의 과정으로 다루어야 한다.

㉡ 함수의 발생 과정의 역사와 지도방법이 구체적으로 제시되어야 한다. 함수는 언제부터 어떻게 시작되었고, 어떻게 함수란 개념을 만들게 되었으며, 왜 함수라 불렀으며, 어떻게 사용되었고 현재는 어떻게 활용되고 있는지를 학생들의 호기심을 자극하며 학습을 진행하면 흥미 있는 수업이 되고, 학생들이 함수의 개념을 폭 넓게 이해하게 될 것이다.

㉢ 학생들이 경험할 수 있는 여러 현상에서 함수관계의 구체적인 예를 찾아서 제시하여 현실 속에 함수가 얼마든지 있음을 보여준다. 그리고 변화하는 두 양 사이의 관계를 조사하고 발표하도록 한다. 다음으로 함수의 역사 발생적 이야기를 활용하여 종속관계에서 함수의 그래프와 집합 사이의 대응관계로 점진적인 수학화 과정을 보여준다.

① 비례관계의 단계

㉠ 함수개념의 시작은 물건 개수 세기를 시작하면서 일대일 대응을 생각하고 이에 적합한 숫자를 표시하면서부터였다. 고대 바빌로니아의 천문학 연구에서 별들의 운동에서 주기성을 발견하고 기록한 수표가 있다. 그리스인들도 천체의 운동을 삼각함수로 표현하였다.

(예) 일정하게 흐르는 수돗물의 양과 시간과의 관계를 조사해 본다. 매일 천 원씩 한 달 동안 저금했을 때 날짜와 저금액과의 관계를 조사해 보자. 그래프를 그려서 생각해 본다. 3월 1일부터 그 날의 천 원짜리의 지폐를 숫자의 2배를 한 달 동안 저금하려고 한다. 날짜와 저금의 양은 관계를 가지나?

(예) 길이가 20cm인 양초에 불을 켜고 한 시간이 지나자 양초의 길이가 0cm가 되었다. 시간과 양초의 길이의 관계를 조사하고, 그래프를 그려서 조사하여 보자.

㉡ 르네상스 시대 이후 수학은 학문의 발전과 함께 빠르게 변하였다. 방정식의 풀이과정에서 수 개념의 확장, 기호의 발전, 좌표의 활용으로 해석기하학의 발전과 천문학의 혁명으로 운동역학의 연구 등 서양과학은 과학혁명을 이루었다. 계속 미분적분학의 발견으로 미분방정식과 해석학이 급속히 발전하였다.

② 종속관계의 단계와 함수의 종속적 정의

수학의 발전과 더불어 함수개념의 외연은 확장되었고 그 내포 또한 변화되었다.

㉠ 함수란 용어는 라이프니츠와 베르누이가 편지를 주고받으면서 처음으로 사용하였다. 라이프니츠(Leibniz)는 1692년 처음으로 "접선은 곡선의 함수(function)이다"라고 했다. 그 후 오일러(Euler)는 "해석학은 변수와 이들 함수사이의 과학이다"라고 하며 함수를 f로 표시하였다. 그는 함수를 "변량의 함수는 변량이나 수, 일정량들 사이의 관계 혹은 규칙을 나타내는 해석적 표현이다(1748)"라고 했다. 그 후 그는 함수를 해석적 표현을 사용하지 않고 종속관계로 함수를 정의하기에 이르렀다(1755).

㉡ 우리의 삶 속에서 변화하는 두 양의 관계들을 조사할 수 있다. 이러한 관계들을 그림이나 그래프를 그려서 설명한다.

(예) 승강기의 상승시간과 층수 높이의 관계, 흐르는 수돗물의 양과 시간과의 관계, 하루의 기온변화와 시간과의 관계, 물건의 값과 물건의 양과의 관계, 톱니바퀴 회전수, 높이에 따른 기온 변화, 퀴즈문제를 풀면 상금이 2배로 늘어나는 경기에서 문제 수와 상금과의 관계, 미생물이 일정시간 동안 2배로 번식될 때 시간과 미생물 수의 관계 등.

㉢ 물체의 운동을 연구하면서 함수의 개념화가 시작되었고, 이때 양의 가변성과 종속성이 함수관계로 표현되었다.

(예) 공을 공중에 던졌을 때 시간에 따라 높이가 어떻게 변화하는지 눈금이 있는 종이에 기록해 본다. 그리고 시간과 공의 높이의 관계를 그림으로 그려본다.

㉣ 18세기 후반 편미분 방정식과 푸리에 급수 등 수학의 발전으로 코시(Cauchy)는 독립변량의 값에 따라 정해지는 대응관계의 종속변량을 함수라 생각하게 되었다. 이때 어떤 대응이든지 상관없다.

③ 대응관계 단계와 함수의 대응적 정의

㉠ 19세기 초에 디리클레(Dirichlet)는 대응으로서의 엄밀한 함수를 정의하였다. 그는 식으로 나타낼 수 없는 함수관계도 발견하였다. 예를 들면 실수 위에서 무리수는 0에, 유리수는 1에 대응하는 대응관계로 정의하면 함수가 된다.

㉡ 고등학교 수학교과서(제7차)의 함수의 정의

"두 집합 X, Y 에 대하여 X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응될 때, 이 대응 f 를 X 에서 Y 로의 함수라 한다."

2) 로그의 지도

① 로그(logarithm)는 네이피어(Napier)에 의해서 발명(1614)되었다.

② 로그의 용어는 그리스어의 Logos(比)와 Arithmos(수)의 복합어이다.

③ 로그의 이론적 기초는 그리스의 아르키메데스로부터 시작된다. 그는 지수의 공식을 설명하고 다루었다. 오렘(Oresme)은 등비급수와 등차급수의 비교로 분수지수의 개념을 일반화하였다. 슈티펠(Stifel)의 〈산술총서, 1544〉에서 등차수열에서 덧셈이 등비수열의 곱셈에 대응한다는 이점을 지적하였다. 등비수열의 항이 지수로 표현이 되며 분수의 지수와 음의 지수를 도입하였다.

④ 그 후 계산을 간단히 하기 위해서 지수와 어떤 수에 대한 거듭 제곱의 수열을 대비한 수표를 작성하였다. 스테빈의 복리계산표, 뷔르기는 등차 및 등비수열의 수표를 만들어 케플러의 천문계산을 도와주었다.

⑤ 네이피어의 로그의 발견은 삼각함수의 곱의 공식에서 착상하여 기하학적으로 얻은 계산에서 곱셈을 덧셈으로 바꿀 수 있는 계산을 생각해 낸 것이다. 이듬해(1615)에 브리그즈(Briggs)는 네이피어와 함께 상용로그를 만들었다. 그 후 브리그즈는 상용로그표를 출판하였다.

⑥ 그 당시 천문학, 항해, 무역, 전쟁 등에서 수치계산이 좀 더 빠르고 정확하게 수행되어야 하는 분야가 많아졌다. 이러한 계산의 필요성에 따른 로그의 창안으로 로그를 활발히 연구하게 되었다.

⑦ 라플라스(Laplace)는 "로그의 발명으로 일거리가 줄어서 천문학자의 수명이 배로 연장되었다"라고 말했던 것처럼 아주 중요한 수학적 성과였다.

⑧ 자연로그가 최초에 나타난 것은 네이피어의 〈Descriptio, 1618〉의 부록이고 보간법의 설명이 있었다. 스페이델은 〈새로운 로그, 1622〉에서 1에서 1000까지 수의 자연로그의 수표를 발표했다.

㉠ 지수함수의 단계

학생들에게 구체적인 지수함수의 수열을 제시한다.

(예) 미생물의 한 마리가 1시간마다 분열하여 2배씩 불어난다면 시간과 미생물의 수를 수표로 만든다. 이 두 수열을 일반적으로 표현하면 (미생물 문제에서 a=2) 다음과 같다.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ a^0 & a^1 & a^2 & a^3 & \cdots & a^n & \cdots \end{matrix}$$

두 수열의 대응에서 등차수열의 항이 n 일 때 등비수열은 지수의 형태로 표현됨을 발견할 수 있다. 또한 등비수열의 곱은 등차수열의 합과 대응됨을 보여준다. 이러한 수열의 대응관계에서 $f(n)=a^n$ 라 놓으면 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$f(n)f(m)=a^n a^m=f(n+m)$$

$$\frac{f(n)}{f(m)}=\frac{a^n}{a^m}=f(n-m)$$

이 사실로 지수함수의 계산임을 알 수 있다. 이 식의 지수함수 계산에서 지수의 음수 계산은 나눗셈을 의미함을 보여준다. 또한 이 지수 함수의 정의역을 정수로 확장하면

$$\cdots\ -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2\quad 3\quad \cdots$$

$$\cdots\quad a^{-3}\quad a^{-2}\quad a^{-1}\quad a^0\quad a^1\quad a^2\quad a^3\quad \cdots$$

이다. 지수의 음수 계산과 분수 계산을 확장할 수 있음을 보여준다.

㉡ 로그함수의 단계

수학자 네이피어는 등차수열의 항을 등비수열의 대응되는 항의 로그(log)로 불러서 로그를 창안했다. 또한 로그의 용어의 유래를 설명한다. 앞에 있는 미생물 문제의 수열에서 앞과는 다르게 대응관계를 $l(a^n)=n$라 하면 다음 두 식을 얻을 수 있다.

$$l(a^n)+l(a^m)=n+m=l(a^n a^m)$$

$$l(a^n)-l(a^m)=n-m=l(a^n a^{-m})$$

이 두 식과 수열의 대응에서 곱셈을 덧셈으로 나눗셈을 뺄셈으로 바꾸어 계산할 수 있음을 보여준다. 이러한 함수는 로그함수가 된다. 기호로 나타내면,

$\log a^n=n$

로 쓸 수 있고 $a=2$일 때

$\log 2^1=1,\quad \log 16=\log 2^4=4,$

로 표현된다. 이것은 지수함수와 역관계가 있음을 발견하도록 한다.

㉢ 상용로그의 단계

일상생활에서 수의 계산은 십진법으로 하게 된다. 앞에서 a를 10으로 놓으면 계산이 편리해진다. 기호로 나타내면,

$\log 10^1=1,\quad \log 10000=\log 10^4=4,\quad \log 10^{-1}=-1,$

이다. 옛날에는 큰 수를 다루는 계산에서 이러한 상용로그를 사용하였다. 교과서의 부록에 있는 상용로그표를 보여준다.

㉣ 로그의 정의와 이론의 단계

로그를 정의하고 로그의 성질들을 이론적으로 발견하도록 한다. 그리고 로그함수를 학습한다.

㉤ 자연로그의 단계

자연로그는 이론적 연구에서 주로 쓰인다. 자연로그의 e는 극한값이지만 실제 생활에서 복리로 계산되는 예금의 원리합계에서 이율과 기간을 작게 나누면 어떤 값에 수렴함을 직관적으로 보여준다. 자연로그라는 용어는 자연세계에서 일어나는 변화를 설명할 수 있는 함수이기 때문에 붙여진 이름이다.

3) 구의 부피 구하기 지도

(1) 아르키메데스의 평형법(method of equilibrium)

① 아르키메데스는 좌표기하학의 아이디어와 당시 알려져 있던 원뿔과 원기둥의 부피 공식을 이용하여 구의 부피를 구했다.

② 중심이 $(r, 0)$이고, 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-r)^2+y^2=r^2,\ x^2+y^2=2rx\ \cdots$ ㉠

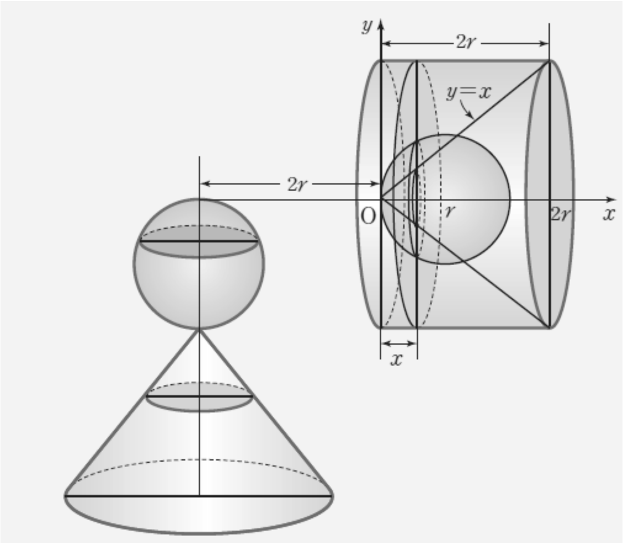
㉠의 양변에 π를 곱하면

$\pi x^2+\pi y^2=2\pi rx\ \cdots$ ㉡

㉡의 양변에 $2r$을 곱하면

$2r(\pi x^2+\pi y^2)=\pi(2r)^2x\ \cdots$ ㉢

지렛대의 원리에 따르면 지레를 중심으로 한 쪽에 무게 a인 물체가 지렛대로부터 x만큼 떨어진 거리에 있고, 또 다른 쪽에는 무게 b인 물체가 지렛대로부터 y만큼 떨어진 거리에 있을 때 $ax=by$가 성립한다. 이를 ㉢에 적용하면 중심으로부터 $2r$만큼 떨어진 위치에 반지름의 길이가 각각 x와 y인 원이 있고, 또 다른 편에는 중심으로부터 x만큼 떨어진 위치에 반지름의 길이가 $2r$인 원이 있으며, 양쪽은 균형을 이루고 있다. 그리고 오른쪽의 $\pi(2r)^2$은 원기둥의 단면의 넓이이고, πx^2과 πy^2은 각각 원뿔과 구의 단면의 넓이가 된다.



이제 x를 0에서 $2r$까지 변화시키면 단면 $\pi(2r)^2$, πx^2, πy^2은 각각 원기둥, 원뿔, 구를 채우게 된다. 당시 원기둥과 원뿔의 부피를 알고 있었으므로 구의 부피 V는 다음과 같다.

$2r\left\{\frac{1}{3}\pi\times(2r)^2\times 2r+V\right\}=r\pi\times(2r)^2\times 2r$ ⋯ ㉣

따라서 ㉣로부터 구의 부피 V는 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$이 된다.

(2) 카발리에리 원리에 따른 구의 부피 구하기

① 적분은 선(1차원)을 쌓아서 면(2차원)을 만드는 과정, 혹은 면(2차원)을 쌓아서 입체(3차원)를 만드는 과정이다.

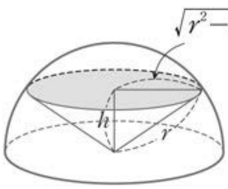
② 카발리에리의 불가분량법(method of indivisibles): 평면도형의 불가분량은 ‘현’이고, 입체도형의 불가분량은 입체도형을 절단한 ‘단면’이다.

(i) 한 쌍의 평행한 직선 사이에 두 평면도형이 있고, 이 직선과 평행한 임의의 직선에 의하여 잘려진 두 평면 도형의 선분이 항상 일정한 비율이면 두 평면도형의 넓이의 비율은 그 선분의 비율과 같다.

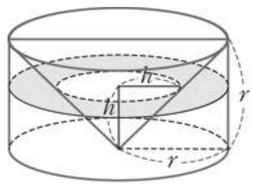
(ii) 한 쌍의 평행한 평면 사이에 두 입체도형이 있고, 이 평면과 평행한 임의의 평면에 의하여 잘려진 두 입체 도형의 넓이가 항상 일정한 비율이면 두 입체도형의 부피의 비율은 그 넓이의 비율과 같다.

③ 카발리에리의 원리 (ii)를 이용하면 구의 부피를 구할 수 있다.

㉠ 반지름의 길이가 r인 반구와 반지름의 길이가 r이고 높이가 r인 원기둥, 그리고 원기둥에서 밑면이 원기둥의 위쪽 밑면과 같고 꼭짓점이 원기둥의 아래쪽 밑면의 중심인 원뿔을 제거한 입체도형이 있다.



[그림 1]



[그림 2]

㉡ 두 입체도형이 동일한 평면 위에 놓여 있다고 하고 두 입체도형을 밑면과 평행하고 밑면으로부터 h만큼 떨어진 평면으로 잘라서 생긴 두 단면을 비교한다.

㉢ 반구의 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-h^2}$인 원의 내부이고, 다른 입체도형의 단면은 반지름의 길이가 r인 원의 내부에서 반지름의 길이가 h인 원의 내부를 뺀 부분이 된다.

㉣ 두 단면의 넓이는 각각 $\pi(r^2-h^2)$으로 서로 같다. 그러므로 카발리에리의 원리에 따라 반구의 부피와 다른 입체도형의 부피는 서로 같다.

㉤ 구의 부피 V는 반구의 부피(또는 다른 입체도형의 부피)를 2배한 것과 같으므로 다음과 같이 정리된다.

$$V=2\{(\text{원기둥의 부피})-(\text{원뿔의 부피})\}=2\left(\pi r^3-\frac{\pi r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$$

3.5. 수학사 도입의 필요성

1) 수학의 유용성 강조

① 수학은 외적인 필요에 의해 개발되고 연구되었을 뿐만 아니라, 수학 내적인 요구에 의해서 발전했다는 수학의 유용성을 강조할 수 있다.

② Geometry(기하학)이라는 단어는 '땅의 측정'을 의미하듯이, 고대 문명사회의 측량술로부터 기하학이 싹트기 시작했고, 이집트 사람들은 피라미드를 건설할 때 직각을 얻기 위해 3-4-5 직각 삼각형을 사용했다.

③ 산술은 공학, 농업, 상업, 종교 의식 등을 보조하기 위한 실용적인 도구로 개발되었다.

④ 삼각법은 천문학과 관련해서 연구되었고, 로그의 발명은 천문학 등에서 발생하는 거대한 계산 문제를 쉬운 문제로 전환시켰다.
⑤ 인도-아라비아 수 체계는 그 이전의 수 체계에서 대단히 번거롭던 계산 문제를 간단한 계산 알고리즘을 통해 매우 쉽게 처리할 수 있게 했다.
⑥ Descartes의 해석 기하학은 유클리드 기하학에서 마주치는 당혹스러운 문제를 단계적으로 풀 수 있는 방법을 제공했다.

2) 수학의 인간화 도모

① 세련된 형태의 수학출판물은 마지막 결과를 얻을 때까지의 노력과 인내 및 성공과 실패의 경험 등과 같은 인간적인 면을 숨기고 있다. 그러나 현재의 수학은 인간의 엄청난 노력이 투여된 뒤에야 발견되었으며 수학사를 이용하면 이런 인간적인 요소를 가미함으로써 실제로 더 생동감 있게 수학을 가르칠 수 있다.
② 이를 위해 새로 배우는 수학개념의 발견에 공헌을 할 사람들의 전기와 일화를 간단하게 소개함으로써 수학내용을 훨씬 더 흥미롭게 만들며, 수학이 ‘인간적인’ 과목임을 보여줄 수 있다.

3) 수학의 문화적 가치 인식

① 수천 년 전에 발견된 수학적 사실은 오늘날에도 여전히 유효하다. 서로 다른 시기와 문명사회에서 똑같은 수학적 사실이 발견되고 이용되었음을 수학사를 통하여 알아 볼 수 있다.
② 피타고라스 정리는 모든 사회에서 가치 있게 사용되었다. 이런 사실을 학생들에게 제시해서 비교하도록 할 수 있으며, 이런 사실의 고려는 학생들에게 수학개념의 보편성을 보여주고, 어떤 수학 이론이 한 사람 또는 한 지역에서만 발견되었다는 잘못된 생각을 없앨 수 있다.

4) 수학 학습의 어려움 이해

① 현재 우리가 가르치고 배우는 수학은 인류의 역사에 비하면 매우 최신의 지식이며, 수천 년 동안 인류의 시행착오와 끊임없는 노력의 결과로 현재의 수학이 존재한다. 짧은 시간 내에 많은 수학을 배워야 하는 학생들에게 어려움이 없을 수 없다.

② 수학개념발달의 장애를 보여주는 역사적 조망이 교사로 하여금 학생의 오류를 더욱 잘 이해할 수 있도록 도와줄 것이다.

③ 음수의 발달사: 6세기 인도 수학자들은 음수에 대한 모든 연산 규칙을 활용했다. 그러나 3세기 뒤 아랍 수학자들은 인도수학을 알고 있지만, 그들의 연구에서 이런 것을 찾아볼 수 없다. 17세기 프랑스수학자 파스칼은 음수의 도입 필요성을 전혀 느끼지 못했으며, 19세기 영국 수학자 드 모르간은 0보다 작은 수를 상상할 수 없다고 생각했다. 음수는 복소수와 함께 16세기에 약간 받아들여졌으며, 19세기에 이르러서야 수로서의 확고한 위치를 차지하게 된다.

5) 교수·학습방법 개선

① 헤켈의 ‘재현의 원리’에 따라 인류의 대역적인 과정(어떤 개념에 이르기까지의 과정과 배경)을 수업의 과정으로 활용하는 수업방법이 가능하다.

② Lakatos는 역사발생적 원리를 옹호하면서 Rudin의 Principles of Mathematical Analysis(1953)에서의 평등 수렴 개념의 도입 방법으로 원시적인 추측, 반박, 증명에 대한 비판 등의 방법을 소개하고 있다.

㉠ 원초적인 추측: 연속함수의 임의의 수렴하는 수열의 극한함수는 연속이다.

㉡ 증명(원초적인 추측을 부분추측이나 보조정리로 분해하는 대강의 사고실험): 연속함수에 대한 Cauchy의 정의와 증명

㉢ (전면적인) 반례(원초적인 추측에 대한 반례)의 출현: 반례인 Fourier급수 $\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \cdots$ 및 여러 가지 전면적인 반례의 제시

㉣ 증명의 검토, 전면적인 반례가 국소적인 반례가 되는 ‘유죄인 보조정리’의 발견과 증명 및 추측의 개선, 새로운 증명생성 개념의 출현: $\epsilon - \delta$ 방법에 의한 증명 분석, 평등수렴 개념의 도입

6) 수학에 대한 흥미 유도

① 수학교육의 목표에 지적인 영역과 함께 정의적 영역이 강조되고 있다. 수학에 대한 흥미와 긍정적인 자세가 없다면 지적인 영역의 목표를 달성할 수 없다.

② 수업 중 간단한 역사적 사실과 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미를 유발시킬 수 있

다. 수 체계의 강의 중 중국, 바빌로니아, 로마의 수 체계를 소개하고, 이를 통해 인도–아라비아 수 체계의 정점과 유용성을 강조할 수 있다. 특히 수 0의 도입에 수천 년이 걸렸고 현재 사용되고 있는 수 체계의 발달에도 수천 년이 걸렸지만, 짧은 시간에 이 모든 것을 배울 수 있다는 사실에 학생들은 경탄할 것이다.

4. 형식불역의 원리

4.1. 형식불역의 원리의 발생에 대한 역사적 배경과 정의

① George Peacock(1791~1858)의 “산술대수”와 “기호대수”

산　술		산술대수		기호대수
7−(5−2) =7+2−5	㉠ ➡	$c<b,\ b-c<a$일 때, $a-(b-c)=a+c-b$ 일반적인 대수(universal algebra) 즉, 수 자체보다는 문자를 사용함으로써 음의 실수에 대한 산술의 원리를 개발한다.	㉡ ➡	$a-(b-c)=a+c-b$ 어떤 제한 조건 없이 일반적으로 유효하고 식에 포함된 기호(문자)는 어떤 해석도 필요하지 않으며 산술로부터 유도된 방식으로 이러한 기호를 연산한다.

㉠과정: 수가 기호로 대치되면서 자연수나 분수와 같이 양이나 크기에 기초하는 직관적인 수의 관념보다 알고리즘적인 계산수로서의 특징이 두드러지게 된다.

㉡과정: 연산의 제한조건이 사라지면서 그에 따른 연산의 일반화가 이루어진다. 이 과정에서 음수나 허수의 존재성과 그 의미에 대한 의문점이 사라지고 연산 법칙이 자유롭게 기호대수에 적용되면서 양수를 넘어서는 새로운 대상이 자연스럽게 도입된다.

(예) 음수란? 단지 $-a$ 형태의 기호이다.

$\sqrt{-1}$ 란? 산술에서 제곱근이 따르는 동일한 규칙을 따르는 단지 하나의 기호로서 $\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}=-1$을 만족하게 되는 것이다.

② 19세기, 음수와 복소수에 대한 이해를 위한 핵심 아이디어로의 수 체계 확장을 가능하게 한 것이 형식불역의 원리이다.

㉠ 음수와 허수는 18세기(그 이전에도)에도 자유롭게 사용되었으며 모든 종류의 대수적 결과를 얻는데 필요한 것으로 간주되었다. 하지만 수학자들은 물리적 세계에서 실제적인 모델로 그 의미를 설명하려 하였다.

㉡ 그러나 19세기 독일의 수학자 한켈(Hankel)은 음수를 실제적인 것을 나타내는 개념이 아닌 형식적인 구조를 이루는 개념으로 보았다. 즉, 한켈은 양수 체계를 구성하는 여러 가지 원리를 그대로 유지하면서 음수 체계를 연구하여 음수의 구조가 대수적으로 모순이 없음을 보였다.

③ 형식불역의 원리란 ‘기본적인 성질이 유지되도록 대수적인 구조를 확장하는 것’으로 프

로이덴탈은 대수적 원리라고 부르고 있다.

(예) 대수적인 분수의 의미에 따라 분수의 약분과 통분 및 사칙계산을 하는 방법

(1) $3x=2$

$12x=8$

$\therefore \frac{2}{3}=\frac{8}{12}$

(2) $3x=2,\ 5y=7$

$15x=10,\ 15y=21$

$15(x+y)=31$

$x+y=\frac{31}{15}$

$\therefore \frac{2}{3}+\frac{7}{5}=\frac{31}{15}$

(3) $3x=2,\ 5y=7$

$15xy=14$

$xy=\frac{14}{15}$

$\therefore \frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$

(4) $3x=2,\ 5y=7$

$7\times 3x=2\times 5y$

$x=\frac{2\times 5}{7\times 3}y$

$\frac{x}{y}=\frac{2\times 5}{7\times 3}$

$\therefore \frac{2}{3}\div\frac{7}{5}=\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}$

4.2. 형식불역의 원리 활용의 실례

1) 귀납적 외삽법

① 귀납적 외삽법은 수의 연산을 확장하기 위해 이미 확립된 연산의 결과 속에서 패턴을 발견하고, 발견된 패턴이 새롭게 확장된 체계 속에서 계속 이루어질 것이라고 가정하여 적용하는 것이다.

② 귀납적 외삽법으로 음수의 곱셈과 지수법칙을 지도할 수 있다.

3+2=5	3−2=1	3×4=12	$3^4=81$
3+1=4	3−1=2	3×3=9	$3^3=27$ (81 ÷3 =27)
3+0=3	3−0=3	3×2=6	$3^2=9$ (27 ÷ 3 = 9)
3+(−1)=?	3−(−1)=?3×3=3		$3^1=3$ (9÷3 = 3)
3+(−2)=?	3−(−2)=?3×(−1)=?		$3^0=?$ (3÷3=1)
(Freudenthal, 1983, p.435)		3×(−2)=?	$3^{-1}=?$ (1 ÷ 3 = $\frac{1}{3}$)
			$3^{-2}=?$ ($\frac{1}{3}\div 3=\frac{1}{9}$)

(Borasi, 1992, p.60)

: 귀납적 외삽법은 음수의 도입과 더불어 계산을 하고 추론을 하여 그 결과를 검토는 것을 포함하므로, 구체적 모델인 수직선을 수동적으로 학습하는 것에 대한 활동적인 보완물이 된다

(Freudenthal, 1973, p.282).

③ 귀납적 외삽법을 통해 학생들은 합리적으로 추론된 결과를 직관으로부터 분리시켜 스스로 정당화시키는 경험을 하게 된다.

④ 다른 음수 지도를 돕는 모델(수직선, 셈돌, 우체부 등)을 사용하지 않고 귀납적 외삽법으로만 음수의 연산을 지도한다면 음수가 물리적 세계를 다양하게 해석하게 하는 풍요한 개념이라는 것을 학생들에게 인식시키기 어려울 것이다.

2) 형식적(공리적) 외삽법

① 새로운 수를 '방정식의 해'로 형식적(공리적)으로 도입하여 새로운 기호를 붙이고 확장하는 방식을 프로이덴탈(Freudenthal, 1973, p.231)은 형식적(공리적) 외삽법이라 하였다.

② 다음과 같은 방정식은 주어진 수의 영역에서는 해가 없으므로 풀리지 않지만 새로운 종류의 수로 새로운 기호 -3 , $7/4$, $\sqrt{2}$, i를 도입하면 등식이 성립 가능해지며 또한 이들 방정식은 새로운 기호에 '방정식의 해'라는 형식적인 의미를 부여한다 (Freudenthal, 1973, pp.230-231).

$x+3=0$, $4x=7$, $x^2=2$, $x^2=-1$

③ 방정식의 해로 도입한 새로운 수가 기존 체계의 특성을 만족한다고 가정한 다음 그 연산 규칙이 어떻게 이루어질 것인지 찾아보는 것이다.

④ 새로운 수를 방정식의 해로 도입하는 방식은 우리 교과서에서는 $\sqrt{2}$와 같은 무리수를 도입할 때와 실수에서 복소수를 확장할 때 사용되며 역사적으로도 동일한 방식으로 발전되어 왔다.

3) 대수적-형식불역의 원리에 따른 음수 도입 과정

자연수와 그 계산의 기초 법칙인 덧셈과 곱셈에 대한 결합, 교환 법칙과 분배 법칙을 출발점으로 이들 법칙이 부호가 붙은 수라는 더 넓은 체계에서 성립할 것이라는 가정으로부터 음수의 연산을 정의하는 데 필요한 조건을 산출한다.

① 음수의 계산수로서의 형식적인 본질에 입각하여 대수적인 형식불역의 원리에 따라 자연수 체계의 확장으로 음수와 음수의 연산을 지도한다.

② 자연수 a에 대하여 방정식 x+a=0의 해로 음수 −a를 정의하고, 자연수에서 성립하는 계산 법칙이 음수에서도 성립하도록 음수의 덧셈과 곱셈을 정의한다.

③ 음수의 덧셈과 곱셈을 다음과 같이 지도할 수 있다.

㉠ 음수 −a, −b는 각각 자연수 a, b에 대하여 방정식

$$x+a=0 \cdots\cdots (1)$$

$$y+b=0 \cdots\cdots (2)$$

를 만족시키는 x, y로 정의한다. (1)식과 (2)식을 변끼리 각각 더하고, 새로운 수 x, y의 덧셈이 자연수의 덧셈과 같은 성질을 만족한다고 하면 교환 법칙과 결합 법칙에 의해

$$(x+y)+(a+b)=0$$

이다. 따라서

$$x+y=-(a+b)$$

이고 이 방정식의 해는 유일하므로

$$(-a)+(-b)=-(a+b)$$

이다.

㉡ (1)식에 b를 곱하고, (2)식에 x를 곱하면

$$bx+ab=0, \quad xy+bx=0$$

이므로

$$-bx=ab, \quad xy=-bx$$

이다. 따라서

$$xy=ab$$

곧,

$$(-a)(-b)=ab$$

이다.

결국, 자연수와 자연수에 대한 계산의 기본적인 규칙이 확장된 체계에서 성립한다는 것이 필요하며 우리는 새로운 수로 계산하는 규칙을 정의하기 위한, 다음과 같은 필요조건을 얻는다.

$$(-m)+(-n)=-(m+n)$$

$$(-m)\times(-n)=m\times n$$

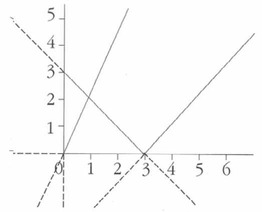
$$(-m)\times n=-(m\times n)$$

④ 음수가 대수적 필요성에서 출현된 개념이라는 역사발생적 의미를 잘 반영하고 있다.

⑤ '기하학적-대수학적 형식불역의 원리'를 추가로 이용할 수 있다.

㉠ Descartes에 의해 해석기하학이 탄생하면서 음수와 그 연산은 기하에서 필수불가결한 것임이 분명해졌다.

㉡ 음수는 평면 전체를 좌표로 기술하고 직선이나 이차곡선 등과 같은 평면 도형을 전체적으로 방정식으로 기술하는 데 반드시 필요하다.



㉢ 음수를 도입하기 전에는 덧셈 x+3, 곱셈 2x, 뺄셈 x−3은 x≥0, x≥3일 때만 다루었다. 이들 연산은 함수이며(x→x+3, x→2x, x→x−3) 그 그래프는 반직선이다. 반직선의 직선으로의 확장과 그 대수적 기술은 음수의 도입으로 가능한 것이다.

㉣ 음수가 도입되지 않으면 뺄셈 x→3−x는 선불에 불과하며 음수가 도입됨으로 해서 직선을 나타내게 된다. 또한 곱셈 x→2x의 그래프는 x의 범위가 0과 양수인 경우는 반직선이며 음수로 확장되면 직선이 된다. 이 직선은 a(−b)=−ab가 일반적으로 타당함을 보여준다.

㉤ 음수가 도입됨으로 해서 일차함수 x→ax+b의 그래프는 직선이 되며, 일반적으로 직선의 방정식이 일차방정식이 됨은 기하와 대수의 조화를 보여주는 것이다.

4) 형식불역의 원리에 따른 지수의 확장

양의 정수 m, n에 대해 수 a를 n번 거듭하여 곱한 것을 a의 n제곱이라 정의한다.

양의 정수 m, n에 대하여

(Ⅰ) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Ⅱ) $(a^m)^n = a^{mn}$

(Ⅲ) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (Ⅳ) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

(Ⅴ) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(m > n, a \neq 0) = \frac{1}{a^{n-m}}$ $(m < n, a \neq 0)$

지수법칙 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 하고 지수를 변화시켜 본다.

$m = 0$일 때,

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

양변을 a^n으로 나누면

$$a^0 = 1 \quad \cdots ㉠$$

$m=-n$일 때,

$$a^{-n}\cdot\ a^{n}=a^{-n+n}=a^{0}=1\,,$$

양변을 a^n 으로 나누면

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

밑이 0인 지수가 양수인 경우

$$0^{n}=0\cdot\ 0\cdot\ \ ...\ 0=0\ \ \cdots\ ㉡$$

밑이 0이고 지수가 음수인 경우 위에서,

$$0^{-n}=\frac{1}{0^{n}}\ (\text{모순})$$

밑과 지수가 모두 0인 경우

㉠에 따르면 $0^0=1$

㉡에 따르면 $0^0=0$

이는 모순이다[27]. 이러한 모순으로부터 0^0과 0^{-n}은 정의되지 않으며 지수법칙의 확장에서 예외라고 결론을 내릴 수 있다. 이제 지수법칙이 정수로 확장되도록 다음과 같은 새로운 정의를 추가하며 이때, 모순으로 정의되지 않는 경우를 제외하기 위해 새로운 조건 $a\neq0$을 첨가한다.

$a\neq0$ 이고, n이 양의 정수일 때,

$$a^{0}=1,\ \ a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

지수를 정수의 범위로 확장하는 경우 지수법칙 (Ⅲ)와 (Ⅳ)가 합쳐져서 (Ⅲ')이 되므로 이제 위의 정의를 이용하여 다음과 같이 확장된 지수법칙을 증명하여야 한다.

m, n이 정수이고 $a\neq0$, $b\neq0$ 일 때

(Ⅰ') $a^{m}\cdot\ a^{n}=a^{m+n}$ (Ⅱ') $(a^{m})^{n}=a^{mn}$

(Ⅲ') $(a\cdot\ b)^{n}=a^{n}\cdot\ b^{n}$ (Ⅳ') $a^{m}\div a^{n}=a^{m-n}$

지수법칙이 정수 집합으로 확장되었다. 이제, 지수법칙을 유리수 영역으로 확장시키기 위해 지수가 유리수인 경우를 생각해 보자.

$a^{\frac{m}{n}}$ (m, n은 정수, $n\neq0$)을 $a^{\frac{m}{n}}$ (m은 정수, n은 양의 정수)로 바꾸자.

---

27) 다음과 같이 귀납적 외삽법을 이용할 수도 있다(Borasi, 1992, p.61).
$5^0=1,\ 4^0=1,\ 3^{0=1},\ 2^0=1,\ 1^0=1\ \therefore 0^0=1$
$0^4=0,\ 0^4=0,\ 0^{3=0},\ 0^2=0,\ 0^1=0\ \therefore 0^0=0$

또한 $m=1$일 때, $a^{\frac{1}{n}}$이 위의 지수법칙을 만족한다면 (Ⅱ')에서$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}n} = a$이다. 즉 $a^{\frac{1}{n}}$이 존재한다면 $x^n = a$의 근이다.

$a>0$일 때, n이 짝수이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 두 개가 있으며 양인 것을 $\sqrt[n]{a}$, 음인 것을 $-\sqrt[n]{a}$와 같이 나타내자. n이 홀수이면 a의 n제곱근은 하나 있다. $a=0$일 때는 a의 n 제곱근은 0뿐이므로 $\sqrt[n]{0}=0$으로 정의하자. $a<0$일 때는 n이 짝수이면 a의 n제곱근이 실수인 것은 없으며 n이 홀수일 때 a의 n제곱근으로 실수인 것은 오직 하나 있다. $a>0$ 일 때 이제 일반적인 경우로 $a^{\frac{m}{n}}$(m은 정수, n은 양의 정수)에서 지수법칙 (Ⅲ')이 성립한다면$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$이다. $a>0$인 경우 다음과 같이 정의하자.

> 정의 ㉮ $a>0$, m은 정수, n은 양의 정수일 때
>
> $$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

이로부터 다음을 증명한다.

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 유리수일 때

(Ⅰ'') $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$　　(Ⅱ'') $(a^m)^n = a^{mn}$

(Ⅲ'') $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$　　(Ⅳ'') $a^m \div a^n = a^{m-n}$

이제 남은 경우는 $a<0$이고 n이 홀수인 경우이다. 간단한 예로 $\sqrt[3]{-27}$을 생각해 보면 $(-3)^3=-27$이므로 $\sqrt[3]{-27}=-3$이다. $a<0$이고 n이 홀수인 경우 지수법칙 (Ⅱ'')이 성립한다고 하면, 예를 들어

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = \{(-8)^2\}^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{3}} = 4,\ (-8)^{\frac{2}{3}} = \left\{(-8)^{\frac{1}{3}}\right\}^2 = (-2)^2 = 4\text{이고}$$

$$\left\{(-8)^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (-8)^{\frac{2}{3}3} = (-8)^2 = 64\text{이다.}$$

따라서 $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}n} = a^m$이고 다음과 같이 정의할 수 있다.

> 정의 ㉯ $a<0$, m은 정수, n은 홀수 일 때
>
> $$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ \ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

이제 $\sqrt[n]{0}=0$인 경우와 정의 ㉮와 ㉯를 합쳐서 정의하여 보기 위해 조건을 $\sqrt[n]{a} \in I\!R$로

바꾸자. 그런데

$$-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\left[(-8)^2\right]^{\frac{1}{6}}=2$$

이므로 이러한 결과를 피하기 위해서 m과 n에 제한조건을 붙일 필요가 있다. 따라서 다음과 같은 정의가 가능하다.

$$a\in I\!R,\ \text{양의 정수 } n\text{에 대해 } \sqrt[n]{a}\in I\!R \quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

$$m\text{이 } n\text{과 공통 약수를 갖지 않는 양의 정수라면 } a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

이다.

> [참고] $(-2)^{1.4}$와 같은 식을 해석하는데 있어 1.4를 14/10이나 7/5로 해석하면
>
> $$(-2)^{\frac{14}{10}}=\sqrt[10]{(-2)^{14}}=\sqrt[10]{(-1)^{14}(2)^{14}}=\sqrt[10]{(2)^{14}}=\sqrt[5]{(2)^7}$$
>
> $$(-2)^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{(-2)^7}=\sqrt[5]{(-1)^7(2)^7}=(\sqrt[5]{(-1)^7})(\sqrt[5]{(2)^7})=-\sqrt[5]{(2)^7}$$
>
> 으로 다른 값이 나온다.

4.3. 형식불역의 원리 사용의 의의와 교사의 자세

① 역사적으로 형식불역의 원리는 기호 산술에서 추상대수로 발전하는데 있어 근본적인 역할을 하였으며, 형식불역의 원리에 따라 연산이 확장되는 과정에서 우리의 이해의 근거도 직관에서 추상적인 기호로 바뀌게 되었다.

② 인간이 창조한 수에 대한 완전한 이해는 본질적으로 대수적 구조를 통해서 가능하며 결과적으로 대수적 구조에 대한 교육이 더욱 필요하다. 따라서 형식불역의 원리에 따른 확장 과정에 대한 인식론적 분석이 실제 교수-지도에 필수 불가결한 것이다.

③ 형식불역의 원리를 통해 새로운 대수적 구조가 발견되므로 형식불역의 원리는 하나의 발견술이다. 그리고 발견의 방식은 기존의 연산법칙이 확장되기 위한 필요조건을 찾아 연산을 다시 정의하고 이로부터 확장된 연산법칙을 증명하는 것으로 이루어진다.

④ 특히, 형식불역의 원리는 기존 정의의 어떤 성질을 보존하면서 기존 정의를 확장시켜 보다 일반적인 정의를 만들어내려고 할 때, 효과적으로 사용된다.

⑤ 형식불역의 원리의 발견적 측면에는 "-라면-이다(If- then-)"라는 가설-연역적 사고방식이 내재되어 있으므로 학생들에게 가설-연역적 사고력을 동시에 신장시킬 수 있다.

⑥ 형식불역의 원리를 적용한 실제 방법으로 수직선 공리를 이용하는 SMSG의 접근법, 알

고리즘적인 방정식을 이용하는 형식적(공리적) 외삽법, 연산의 패턴의 발견에 기초하는 귀납적 외삽법 등이 가능하다.

⑥ 교사는 교과서의 형식적 기술 속에 내재되어 있는 형식불역의 원리에 대해 인식하고 대수 교수에 있어 학생들이 대수 체계에 대해 기본적인 이해를 개발하도록 돕는 것이 바람직하며, 이를 실제 수업에 반영하기 위한 노력과 이와 관련된 연구가 요구된다. 그리고 이러한 교육이 효과적으로 이루어질 때 학생들이 수학의 발생적이고 창조적인 면을 인식함으로써 수학에 대한 올바른 가치관과 태도를 형성하고 정의와 일반성의 확보, 대수적 구조의 확장과 관련된 의미 있고 살아있는 논의와 사고가 가능하게 된다.

5. 귀납 · 유비 · 연역 추론

5.1. 추론의 정의와 종류

1) 추론의 정의

추론(推論)이란 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어내는 사유작용을 말한다.

2) 추론의 종류

인간은 개별적이고 구체적인 사실들의 관찰과 실험으로부터 귀납추론, 유추에 의해 법칙을 발견하고, 일반적 원리로부터 연역 추론으로 특수한 주장을 정당화 한다.

① 귀납추론: 관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음에 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참이라고 주장하는 추론이다.

② 유비추론: A라는 대상과 B라는 대상이 서로 유사할 때, A에서 성립하는 성질 P(A)와 유사한 성질 P(B)가 대상 B에서 성립할 것이라고 주장하는 추론이다.

③ 연역추론: 일반적인 사실이나 원리를 전제로 하여 개별적인 사실이나 보다 특수한 다른 원리를 이끌어 내는 추론이다.

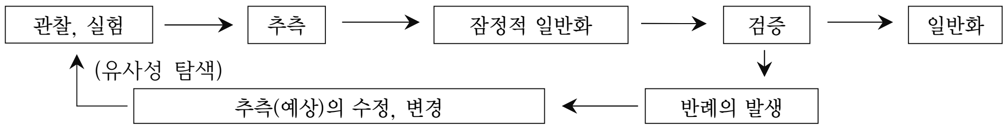
5.2. 귀납(歸納, induction)추론과 수학 학습-지도

1) 귀납추론의 정의

① 귀납추론은 어떤 집합에서 관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 개의 원소에 대한 정보를 이용하여 그 집합의 다른 원소 또는 모든 원소에 대한 일반화를 형성하는 추론이다.

② 부분적이거나 특수한 사실로부터 전체적이고 보편적인 사실 또는 다수의 연속적인 변화에서 일반적인 법칙을 이끌어내는 추론이다.

2) 귀납추론 과정



① 주어진 대상 관찰하기: 일정한 목적을 설정하고 일정한 사실 또는 현상의 성질, 상태, 변화들을 파악하기 위하여 그 대상을 주의 깊게 본다.

② 유사성을 바탕으로 추측하기: 관찰 과정에서 발생한 유사성에 근거하여 보다 확장된 대상에 대해서도 동일한 성질을 보장받기 위한 활동이다.

(예) '3, 7, 13, 17, … 은 홀수인 동시에 수소이며, 그들의 합은 항상 짝수이다'라는 유사성에서 관찰자는 '다른 홀수인 소수의 합도 짝수가 되겠는가?'하는 의문을 갖게 되며 홀수인 2개의 소수의 합이 짝수인 3+3=6임을 생각해 볼 것이고 6 이상에서도 생각해 본 결과 '4보다 큰 임의의 짝수는 홀수인 두 소수의 합이다'는 일반적인 명제를 암시할 것이다.

③ 잠정적으로 일반화하기: 추측을 근거로 하여 보다 확장된 일반적인 대상에 대해서 동일한 성질이 존재할 것이라고 믿는다.

(예) 3, 7, 13, 17은 모두 소수이며, 10, 20, 30은 모두 짝수이다. 따라서 '소수+소수=짝수'라는 일반적 명제를 추론한다.

④ 잠정적 일반화에 대한 검증하기: 귀납은 증명되지 않은 추측이므로 잠정적인 명제를 검증하기 위해서 또 다른 새로운 대상에 대하여 관찰하고 조사해 보아야 한다.

(예) 짝수 60에 대해서 '60=소수+소수'가 성립하는지 시도해 본다. 60=3+x에서 x는 소수인가? x=57인데 57은 소수가 아니므로 위의 잠정적인 명제 '짝수=소수+소수'는 참이 아니다.

단, 이 과정에서 반례가 발생하면 그 명제는 파기되거나 수정되어야 한다.

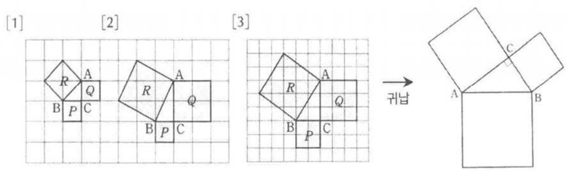
⑤ 일반화하기: 앞 단계에서의 특수한 대상에 대한 점검에서 지지된 명제에 대해서 보다 확장된 특수한 경우나 또는 극단적인 경우에 대해서도 그 명제가 성립될 수 있는지 확인해 본다.

3) 귀납추론의 예

① '규칙성 찾기' 전략, '표를 만들어 해결하기' 전략 등은 귀납적 추론을 이용한 문제 해결이다.

② ┌ 구체적인 사례를 관찰하여 그 가운데에서 어떤 법칙을 발견하기
├ 당면한 문제를 해결하기 위해 자료를 수집 정리하여 어떤 법칙성을 찾기
└ 어떤 법칙성을 예상하면서 자료를 수집하여 조사하기

③ 직각삼각형의 세 변에 정사각형을 세울 때, 빗변에 세운 정사각형의 넓이는 다른 두 변에 세운 정사각형의 넓이의 합과 같다.



∴ 관찰을 통해서 3개의 특수한 직각삼각형에 대해 어떤 명제가 성립함을 보인 다음에, 이 3개의 특수한 직각삼각형이 속하는 전체 범주인 일반적인 직각삼각형에 대해 그 명제가 성립함을 주장하고 있다.

4) 귀납추론의 의의

① 구성주의적 관점에서의 수학교육은 수학을 이미 만들어진 계통적인 연역과학으로 대할 것이 아니라, 만들어가는 수학 즉 실험적인 귀납과학으로부터 출발하여 계통적 연역과학으로 확립시켜야 한다고 본다.

② 귀납추론은 관찰된 사실 뒤의 규칙성과 일반성을 찾으려는 것이며, 그 근거는 다수의 사례에서 관찰되는 법칙이 동종의 다른 사례에서도 성립한다고 보는 자연의 균일성에 있다.

③ 관찰 · 실험 · 측정 · 세어보기 · 열거하기 · 유추하기 등을 통해 예상하고 사고 패턴을 확장하며 일반화하는 과정은 유용한 방법이다.

④ 귀납추론을 통한 귀납적 사고는 예리한 관찰력과 지적 용기 · 지적 정직성 그리고 합당한 이유를 찾아 조심스럽게 접근하는 현명한 자제력을 형성시켜준다.

⑤ 귀납추론은 구체적인 특수한 것에서 일반적인 추상적인 것으로 사고를 진행시켜 나가는 중요한 도구이다.

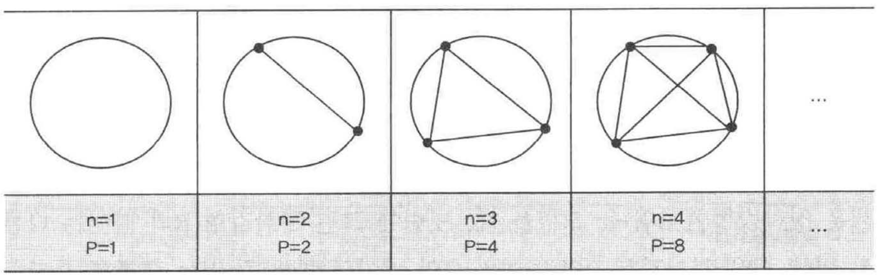
5) 귀납추론지도에서 유의할 점

① 단 하나 또는 제한적인 대상에 대한 추론에는 적용될 수 없고, 여러 개의 대상에 통합하여 그들의 공통적인 속성으로부터 일반적인 원리나 법칙을 발견하게 됨에 유의한다.

② 귀납적 추론이 유효한 장면에서 추론해 보는 기회와 환경을 제공하여 귀납적으로 생각하는 것이 간편하다는 것을 느끼게 해야 한다.

③ 귀납에 의해 얻어진 결과는 항상 '참'이라고 할 수 없으므로 새로운 대상에 대해 확인해 보는 태도를 갖게 해야 한다. 또는 관찰된 사실을 바탕으로 얻어진 법칙은 단지 잠정적인 추측일 뿐이므로 이 법칙이 참임을 보증하기 위해 연역 추론을 활용한다.

(예) 원주 위에 10개의 점을 서로 연결하여 원을 최대한 여러 부분으로 나눈다면 모두 몇 개로 나눌 수 있을까?



: (나누어진 부분의 수)=2^{n-1}(개)라는 규칙성이 있는 것으로 판단하여 $2^6=32$개라고 가능성을 예측할 수 있다. 그러나 원주 위의 6개의 점을 서로 연결하면 모두 31개로 나누어진다.

5.3. 유비[28](類推, analogy)추론과 수학 학습-지도

1) 유비추론의 정의

① 두 대상 사이에 존재하는 몇 개의 유사성에 착안하여 한 쪽 대상에서 성립하는 성질과 유사한 성질이 다른 쪽의 대상에 대해서도 성립한다고 하는 추론 방법이다. 따라서 유추는 일종의 닮음이다.

② 유비의 그리스 언어인 'analogia'는 '비례'라는 의미로 두 대상 P와 Q를 유사한 대상

28) 유비추론을 귀납추론의 한 방법으로 보기도 한다.

P′와 Q′를 유사한 결론이라고 할 때, 비례식 P : P′ = Q : Q′에 있어서 P, P′, Q를 기지로 해서 Q′를 유도하는 추론이다.

③ 귀납적 추론은 개별적인 사례로부터 일반적인 원리를 추론하는데 비하여 유추는 어떤 특수한 경우에서 다른 미지의 특수한 경우에 이르는 추론이다. 어떤 대상이나 집합에서 성립하는 사실이 이와 유사한(다른 몇 가지 점에서도 같은 성질을 갖는) 대상 또는 집합에 대해서도 성립하리라고 추론하는 것이다.

2) 유비추론의 예

① 일반적인 유비추론의 종류

㉠ 옛 것으로부터 새로운 상황을 쉽게 파악하고, 이전에 풀었던 유사한 문제를 기초로 문제를 해결한다.

㉡ 이전에 경험했던 유사한 지식에 관계시키고 이를 기초로 하여 추론한다.

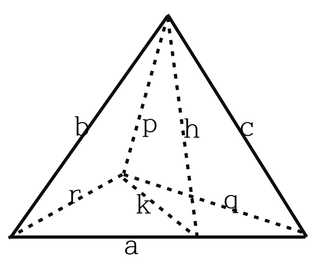
㉢ 새로운 것을 이전의 지식에 연결시킴으로써 친근한 것같이 보이게 하고 친근한 것을 새로운 시각에서 봄으로써 낯선 것같이 보이게 한다.

㉣ 관계로 이루어진 두 개 이상의 집합 간에 어떤 대응을 만들어 냄으로써 미지의 요소를 알아낸다.

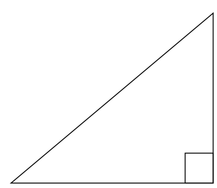
② 사면체와 삼각형, 직각사면체와 직각삼각형 사이의 유비추론

공간의 직각사면체에서 직각을 낀 세면의 넓이 A, B, C와 다른 한 면의 넓이 D와의 관계를 알아보아라.

평면의 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 넓이와 다른 한 면의 넓이와의 관계를 알아보아라.



≈

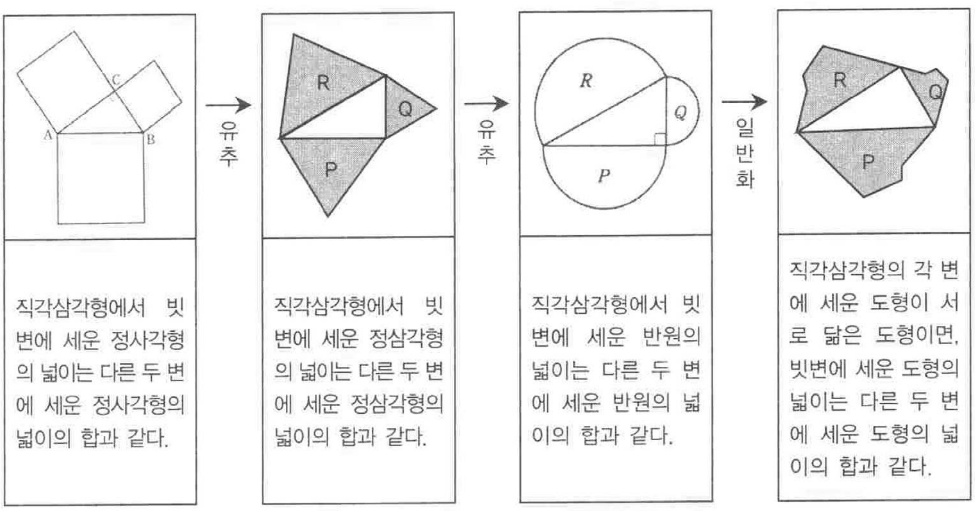


사면체의 무게중심을 알아보아라 삼각형의 무게중심을 알아보아라



③ 피타고라스의 정리를 일반화한 정리에 대한 유비추론의 활용

'피타고라스의 정리'에 대한 증명: 직각삼각형의 세 변에 정사각형 P, Q, R (빗변에 세운 정사각형이 R 임)을 그렸을 때, 빗변에 그린 정사각형 R 의 넓이는 다른 두 변에 세운 정사각형 P 의 넓이와 Q 의 넓이의 합과 같다.



직각삼각형의 각 변에 정사각형을 그렸는데, 그렇다면 정사각형과 유사한 다른 도형에 대해서도 피타고라스의 정리가 성립할까?

㉠ 정사각형과 유사한 정삼각형에 대해서 $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$이 성립

㉡ 직각삼각형의 각 변에 반원을 그리면 $\frac{\pi}{4}c^2 = \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2$가 성립

그렇다면, 직각삼각형의 각 변에 도형을 어떻게 세울 때, 빗변에 세운 도형의 넓이는 다

른 두 변에 세운 도형의 넓이의 합과 같게 될 것인가? 일반적으로 직각삼각형의 각 변에 세운 도형 P, Q, R (빗변에 세운 도형이 R 임)이 서로 닮은 도형이라면, 도형 R 의 넓이는 도형 P 의 넓이와 도형 Q 의 넓이의 합과 같게 된다.[29)]

3) 유비추론지도에서 유의할 점

① 유추는 닮았다는 것에 근거하여 '같을 것이다'라고 추론하는 것이므로 유추한 후에는 반드시 확인해 보는 것이 필요하다. 즉 유추는 유효한 추론(가정이 '참'일 때 결론도 반드시 '참'인 추론)이라고 할 수 없으며 유추적 사고는 개연적 과정이므로 반드시 증명이 필요하다.

(예) 어떤 학생이 사다리꼴의 넓이 구하는 공식 '(아랫변의 길이+윗변의 길이)×높이×1/2'로부터 사다리꼴과 유사한 입체도형인 각뿔대의 부피 구하는 공식을 '(아랫면의 넓이+윗면의 넓이)×높이×1/3'로 유추할 수 있다. 그러나 이 학생이 유추한 것은 수학적으로 참인 성질이 아니다.

② 일반화된 결과에 대하여 유추적 사고를 경험시키고 특수한 경우나 극단적인 경우에 대하여 추측을 검사해 보는 것이 필요하다.

(예) Heron의 공식: 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형의 넓이 A

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),\ s = \frac{a+b+c}{2}$$

㉠ 정삼각형 $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ ㉡ 직각삼각형 $A = 6a^2$ ㉢ 이등변삼각형 $A = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$

5.4. 연역(演繹, deductive)추론과 수학 학습-지도

1) 연역추론의 정의

① 어떤 내용이 확실한 '참'인 사실임을 유도하는 방법이다.

---

29) "직각삼각형의 각 변 위에 닮은 다각형을 그리면 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 다른 두 다각형의 넓이의 합과 같다"는 정리는 다음과 같이 증명가능하다.

[증명] 빗변 위에 그린 정사각형의 넓이는 a^2이므로 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 λa^2이다. 그런데 세 변위의 정사각형과 다각형은 각각 닮은 도형이므로 닮음비는 같다. 따라서 세 다각형의 넓이는 각각 $\lambda a^2, \lambda b^2, \lambda c^2$이다. 그런데

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2$$

이므로 특수한 경우인 피타고라스의 정리와 동치이며 다른 어떤 특수한 경우와도 동치이다. 따라서 어떤 특수한 경우가 성립하므로 일반적인 정리 "직각삼각형의 각 변 위에 닮은 다각형을 그리면 빗변 위에 그린 다각형의 넓이는 다른 두 다각형의 넓이의 합과 같다"도 성립한다.

② 전제에 대한 지식이나 보편적인 법칙에서 출발하여 부분에 관한 지식이나 특수 사례 등을 이끌어 내는 방법이다.

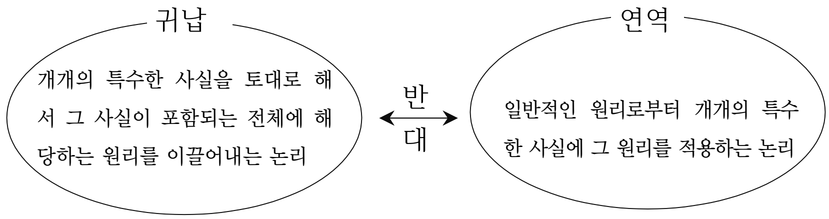
(예) 유클리드 원론: 가장 기본적인 절대적으로 참인 것으로 간주된 제1원리 곧, 23개의 정의, 5개의 공준, 5개의 공리로 이루어진 '원론[30]'으로부터 모든 정리를 연역하는 연역 체계.

③ 수학에서 귀납추론과 유비추론에 의하여 새로운 법칙을 발견하지만 이를 인정하기 위해 증명 곧, 연역 추론이 필요하다.

④ 원리: 전제가 모두 참이라면 결론은 반드시 참이다.

⑤ 연역적 추론은 자신이 판단한 어떤 사실이 옳다는 것을 주장하기 위하여 이미 알고 있는 사실을 토대로 하여 그 정당성을 밝히려는 생각이다.

2) 연역추론의 형식



① 연역추론의 결론은 항상 '참'이므로 연역추론의 방법에서는 논리적인 방법이 강조되고 형식에 치중하여 명확한 결론을 이끌어 낸다.

② 삼단논법이 대표적인 형식이다.

(대전제) P이면 Q이다.	[예] 자연수이면 정수이다.
(소전제) Q이면 R이다.	정수이면 유리수이다.
∴ P이면 Q이다.	∴ 자연수이면 유리수이다.

③ 종류: 조건 명제를 증명하기, 삼단논법에 의해 순차적으로 전제에서 결론을 이끌어내기, 반례 사용하기, 동치인 명제를 증명하기, 간접증명법(귀류법, 대우법, 모순법, 분할법),

30) 공준: ① 임의의 점으로부터 임의의 점까지 한 직선을 그을 수 있다. ② 선분은 직선으로 연속적으로 연장할 수 있다.
③ 임의의 중심과 거리를 갖는 원을 그릴 수 있다. ④ 모든 직각은 서로 같다.
⑤ (평행선 공리) 한 직선이 두 직선과 만나 한 쪽의 두 내각의 합이 2직각보다 작으면 그 두 직선을 한없이 연장하면 내각의 합이 2직각보다 작은 쪽에서 만난다.
공리: ① 같은 것과 같은 것은 서로 같다. ② 같은 것에 같은 것을 더하면 전체는 같다.
③ 같은 것에서 같은 것을 빼면 나머지는 같다. ④ 서로 일치하는 것은 서로 같다.
⑤ 전체는 부분보다 크다.

수학적 귀납법 등.

④ 연역추론과 관련된 주요한 수학적 사고 방법이 ‘분석법’과 ‘종합법’이다.

㉠ 기하의 작도 문제에서 구하려는 도형이 작도되었다고 가정하고 그 성질을 따져보아 작도법을 탐색하기(=필요조건을 이용한 분석법)

㉡ 명제(가정이면 결론이다)의 증명 방법을 찾기 위해 결론이 성립한다고 가정하고 그 선행 조건을 거듭 찾아감으로써 주어진 전제에 이르는 음미 과정을 밟고(=충분조건을 이용한 분석법) 분석 과정을 거쳐 주어진 조건으로부터 결론을 연역해 나아가기(=종합법)

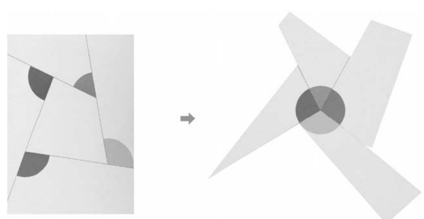
㉢ 대수적인 해법에서 구하는 것이 얻어졌다고 가정하고 그것을 x라고 나타내어 주어진 조건에 따라 식을 세워 해답을 찾기(=필요조건을 이용한 분석법)

3) 연역추론의 예

[참고] 인헬더(Inhelder)와 피아제(Piaget)는 구체적 조작기에 있는 초등학생들은 어떤 기준에 따라 분류하여 동질성이 있는 것끼리 묶는 류 추론은 할 수 있으나 ‘만약 ~라면 ~이다’라는 조건적 추론은 형식적 조작기(12세 이상)에 도달했을 때만 가능하다고 주장하고 있다[31].

① 다각형의 내각의 합 구하기

[귀납추론]



(1) 사각형의 외각의 크기의 합은 얼마인가?
(2) 오각형에 대해서도 위와 같은 활동을 해 보고, 오각형의 외각의 크기의 합을 구하여여라.
(3) 육각형, 칠각형 등에 대해서도 위와 같은 활동을 해 보고, 외각의 크기의 합을 예측하여라.

[연역추론]

n각형의 한 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 180°이므로

(내각의 크기의 합)$+$(외각의 크기의 합)
$=180^\circ\times n$

이다. 그런데 n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\times(n-2)$이므로 n각형의 외각의 크기의 합은

(외각의 크기의 합)
$=180^\circ\times n-$(내각의 크기의 합)
$=180^\circ\times n-180^\circ\times(n-2)$
$=180^\circ\times n-180^\circ\times n+180^\circ\times 2$
$=360^\circ$

31) 다른 연구에 의하면 연역추론능력 및 타당하지 않은 논증을 찾아내는 능력은 일반적으로 나이가 들수록 향상되지만 6세 정도가 되면 전제 조건으로부터 연역된 타당한 결론을 인식할 수 있으며, 이러한 능력은 6세부터 8세까지 꾸준히 향상된다고 주장하고 있다.

② 삼단논법에 의한 추론 “삼각형의 내각의 합은 몇 도인가?”

③ 수학적 귀납법[32)]

(예) $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$ 증명하시오.

④ 귀류법[33)]: 명제를 직접 증명하는 것이 복잡한 경우에는 그 명제의 결론을 부정한 후에 모순이 생기는 것을 보여 증명하기도 한다. 이와 같이 명제의 결론을 부정하면 참이라고 인정되고 있는 사실이나 그 명제가 가정하고 있는 것에 모순된다는 것을 보임으로써, 처음 명제가 참임을 증명한다.

(예) $\sqrt{2}$ 가 무리수임을 보이시오.

⑤ 대우를 이용한 증명: 명제와 그 대우는 참, 거짓이 일치하므로, 명제 $p\to q$가 참임을 보이는 대신 그 대우 $\sim q\to\ \sim p$가 참임을 보인다.

(예) 명제 ‘자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다’가 참임을 증명하시오.

4) 연역추론지도에서 유의할 점

① 연역추론에서는 ‘참’인 명제가 바탕이 되어 있다는 것과 추론하고 있는 내용의 대상은 특수한 사례이지만 이를 대표적인 것으로 보고, 이 대표적인 내용이 성립할 때에는 이에 속한 모든 내용은 모두 성립할 수 있다고 보는 지도법이 중요하다.

② 귀납추론과 유비추론을 통해 학습자 스스로 발견하는 과정을 거쳐 자신의 생각의 확실성과 일반성을 입증할 필요성과 의욕을 느끼도록 해야 한다.

③ 연역적으로 생각할 때에는 근거가 되는 기지의 성질이 무엇인가를 파악하려는 태도가 중요하다. 따라서 ‘이런 것은 알고 있지’, ‘어떤 것을 쓸 수 있는가?’와 같은 생각을 갖게 해야 한다.

④ 완전한 연역추론이 불가능하다면 그때그때 명확하다고 인정되는 부분부터 조리 있게 필연적인 결과를 이끌어내는 ‘국소적 연역’이 이루어지도록 한다.

⑤ 연역적으로 생각할 때에는 알고 있는 것을 기초로 하여 ‘~그래서 그 다음에는 어떤 것이 있을까?’와 같이 가정에서 결론을 이끌어가는 종합적인 사고와 ‘~그렇다면 그 전에는 어떤 것이 있었을까?’와 같은 결론으로부터 가정을 생각해 나아가는 분석적인 사고

---

32) 완전귀납법이라 부르는 연역추론이다.

33) 귀류법은 고전적인 ‘배중률’에 입각한다. 배중률은 명제 p와 $\sim p$ 중 하나는 반드시 성립해야 하며, 따라서 p이면서 동시에 $\sim p$인 것이 있어서는 안 된다는 것이다. 이와 같은 배중률을 전제로 귀류법은 어떤 명제가 거짓이 될 가능성을 배제하는 방법으로 이것이 거짓이면 어떤 모순에 이르게 됨을 보여준다. 따라서 오직 하나의 가능성은 명제가 참이라는 것이다.

를 할 수 있는 기회가 필요하다.

⑥ 연역추론능력을 함양하기 위해 먼저 조리에 닿도록 사고하게 하는 태도를 길러주어야 한다.

㉠ 전제가 무엇이며 결론이 무엇인가를 확실히 파악하게 한다.

㉡ 어떤 전제로부터 결론이 이끌어내어지는가를 명확히 이해시켜야 한다.

㉢ 결론이 성립하기 위해 우선 무엇이 성립하면 좋은가를 설명해 보도록 요구한다.

㉣ '~이므로'나 '왜냐하면'과 같은 용어를 바르게 사용할 수 있도록 지도한다.

㉤ 설명 시 무엇을 근거로 하고 있는가에 주의를 돌려 반성해 보도록 한다.

⑦ 전제조건에 어떤 새로운 항목이 추가되거나 그 항목 대신에 다른 항목을 사용할 경우, 흔히 생기는 오차를 줄이기 위해 'if~then'과 같은 추론 언어를 자주 사용할 필요가 있다.

5.5. 추론지도의 정리

① 수학은 추론하는 것이며 수학에 의미를 주고 수학하는 힘의 근원이 되는 것이 추론하는 능력임을 강조한다.

② 인간은 발달과 더불어 점진적으로 추론능력을 갖게 되지만 보다 체계적이고 세련된 추론능력은 경험과 교육을 통해 습득된다.

③ 학교수학은 먼저 귀납추론에 의해 재발견한 다음 연역추론으로 재확립하도록 학습되어야 한다.

④ 학생들은 관찰하고 숙고하고 반성하여 자신의 생각을 찾아내어 이를 설명하고 정당화하며 이치에 맞게 합리적으로 모순 없이 추론하고 비판적으로 사고하여야 한다.

⑤ 추론하는 실제적인 사고 방법을 가르치기 위해서 교사는 학생들에게 추론하는 사고 방법을 실제로 구사하는 경험을 시켜야 하며, 교사의 모범적인 사고 방법을 모방하도록 해야 한다.

⑥ 교사는 아동들에게 먼저 발견을 용이하게 하는 적절한 예를 연구하여 제시해 주고 적절한 질문과 권고를 통해 아동들의 사고를 자극하여 의도된 추측에 이르도록 도움을 주어야 한다.

6. 메타인지

60년대 새 수학	➡	70년대 기초로 돌아가기	➡	80년대 문제해결과 메타인지	➡	90년대 스텐다드 시대

메타인지에 대한 연구는 문제해결교육과 밀접한 관련을 맺으면서 시작되었으며 90년대 이후로는 구성주의적 관점에서 지식의 구성과정을 관리하고 감독하는 기제로 간주되면서 연구의 범위가 지속적으로 확장되어가고 있다.

6.1. 메타인지의 정의

① 메타인지 개념은 도입 초기에 암기나 독해 분야에 국한되어 사용되었지만, 현재에는 암기나 독해 이외에도 의사교환, 작문, 언어 획득, 주의집중, 자기학습, 자기제어, 개념변화, 문제해결 등 다양한 분야에서 사용되고 있다.

② 메타인지 = 인지 그 자체를 대상으로 하는 지식, 인지 그 자체에 대한 이해
= 정신 상태나 과정을 반성하는 정신 활동
= 인지에 대한 인지
= 인지에 대한 반성
= 사고에 대한 사고

6.2. 메타인지의 발생 배경

① 메타인지는 메타기억이라는 용어에서 비롯된 것으로 메타이해, 메타집중, 메타의사교환, 메타언어 그리고 메타기억 등을 모두 포괄하는 광의적 의미의 개념이다.

② 접두사 ‘메타’는 ‘변화’와 ‘이후(after)’라는 의미를 나타내는 그리스어 ‘$\mu\varepsilon\tau\alpha$’에서 유래된 어휘로, ‘직접적인 사건을 떨어져서 고찰하여, 그 사건을 초월하여 제기할 수 있는’이란 의미로 사용되고 있다.

③ 따라서 메타인지는 인지 그 자체가 다시 인식의 대상이 되는 인지이다.

6.3. 메타인지 개념의 선행 개념: 반성, 실행적 제어, 자기조절, 타조절 개념

1) 반성

메타인지는 '인지에 대한 반성'으로 일컬어질 정도로 반성과 메타인지 개념이 동일하다고 보기도 한다. 그러나 반성은 메타인지의 여러 다양한 측면 중 일부이다.

2) 실행적 제어

정보처리모델에서 비롯된 것으로 인간의 정보처리과정을 컴퓨터의 정보처리과정과 동일시하므로 강력한 중앙 처리자를 가정하고 있고 이러한 실행적 제어를 메타인지와 비슷하게 보기도 한다. 그러나 인간은 매우 복잡한 인지 시스템이라 할 수 있으며 인지과정에서 인간의 심리적이고 정서적인 면을 고려한다는 점에서 단순한 제어 개념과 구분된다.

3) 자기조절

Piaget는 자기조절을 세 가지 수준(의식적 조절, 무의식적 자동조절, 행동적 조절)으로 구분하였으며 이러한 자기조절과정을 메타인지과정으로 볼 수도 있다. 그러나 현재 사용되고 있는 메타인지 개념은 여러 수준의 자기조절적 행위를 동시에 포괄하고 있다.

4) 타조절(타율적인 조절)

Vygotsky가 제안한 사회적 상호작용에 의하면 사람(특히 어린 아이)은 주변 사람의 중재 없이 스스로 조절 행위에 도달하지 못하는데 이러한 경우 주변 사람에 의한 타율적인 조절 행위가 필요하며 이것이 결국 내면화됨으로써 자기 조절적 기제를 획득하게 된다. 이와 같은 타율적 조절 행위는 메타인지적 조절 행위를 획득하기 위한 일종의 중재적 수단으로서의 성격이 강하다.

6.4. 인지와 메타인지의 구분

인지	메타인지
① 인지적 진전(혹은 진행)을 위해 채택된 행동 ② 산술 계산, 그래프 그리기, 작도하기 등의 단순한 행위 ③ 어느 특정 영역과 관련된 단순한 지식 ④ 시간적으로 먼저 발생 ⑤ 단지 자동적으로 혹은 무의식적으로 시도	① 인지적 진전(혹은 진행)을 모니터하기 위해 채택된 행동 ② 계획, 선택, 모니터링 등의 행위 ③ 어떤 특정한 영역과 관련된 지식을 잘 활용할 수 있는 방법에 대한 지식 ④ 시간적으로 나중에 발생 ⑤ 의식적으로 시도

그러나 우리의 사고는 끊임없는 상호작용을 통해 인지적 차원과 메타인지적 차원 사이를 빈번하게 옮겨 다닌다. 또한 이 두 차원이 동시에 발생하기도 한다.

〈영역별 핵심 내용 정리〉

1. 시각화를 활용할 때 장점 3가지는?

첫째, 시각적인 자료는 수학적인 개념 · 원리 · 법칙에 대한 직관적 인지와 즉시성과 자명성을 경험할 수 있게 도와 학생의 직관적 사고력에 영향을 준다.

둘째, 시각적인 자료는 수학문제를 직관적으로 이해하고 해결하는데 유용한 전략이 된다.

셋째, 사고영역 내에서 쉽게 지각할 수 있고 구체적으로 다룰 수 있는 대상을 이용함으로써, 문제해결에 대한 단서나 해결책을 발견하도록 하는 '예측 직관'을 경험할 수 있다.

2. 추론직관이란?

: 추론직관이란 논리적 조작에 수반되는 타당성에 대한 느낌을 의미한다.

3. 추론직관의 예 3가지는?

㉠ 구체적 조작기의 아동들이 AAA형의 정언 삼단논법을 바르게 이끌어 낸다.

㉡ 귀납추론을 당연하게 느낀다.

㉢ 수학적 귀납법은 자연수의 전개와 관련하여 쉽게 인식한다.

4. 추론직관이 학생들에게 어떠한 측면으로 사용되어야 하는가?

: 아동이 논리적 조작의 기능을 안다고 해서 실제적인 문제해결을 위해 이 기능을 자동적으로 사용하는 것은 아니며, 논리적 추론 양식이 직관적으로 동화되었을 때 즉, 내재적으로 분명하고 행동적으로 의미 있는 인지로 바뀌는 직관적인 도구로 사용되어야 한다.

(예) '네 장의 카드 문제'−카드의 한 면에 모음이 적혀 있으면 다른 면에는 짝수가 적혀 있다. 제시된 카드에 E, 4, k, 7이라고 적혀 있다. 제시된 규칙이 참인지 어떤지를 알아보기 위해 카드의 다른 면에 쓰여 있는 것을 알아볼 필요가 있는 카드는 어느 것인가?

5. 귀납추론이란?

: 관찰, 실험, 측정, 구체적 조작 등을 통하여 몇 가지 사례에 대해 어떤 명제가 참임을 보인 다음에 이 사례들이 속한 전체 범주의 대상들에 대해 그 명제가 참이라고 주장하는 추론이다.

6. 유추란?

: 유추(=유비추론)는 A라는 대상과 B라는 대상이 서로 유사할 때, A에서 성립하는 성질 P(A)와 유사한 성질 P(B)가 대상 B에서 성립할 것이라고 주장하는 추론이다.

7. 유추의 한계는?

: 유추는 귀납추론과 마찬가지로 개연성이 높은 추론이므로 절대적으로 참인 명제를 이끌어내지는 못한다. 그러므로 유추에 의해 주장한 성질에 대해서는 그 성질이 수학적으로 참인가를 확인해야 한다.

8. 수학사를 수업시간에 활용할 때 장점 3가지는?

㉠ 새로 배우는 수학개념의 발견에 공헌을 한 사람들의 전기와 일화들은 수학내용을 훨씬 더 흥미롭게 만들뿐 아니라, 수학이 '인간적인' 과목임을 보여줄 수 있다(인간성).

㉡ 학생들이 보이는 수학개념발달장애를 수학사에서도 확인할 수 있으며 이에 대한 해결책을 수학사에서 찾아 활용할 수 있으므로 학생의 오류를 더욱 잘 이해하고 그 해결을 도울 수 있다(인식론적 장애 극복).

㉢ 수학의 문화적 가치를 인식시킬 수 있다.

9. 분석법을 학교 수학에 활용하면 얻는 이점 3가지는?

첫째, 모든 수학적 지식이 이미 존재하는 결과물로 단순히 전달되거나 전수된 지식이 아닌 누군가에 의해 발견되고 논의되고 계속적으로 연구된 결과임을 알게 된다.

둘째, 모든 문제는 해결될 수 있는 과정이 있음을 학생 스스로 인식하고 문제해결에 동기유발을 얻게 되며, 스스로 문제를 해결하려고 노력한다.

셋째, 스스로 수학적 문제를 해결하거나 수학적 지식을 이해하려는 노력을 함으로써 능동적인 사고를 기르게 된다.

10. 형식불역의 원리란?

: 기존의 체계에서 인정된 성질이 새로운 체계에서도 성립할 것이라 가정하고 새로운 지식이나 내용을 확장하는 원리이다.

11. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 복소수 개념 지도와 형식불역의 원리 사이의 관계는?

: 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 이차방정식의 해의 존재성과 관련하여 복소수의 필요성을 알게 하고 이를 통해 허수 단위 i의 뜻을 알도록 하고 있다. 예를 들어, 중학교 때까지 이차방정식의 해가 실수의 범위에서 존재함을 알고 있는 학생이 '$x^2+1=0$'이라는 이차방정식의 해가 존재하는지와 관련하여 새로운 수의 필요성을 인지하고 실수보다 큰 범위의 복소수 개념을 이해하는 것은 형식불역의 원리에 따른 지도이다.

12. 형식불역의 원리는 언제 어떠한 부분에 도움이 되는가?

: 형식 불역의 원리의 발견적 측면에는 "~라면 ~이다"라는 가설-연역적 사고방식이 내재되어 있으므로 학생들의 가설-연역적 사고를 신장시키는데 도움이 된다.

13. 국소적 조직화의 정의와 예는?

: 학습자가 접하고 있는 영역에서 참이라고 인정되는 사실, 즉 학습자의 실제로부터 시작해서 부분적으로 조직화하는 활동이다. 예를 들어, 자연수의 덧셈을 알고 있는 학생이 양의 정수와 음의 정수의 덧셈을 배울 경우, 다음과 같이 귀납적 외삽법을 활용하여 이해할 수 있다.

14. 학생들의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키려면?

㉠ 학생들에게 친숙한 생활 주변의 현상, 사회 현상, 자연 현상 등을 학습 소재로 적극적으로 활용하여 학생들의 관심과 흥미를 유발하는 것이 필요하다.

㉡ 수학이 실생활의 여러 가지 문제를 해결하거나 타 교과 학습에 중요한 역할을 함을 알려주는 다양한 사례를 접하게 하고, 수학이 인류 문명의 발전에 기여하고 있는 사례를 이해하기 쉽고도 흥미롭게 알려주는 것이 필요하다.

㉢ 학생들은 관심 있는 분야의 문제를 수학적 지식과 사고 방법으로 분석하고 조직하여 문제를 해결해 보고 수학 학습에서 성공하는 경험을 쌓을 때, 수학 학습에 관심과 흥미, 학습에 대한 자신감을 가질 수 있으므로, 학생들에게 이러한 기회를 풍부하게 제공하는 것이 필요하다.

㉣ 학생들이 수학 학습과정에서 어려움을 겪을 때에는 학습과정의 문제점을 점검해 보고 문제점을 해결할 수 있도록 조언해 주며, 수학 학습에 자신감을 잃지 않도록 격려하고

도와줌으로써 학생들이 용기와 인내심을 갖고 꾸준히 수학 학습에 노력을 기울일 수 있도록 해 주는 것이 필요하다.

15. 교사가 전공수학 내용을 바르게 이해해야 하는 이유는?

㉠ 교사가 대수학에 정통한 학자는 아니지만, 대수학을 체계적으로 공부함으로써 대수학이 '알고리즘의 모임'인지 아니면 '규칙성에 관한 연구'이자 '구조에 관한 연구'인지를 구분할 수 있게 된다. 그 결과 학교 교과내용으로서의 수학 중, 대수학과 관련이 되는 부분의 내용을 풍부하게 교수 · 학습할 계획을 세워 실천할 수 있으며 대수학적 입장에 근거하여 가르칠 수 있는 구체적인 방법을 모색할 수 있게 된다.

㉡ 교사가 전공수학내용을 바르게 이해해야 하는 이유는 학교수학과 학문으로서의 수학 사이의 연계성을 바르게 이해하기 위해서이다. 예를 들어 함수의 연속에 대한 학문으로서의 수학은 $\epsilon-\delta$법에 의한 엄밀한 접근이지만 학생들이 함수의 연속을 직관적으로 이해하고 시각적으로 활용할 수 있도록 학교에서는 3가지 조건에 맞추어 지도하고 있음을 교사는 바르게 이해하여야 한다.

㉢ 교사는 전공수학내용을 학습할 때 새롭게 습득하게 되는 수학적 사고 방법을 구체화하기도 한다. 예를 들어 유클리드 기하, 비유클리드 기하, 사영기하 그리고 위상기하 등 다양한 기하를 분석하고 비교하며 구분지음으로써 함께 형성되는 분석력, 비판적 사고력 등을 수학을 배우려는 학생들에게 전수해 줄 수 있다.

09

수학과 수업의 실제

박혜향의 수학교육론 바이블

1. 수학과의 좋은 수업

1.1. 수학과의 좋은 수업의 조건

수업의 목적: 학습자를 끌어들여 학습을 촉진시킴으로써 학습의 효과를 높이는 것

1) 최근의 수학교육에 영향을 미치는 사회 분위기

① 21세기 지식기반사회에서 학교수학은 '수학의 기본 개념과 원리를 근거로 추론하고 수학을 사용하여 정보를 처리하는 능력, 실생활이나 다른 교과영역과 관련하여 수학의 문제를 해결하는 능력, 수학적 창의력, 수학적 소양[34)]'을 길러 주는데 초점을 두고 있다.

② 이러한 초점이 주가 된 이유는 종래의 계산이나 단순기능중심의 교육에서 벗어나 자기주도적으로 지적 가치를 창출할 수 있는 자율적이고 창의적인 인간의 육성이라는 시대적, 사회적 요구에 따른 것이다.

③ 결국 이러한 사회적 요구와 학교 수학교육의 목표에 따라 수학교육은 '학생 개개인의 능력과 진로 선택에 따른 수학적 문제해결능력, 언어로 표현할 수 있는 수학적 의사소통능력, 수학적으로 추론할 수 있는 능력, 컴퓨터 등의 과학 기술기기를 적절히 활용할 수 있는 능력 그리고 수학의 가치를 음미하고 자신의 능력을 신뢰할 수 있는 태도'를 신장시킬 수 있어야 한다.

2) 현재 학교수학과 수업

(1) 수학을 학생들이 어려워하거나 싫어하는 이유

① 수학은 일반적으로 자연 세계의 물리적 사상을 이상적으로 추상화한 공리, 정의를 바탕으로 하고, 합리적 추론을 통하여 이들 사이의 상호관련성을 추구하기 때문에 다른 학문에 비하여 인간 사회의 사상이나 이념을 반영하기 어렵다.

② 결국 수학의 추상성, 형식성, 계통성, 이상성, 논리성 등은 학생의 감성적, 구체적, 직관적, 현실적인 성향과는 서로 상치되기 쉬운 특성이다. 즉 추상성, 논리성, 형식성 등을 목표로 하는 중등 수학의 내용 때문에 학생들은 수학을 어려워하고 점점 자

34) NCTM(1989)에 제시된 수학교육의 한 목표이다. 수학적 소양은 단순히 기계적인 연산을 수행하는 것보다 수학적 개념과 원리를 일상생활에서 폭넓게 사용하는 것을 의미한다. 즉 학교 교육과정에 제시된 수학적 내용의 숙달보다는 일상생활에 이들을 기능적으로 사용할 수 있는 능력을 의미한다.

신과 관련이 없는 과목으로 인식하고 심지어 싫게 느낀다.

③ 따라서 수학과 학생의 거리를 본질적으로 줄어야 한다. 즉 수학을 학생의 수준에 맞게 재구성하여 제시하는 '수학의 학생화'가 필요하다.

(2) 현재 학교수학과 수업 분위기

① 수업학습 시 어떤 오류나 어려움이 생겼을 때 그것이 즉시 해결되지 않으면 그것에 이어 또 다른 오류가 발생하게 되어 수학에 대한 재미를 느끼지 못하고 그 부진이 심화되어 결국 '수학은 열심히 해도 안 되는 어려운 과목'이라 인식하게 되며 학습을 포기하게 되고 다시 능력 저하라는 악순환을 거듭하게 된다.

② 수학을 실생활에 적용하는 방법과 실생활의 내용을 수학적으로 생각하는 방법을 배우고 가르치지 않음으로 인하여 수학과 실생활을 더욱더 별개로 생각하게 된다.

③ 매스미디어의 활용 등을 권장하기 위해 ICT(information communication & technology, 정보통신기술)을 활용하여 수업을 진행하고는 있지만 오히려 학생들이 더욱 산만해지는 것 같으며 대부분 학생들이 ICT 활용 수업이나 흥미를 유발하기 위하여 다양한 자료를 제공하는 수업을 단지 재미만을 추구하거나 교사가 제시하는 내용을 쳐다보는 것으로 끝내고 있다.

④ 선행학습을 한 학생과 전혀 수업을 못 따라오는 학생들로 극단화되고 있다.

⑤ 수학성적이나 시험에 대한 결과가 높은 학생일지라도 수학에 대해 흥미를 갖지 못하고 있다.

(3) 올바른 학교수학을 위한 교육 방안

최근과 같은 정보화, 창조화 사회에서 수학이 차지하는 비중은 날로 높아지고 있다. 이는 수학교육이 합리적인 문제해결을 위해 필요한 정보를 능동적으로 수집하고, 이를 분석 · 비교 · 종합하여 유용하게 처리 · 활용할 수 있는 창의력 신장을 강조하고 있기 때문이다.

① 수학교육의 본질이나 목표에 부합하는 지도가 필요하다.

② 수학 학습에서 배양된 수학적 힘을 실생활에 활용하는 가치를 학생들이 분명히 인식하도록 지도해야 한다.

③ 수학교사는 학생들에게 기술과 도구를 반영한 현대수학을 가르쳐야 하므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술들을 수업에 통합하여 진행해야 한다.

④ 학생의 수준과 수학 학습 상태를 교사가 확실하게 파악해야 한다.

⑤ 학생들의 능력 부족과 노력 부족뿐만 아니라 교사들의 교수 · 학습에 관한 인지심리학 이론에 대한 이해 부족과 학습지도의 동기유발 부족에도 문제가 있음을 교사가 깨달아야 한다.

⑥ 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 사용하는 그리고 수업내용과 평가가 일치되는 수업과정이 요구되고 있음을 알아야 한다.

⑦ 수준별 협동학습의 필요성을 깨달아야 한다.

결론적으로, 수학교육과정 내용의 개정뿐만 아니라 교수 · 학습에 관한 연구를 강화하고, 수학의 중요성과 가치를 인식하고, 수학과 교수 · 학습에 관한 인지심리학 이론과 지도기술을 연구하고, 교사가 학생 개인별 인지능력 수준을 파악함으로써 수학을 보다 재미있게 학습시킬 수 있는 방법을 개발하여 일반화하는 일에 노력해야 한다.

3) 좋은 수업의 의미

> 현재까지 학교 현장에서는 '좋은(good)'수업을 '효과적인(effective)' 수업으로 생각하고 있었다.

(1) 제멜만, 다니엘과 하이드(Zemelman, Daniels, Hyde, 1998)

① 좋은 수업이란 학생들에게 '무엇을', '어떻게', '가르치는가'에 중점을 두어 수업을 진행하고 그 결과 학생들은 배운 수업 내용에 대해 진정한 성취를 할 수 있도록 교육적 절차와 기법을 갖춘 수업이다.

② 교사는 학습자 중심적으로 수업을 진행해야 하며 경험적, 반성적, 실질적, 사회적, 협력적, 민주적, 인지적, 발달적, 구성주의적인 수업을 전개해야 한다.

(2) 포터와 브로피(Porter & Brophy, 1998)

① 학습자들이 갖고 있는 오개념을 허용하거나 예상하는 수업

② 학습자들에게 메타인지 전략(학생 자신이 무엇을, 어떻게, 왜 학습하고 있는가를 이해할 수 있게 하는 전략)을 가르치는 수업

③ 다양한 수준의 학습목표를 제시하는 수업

④ 다른 교과영역과 통합적으로 진행되는 수업

⑤ 평가를 통하여 교사 자신들의 수업을 반성하는 수업
⑥ 교사에 의해 능동적으로 진행되는 수업

(3) 브로피(Brophy, 1999): 좋은 수업의 구성요소
① 기본적인 개념: 기본적인 개념과 원리를 익히는 기회가 충분히 제공되어야 한다.
② 지식의 깊이: 주요한 개념과 의미만 피상적으로 아는 것으로부터 벗어나 학문의 핵심적 아이디어에 관련되어 학생들이 분명하게 구별하고, 주장을 발전시키고, 문제를 해결하고, 설명을 만들어 가고 비교적 복잡한 이야기를 전개시킬 때 지식은 깊어진다.
③ 고차원적인 사고: 지식의 기계적 암송과 적용보다는 사실이나 아이디어 조작, 종합, 일반화, 설명, 가설, 결론이나 해석에 도달하는 것을 의미한다.
④ 교과 외적 관련성: 단순한 교실 수업상황을 넘어서는 가치와 의미를 가져야 한다. 학생들이 실제 세계의 공적인 문제를 논할 때 학교에서 배운 지식을 적용해 보는 장이 생긴다.
⑤ 실질적인 대화: 교과내용을 학습하고 이해하기 위한 대화의 수준으로 실질적인 대화는 주제의 아이디어에 대해 의미 있는 상호작용이 있는 것이다. 또 수업 참여자들 간에 즉각적인 의견 교환이 활발한 수업이며, 집단적인 대화를 통해 한 가지의 주제나 문제에 대해 더 나은 이해에 도달하게 되는 수업이어야 한다.
⑥ 학습활동을 지원하는 학습 분위기 조성: 학생들에게 높은 기대를 하며 학생들을 존중해 주고 학생의 노력과 참여를 독려하고 모든 학생들을 학습과정에 포함시켜야 한다.

(4) 이석주(1999)-구성주의에 입각한 열린수업
① 학생들의 고도의 지적 탐구 과정이 살아 있는 수업
② 학교 밖 세상과 교실 내 수업의 의미 있는 연결 과정이 있는 수업
③ 합리적이고 인간적인 만남이 충만한 분위기가 배경이 되는 수업
④ 양방향 의사소통과정에 의한 대화와 상호작용이 왕성한 수업
⑤ 주어진 교과과정의 목표를 적극적으로 달성한 수업
⑥ 정보가 지식으로 가공되는 과정에서의 학생 사고 과정이 중심이 되어 진행되는 수업

4) 좋은 수업에 대한 관점의 변화-구성주의

본 글라저스펠드 (von Glasersfeld)	비고츠키 (Vygotsky)
진정한 학습은 일상 학습 상황에서 다양한 정보 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 아동들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제해결을 하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신들의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다.	수업은 학생들이 아직 혼자의 힘으로는 획득할 수 없지만 교사들의 도움으로 배워 나갈 수 있는 지식과 기술의 범위인 학생들의 '근접발달영역(the Zone of Proximal Development)'에 초점을 맞추어야 한다. 즉 학생들을 근접발달영역 내에서 가르친다는 원리는 '학생들은 교사로부터의 설명, 모델링, 코칭 및 다른 형태의 지원이 필요하며 동시에 교사의 이러한 구조화와 지원은 학생들의 학습 전문성이 발달되어 감에 따라 축소되어 가는 것'을 의미한다. 따라서 학생은 학습한 것을 자율적으로 사용하는 생산적인 과제 수행자로서 성장해 나가야 한다.

① 구성주의에 입각한 수학수업방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아니라 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다.

② 학습은 사회활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간에 혹은 교사와 학생 사이에 생각한 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다.

③ 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다.

④ 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영해야 한다.

⑤ 구성주의에 입각한 수학수업은 1980년대 이래의 교육과정 개정의 방향으로써 교사 중심보다 학생 중심을 강조하고, 실생활과 학교 교육내용을 연결시키고, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두고 있다.

(예) 수학과의 좋은 수업(Vosniadou, 2001)이란 학생들을 적극적인 학습자가 되게 하여 학생들끼리 서로 협력하며, 실생활 자료와 유의미한 학습과제를 활용할 수 있도록 장려하는 수업이다.

〈제멜만, 다니엘과 하이드의 좋은 수업을 위한 교수 · 학습관점의 변화〉

교수·학습 관점의 변화		
· 강의식 전체 수업, 교사–지시 중심 수업	⇒	· 경험적, 귀납적, 실제적인 학습
· 수업 시간의 아동의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보 듣기, 정보 받기, 정보 외우기, 수업 시간에 침묵하기	⇒	· 수업시간의 아동의 능동성: 모든 아동들이 학습에 참여하면서 나오는 소음, 만들고 이야기하고 협동하는 움직임 장려하기
· 학습지, 시험지, 연습지 등을 하는 수업 시간	⇒	· 고등사고력을 강조한 중심 개념과 원리를 배우는 수업 시간
· 수업 시간: 교과서와 권장 도서 읽는 시간	⇒	· 수업시간: 원본, 전집 또는 산문을 읽는 시간
· 모든 교과영역의 많은 학습량을 교사가 직접 간단히 다루기	⇒	· 학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임 하에 학습자 자신이 직접 책을 선택하거나, 짝을 정하거나, 연구 과제를 결정하기
· 어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	⇒	· 학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 갖기
· 성적이나 학생 경쟁을 강조하기	⇒	· 교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동하기
· 능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	⇒	· 다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
· 특별 프로그램을 대용하기	⇒	· 교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도하기
· 표준화 검사에 의존하거나 사용하기	⇒	· 교사들의 관찰로 얻어진 질적 또는 일화 형태의 기술적 평가 사용하기

5) 좋은 수학과 수업의 조건 8가지

① 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

: 교사는 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습내용의 폭을 줄이고, 학습내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하고, 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하며 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 한다.

② 수학수업에서 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치라는 것을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 지도되어야 한다.

: 좋은 수학수업에서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 다양한 문제해결의 과정에 관련된 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학

생들이 설계한 문제해결활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 즉, 학생들이 수업시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에서 적용할 수 있도록 가르치는 수업이어야 한다. 이때 교사는 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다. 특히 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생 능력 양성을 위해 다음을 고려해야 한다.

㉠ 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.

㉡ 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이 가능함을 인식하도록 한다.

㉢ 학습한 내용을 관련된 교과 내 다른 영역과 다른 교과영역에 적용하도록 한다.

㉣ 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백 할 수 있도록 돕니다.

㉤ 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

③ 수학수업은 현대수학지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다. 즉 컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다.

(예) 저학년–계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배운다.
고학년–그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며 결국 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있게 된다.

이러한 기술을 이용하여 학생들은, 그렇지 않으면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 좀 더 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 갖게 된다.

④ 학생들의 선행지식(기존 지식)을 고려한 수학수업이어야 한다.

: 최근 연구 결과들은 새로운 정보를 기존의 지식에 연결시키는 능력이 학습에 필수적임을 증명하고 있다. 이때 학생들이 선행지식을 단지 지니고 있는 것을 넘어 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행지식에 관심을 기울이고 이러한 선행지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 학습이 촉진될 수 있다. 따라서 교사는 학생들이 이미 지니고 있는 선행지식을 이끌어 내고 직접 체험활동이나 사고 활동의 상황을 통하여 새로운 개념을 도입하고, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다.

㉠ 교사는 학생들이 가지고 있는 선행지식이 무엇인지 정확히 파악하여야 한다.

㉡ 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행지식을 활성화하도록 수업 시작

시 수업의 내용에 대하여 논의한다.

㉢ 때로는 학생들의 선행지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사한다.

㉣ 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어, 수업 진행에 차질이 없도록 한다.

㉤ 교사는 학생들이 선행지식과 새로운 학습내용을 연관 지을 수 있도록 적절한 질문을 제공한다.

㉥ 학생들이 선행지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.

⑤ 메타인지(meta-cognition) 학습전략사용에 초점을 맞춘 수업이어야 한다.

: 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라, 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 '메타인지(meta-cognition)' 학습전략을 가르쳐야 한다. 다시 말해, 구체적인 학습기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식할 수 있도록 안내하여야 한다. 그 결과, 학생들은 주어진 학습목표를 향한 자신의 학습진행과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고하게 되고 학습에서의 '자기 조절(self-regulation, 학습자 자신이 스스로의 학습과정을 평가하고, 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발할 수 있는 능력)'이 가능해져 학습자가 자신이 지닌 신념과 전략들을 인식하게 된다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써, 학생들이 자기 조절적인, 반성적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

㉠ 학생 자신이 문제를 해결함에 있어서 문제해결전략이나 방법을 계획하도록 한다.

㉡ 사용 가능한 가장 효과적인 학습전략들은 무엇이며, 언제 사용할 것인지를 알도록 가르친다.

㉢ 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.

㉣ 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

⑥ 학생들의 동기유발이 가능한 수학수업이어야 한다.

: 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 결국 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 특히 내적 동기가 유발된 학습자는 학습성취를

위해 더 노력하게 된다. 교사가 학습자의 내적 동기(=목표 달성에 대한 별 다른 보상이 없어도 활동에 적극적으로 참여하게 되는 행위) 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

㉠ 새롭고 흥미 있는 학습과제를 제공함으로써 학생들의 호기심과 고차원의 사고기술을 사용하도록 장려한다.

㉡ 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 조장한다.

㉢ 교사는 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.

㉣ 교사는 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가하여야 한다.

㉤ 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어들을 사용하여 피드백 할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

㉥ 학생들을 수준별이나 능력별로 분류하는 것은 노력보다는 능력이 높이 평가된다는 의미를 전달하게 되므로 수학적 성취에 따른 능력별로 학생들을 분류하지 않는다.

⑦ 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학수업이어야 한다.

: 바람직한 평가는 ㉠수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, ㉡평가가 수업과의 일관성뿐만 아니라 의도한 학습목표와 일치하며, ㉢수업의 방식과 일관성을 유지하는 평가여야 한다. 이러한 평가방향에 적합한 평가 방법이 수행평가로 수행평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행능력을 측정하고 반영하는 것이다. 수업과 평가를 통합하기 위해 교사는 다음 사항들을 주목해야 한다.

㉠ 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습표준을 개발한다.

㉡ 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.

㉢ 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가전략을 선택한다.

㉣ 상호 양립 가능한 수업 및 평가전략을 선택한다.

㉤ 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.

㉥ 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.

㉦ 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가결과들을 교수 · 학습의 개선을 위해 활용한다.

⑧ 교사는 수준별 협동학습의 필요성을 깨달아 분단이나 학급을 수준별로 편성하고, 소

집단 협력학습체제를 도입하여 서로 도우며 학습할 수 있도록 이를 적절히 운영해야 한다.

: 수준별 교육에서 교사는 지식의 소유자, 전달자 역할보다는 학생들에게 다양한 학습 기회를 제공하는 학습활동의 조직자로서의 역할이 보다 더 강조된다. 특히 수학교과는 학생의 수준 차이가 현저한 교과이므로 교사는 교과내용 지식의 전수도 중요하지만, '학생들의 생각을 읽어'그들의 주의를 집중시키고 이해를 촉진하는 방식을 고안해 내는데 더 노력을 기울여야 할 것이다. 즉 수준별 교실에서 교사는, 자신의 역할을 코치나 협력자로서 파악하고, 학생들에게 가능한 한 많은 책임을 주어 학생들이 자기주도적인 독립적 학습자로 성장할 수 있도록 도와주어야 한다.

1.2. 수학수업의 새로운 방향

1980년대 중반 이후 전 세계는 수학교육의 혁명을 수행하고 있다. 이러한 활동은 현재의 수학교육이 급격히 변화되는 사회구조의 변화에 능동적으로 대처하지 못하고 있으며, 그 결과 학생들이 21세기의 생산적인 시민이 되는데 필요한 지식을 갖추지 못하고 있다는 반성에서 출발한 것이다. 학생들은 수학의 가치를 이해할 수 있어야 하며, 수학을 행하는 자신의 능력에 대해 자신감을 가져야 하며, 수학문제 해결자가 되어야 하며, 수학적으로 의사소통하는 것을 배워야 하며, 수학적으로 추론하는 것을 배워야 한다는 것이 혁명의 주된 이념이다.

1) 구성주의 수업

수학을 안다는 것은 수학을 행하는 것이다.

① 학생들은 정보를 수동적으로만 흡수하지 않으며 많은 상황 하에서 선행지식을 갖고 새로운 과제에 접근하며 새로운 정보를 동화하고 자신의 의미를 구성한다.

② 수학 학습은 교사에 의한 일방적인 지식의 전수로 이루어 질 수 없으며 학생들 자신의 자발적인 구성을 통해 이루어져야 한다. 즉 학습의 이러한 구성적이고 능동적인 측면이 수학을 가르치는 방법에 반영되어야 한다.

③ 구성이란 교사나 상황이 제공하는 여러 가지 학습정보를 자신의 입장에서 재해석하는

과정이며, 학습은 그 재해석의 정도만큼만 이루어진다. 학습의 이러한 구성적이고 능동적인 측면은 수학을 가르치는 방법에 반영되어야 한다.

2) 의사소통 강화를 위한 협동수업

① (의의) 현대를 살아가는데 있어서 가장 필요로 하는 능력은 협동적으로 사고하고 문제를 푸는 능력이다. 학생들에게 동료들과 문제를 해결하는 과정에서 자신의 아이디어를 설득력 있게 설명하고, 다른 사람의 아이디어를 경청하고 절충하는 능력을 길러 주어야 한다.

② 학생들은 이 세상에서 만들어지는 의미의 많은 부분이 다른 사람과 의사소통함으로써 얻어진다는 것을 알고 문제해결에서도 역시 개인별로 문제를 푸는 활동과 더불어 소집단별로 문제를 푸는 활동이 중요함을 인식해야 한다.

③ 표현하기, 말하기, 듣기, 쓰기, 읽기와 같은 중요한 의사소통 기능이 수학교육에 통합되어야 한다.

㉠ 학생들의 생각을 말이나 글로 설명하게 하는 것은 그들의 아이디어를 좀 더 분명하게 이해하도록 하는데 도움이 된다.

㉡ 학생들은 자신이 알고 있는 것을 다른 사람들에게 분명하고 조리 있게 말할 수 있어야 하며, 상대방의 이야기를 주의 깊게 듣는 습관을 길러야 한다. 상대방의 이야기를 합리적으로 비판하며 합당한 대안을 제시하려고 노력하는 태도를 육성하여야 한다.

㉢ 일지를 쓰게 하거나 편지 형식으로 자신의 문제해결활동을 기록하게 하는 것은 사고 발달에 큰 도움이 된다. 또 고학년의 경우 수학적 기호의 경제성과 위력과 우아함 그리고 수학적 아이디어가 발달하는데 있어서의 기호의 역할을 음미하도록 하여야 한다.

3) 문제해결 수업

① (의의) 생산적인 시민이 되기 위해서는 그들의 문제해결능력을 개발해야 한다.

② 문제해결에서 가장 중요한 요소는 문제(problem)인데, 여기서 문제는 전형적인 학교수학에서 강조되는 연습(exercise)이나 발문(question)과는 구별되어야 한다.

㉠ 연습: 보통 교과서에 나오는 개념의 숙달을 위한 것

㉡ 발문: 주어진 개념이나 사실을 알고 있는지를 알아보는 것

문제해결에서의 문제는 수학적 개념이나 기능을 복합적으로 이용할 수 있는 것이어야 하며, 일반화로 이끌 수 있는 것이어야 하며, 얼른 해답이 떠오르지 않는 것이어야 하며, 다양한 해를 갖는 것이어야 하며, 학생들에게 재미있고 도전할 만한 것이어야 한다.

③ 문제해결은 학생들에게 생각할 수 있는 상황을 제시하고, 그 속에서 생각해 보게 하는 것에서 출발한다. 공부를 잘하는 학생이나 못하는 학생이나 최선을 다 해서 그 상황을 조직할 수 있는 기회가 제공되어야 한다.

④ 만일 해결과정에서 장애가 발생한 경우, 교사는 이 장애를 해결해 주는 장치로 발견술(Heuristic)을 제공한다. 발견술은 문제해결과정에서의 어려움을 해결하기 위해 문제 해결자가 취하면 효과적인 발문이나 제언을 말한다.

(예) Polya의 'How to Solve it': 문제해결을 '이해, 계획 수립, 실행, 반성'의 네 단계로 나누고 각 단계에서 효과적으로 사용될 수 있는 발견술을 제시하고 있다.

교사는 이러한 종류의 발견술을 완전히 마스터한 다음, 학생이 필요로 하는 경우 적절한 발견술을 발문 형태로 제시하여 학생들이 스스로 어려움을 해결할 수 있도록 도와주어야 한다.

⑤ 전략은 계획의 수립 단계에서 결정적으로 이용될 수 있는 해결책을 말한다.

(예) 초 · 중고등학교에 사용될 수 있는 전략: 추측하고 점검하기, 도표로 정리하기, 그림 그리기, 패턴 찾기, 실행하기, 구체물이나 모델 사용하기, 방정식 세우기, 연산을 선택하기, 논리적 추론 사용하기, 단순화하기, 거꾸로 풀기.

교사는 학생들이 한 문제를 해결할 때 이러한 전략들은 적절히 선택(하나 이상이 동시에 사용 될 수도 있다)할 수 있도록 도와주어야 한다.

4) 수학적 내용의 응용성과 연결성 강조

① 수학을 학습하는 중요한 이유는 수학적 지식을 생활 주변의 여러 가지 문제상황에 응용하기 위함이다. 따라서 수학수업에서 사용되는 여러 가지 소재는 실생활이나 다른 교과와 관련되어야 한다. 이러한 것이 없으면, 학생들에게 수학은 결코 의미 있는 과목이 되지 못할 것이다.

② 수학의 응용과 관련하여 최근 주목받는 것이 수학적 모델링 활동이다. 따라서 학생들은 실생활 문제를 수학적 모델링 과정에 맞추어 직접 해결해 보고 수학이 아닌 세상과 수학을 연결하는 능력을 갖추어야 한다.

> [참고] 현재의 수학교육은 이 모델링 과정 중, '모델을 이용해 해를 구하기'에만 초점이 맞추어져 있다. 따라서 나머지 단계에 좀 더 강조를 둘 필요가 있다.
> (예) 방정식을 활용한 문제해결과정 중, 방정식을 능숙하게 풀 수 있는 것도 중요하지만, 사회나 자연 현상을 방정식으로 나타내기까지의 과정이나 방정식의 해를 사용하여 원래의 현상을 해석하는 과정도 중요하다.

③ 학생들은 수학의 문화적, 역사적 진화와 관련된 다양한 경험을 통해 현대 사회의 발달에서 수학의 역할을 음미하며, 수학과 다른 학문 사이의 관계를 이해할 수 있어야 한다.

5) 계산기와 컴퓨터와 같은 교육 공학의 사용

① 그래픽과 애니메이션

㉠ 추상적인 수학내용을 시각화하여 지도하는 것이 가능하며, 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있어 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다.

㉡ 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계로 그래픽이나 애니메이션을 통한 직관적인 지도는 효과적이다.

② 시뮬레이션

㉠ 시각적 공간적 등의 이유로 실제 조작할 수 없는 경우, 실제와 유사한 상황을 제시함으로써 학생들로 하여금 직접적인 참여자로서의 역할을 수행하도록 할 수 있다.

㉡ 수학의 연역적인 성질을 경험적이고 귀납적으로 바꾸어 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

③ 계산의 신속성

산술적인 계산뿐 아니라 대수적 문자식의 변환도 신속히 처리될 수 있게 됨으로써 종래의 계산 기능 위주에서 문제해결과 같은 사고력 중심의 교육과정으로 옮겨 갈 수 있게 해 준다.

④ 컴퓨터 프로그래밍

㉠ 작성 시 오류 수정의 기회를 통해 사고력 향상을 위한 기회로 사용할 수 있다.

㉡ 오류는 예상하지 못한 엉뚱한 곳에서 일어나기 때문에 학생들의 흥미를 끌 수 있으며 오류를 제거하기 위해 반드시 무엇을 할 수밖에 없기 때문에 자신의 행동에 대한 새로운 통찰로 이끌 수 있다.

⑤ 소프트웨어 측면

㉠ LOGO 컴퓨터 언어: 초등학교부터 고등학교에 이르기까지 많은 개념을 학생들 스스로 구성하도록 하는 데 도움을 준다.

㉡ Mathematica나 하이퍼텍스트체제: 상황을 그림, 방정식, 표, 그래프와 같은 형태로 동시에 나타냄으로써 다양한 표상 사이의 개념적 연결성을 파악하게 할 수 있으며, 다른 표상에서의 변화가 다른 표상에 어떻게 영향을 미치는지를 용이하게 탐구하게 할 수 있다.

6) 평가와 수업의 통합

① 평가는 학생들이 무엇을 배워야 하는지, 무엇이 가치 있는지를 분명히 인식시키기 위해 수업내용 및 수업방법과 일관성이 있어야 한다.

② 평가결과는 피드백 되어서 수업방법이나 교실환경의 개선에 이용되어야 한다.

③ 평가가 수업을 개선하지 못한다면 그 존재 이유가 없다. 관찰이나 면담, 또는 쓰인 답안지 분석에서 나온 자료는 학생의 강점과 약점을 진단하는데 사용될 수 있어야 한다. 학생의 강점과 약점의 정밀함은 사용되는 평가 방법에 영향을 받는다.

㉠ 학생 면담: 답안지의 전체적 채점형식보다 사고과정에 대한 진단을 더 잘 제공한다.

㉡ 학생의 자기 기록이나 관찰과 같은 평가기술: 문제해결에 대한 학생들의 태도와 신념에 대한 판단을 하는 데 효과적이다. 학생의 태도와 신념에 대한 인식은 교사로 하여금 제시된 문제의 난이 수준 변화, 상황, 흥미를 조정하도록 하여 학생들이 더 잘 참여하도록 돕는다.

④ 수행평가나 탐구형 평가: 학생들의 의사소통능력을 보다 정확히 파악하게 할 수 있다.

⑤ 학생이 어떻게 수학을 행하는가에 대한 명백하고 주의 깊은 평가를 통해서만 수업이 개인의 필요에 맞추어 조정될 수 있고, 그렇게 될 때에 학생들의 성공가능성을 높일 수 있다.

7) 메타인지적 발문의 사용

① 교사는 학생들이 자신의 문제해결과정을 요약하여 기술하거나 말로 설명하도록 해야 한다.

② 학생들은 문제를 해결하는 동안 자신의 사고 과정을 모니터하고 평가할 수 있어야 한다.

③ 문제를 해결하는 동안 자신이 무엇을 하고 있고, 무엇을 해야 하는가에 대한 반성과 거기에 따른 적절한 처방을 내리는 능력을 길러야 한다.
④ 학생들은 문제해결의 각 단계에서 “왜, 그와 같은 결정을 내렸지?”를 부단히 물어 보도록 해야 한다.

8) 수학의 정의적 측면에 대한 강조

① (현실) 많은 학생들은 수학문제는 몇 분 안에 풀 수 있거나, 몇 분의 노력으로 풀지 못하면 해결할 수 없으며, 수학문제는 오직 한 가지 해결방법만을 가지고 있다는 잘못된 신념을 가지고 있다.
② 교사는 단시간 내에 해결할 수 있는 문제뿐만 아니라, 프로젝트와 같이 개인 또는 집단이 장시간 걸쳐 해결하는 과제도 제시해야 하며, 적절한 발문을 통해 학생들의 어려움을 해결해 줄 수 있도록 유도해야 한다. 그리고 학생들의 아이디어에 대해 교사의 입장에서 면박을 주거나 무시하지 않도록 해야 한다.
③ 수학을 학습한 결과, 학생들은 그들 주위의 새로운 문제상황을 이해하는데 있어서 자신의 수학적 지식이나 능력을 사용하는데 자신감을 가질 수 있어야 한다.
④ 학교 수학은, 모든 학생들로 하여금, 수학을 행하는 것이 곧 평범한 인간 활동이라는 것을 실감하도록 하게 하여야 한다.

9) 만인을 위한 수학

① 전통적으로 수학은 상급학교에 진학하는데 있어서의 여과기 구실을 해왔지만 이제는 만인을 위한 대중 수학으로 자리를 바꾸어야 한다.
② 수학이라는 과목을 학습하는 것은 단순히 지식을 알고 모르고를 떠나 정치적 사회적 결정이 기술적으로 매우 복잡한 민주국가에서는 정보를 잘 갖춘 유권자가 되기 위해, 최근의 여러 문제들(환경보존, 핵에너지, 우주탐험, 과세 등)과 같은 문제들을 이해하고 해결책을 하기 위해 기초적인 지식과 이해력을 위해 필요하다.
③ 시민들은 복잡하고 때로는 모순되는 정보를 읽고 해석할 수 있어야 하는데 이를 위한 방법으로 수학 학습이 효과적이다.

2. 학습지도안 작성 및 실제적인 수업 진행

2.1. 학습지도안 작성

1) 학습지도안의 정의

① 학습지도안이란 '학습전개안'이라고도 하며, 종전에는 교수안(敎授案) · 교안(敎案)이라 하였다. 여기에는 일안(日案) · 주안(週案) · 월안(月案) 또는 전학기를 통한 계획안이 있다.

② 지도안은 학습내용의 성질, 교재의 종류, 학습자의 요구 수준, 학습환경 등에 따른 특성을 고려하고, 필요에 따라서는 임시로 학습지도계획을 변경할 수 있도록 융통성 있게 작성하여야 한다.

③ 학습지도안에는 다음의 요건을 갖추어야 한다.

㉠ 지도안에는 예상하였던 학습목표가 어떻게 달성되었는지 그 결과에 대한 설명이 있어야 한다.

㉡ 이미 학습한 사항과 새로 학습할 사항이 연결되어 있어야 한다.

㉢ 학습과정 · 교재활동이 선택되고 조직되어 있어야 한다.

㉣ 학습진행의 형태에 걸 맞는 지도기술이 제시되어야 한다.

㉤ 목표달성의 성공도에 대한 적절한 평가 방법이 준비되어야 한다.

㉥ 앞으로 행하여야 할 학습에 관련되도록 계획되어야 한다.

④ 지도안의 형식이 반드시 일정한 것은 아니지만, 공통적인 형식으로는 제재(題材), 학습단원의 요지, 단원의 목표, 단원의 전개계획 등을 기재하여야 한다는 것이다

2) 학습지도안 작성 및 예시

① 학습지도안에는 학습목표, 동기유발 내용, 학습할 과제, 학습활동(교사 활동과 학생 활동), 보조 자료, 시간 계획, 진단과 형성평가, 가정학습과제 등이 포함되는 것이 적절하다.

② 학습목표는 학습이 끝난 후 그 도달 정도를 확인할 수 있도록 구체적으로 진술되어야 한다. 예를 들면, "~를 안다", "~를 이해한다" 등의 표현보다는 "~를 증명할 수 있다", "~를 구할 수 있다"와 같이 구체적인 행동이 나타나게 진술하는 것이 바람직하다.

③ 동기유발 내용은 수학사적 내용, 실생활이나 다른 과목에서 수학을 사용하는 실제, 본시 학습내용과 관련된 문제상황, 테크놀로지를 이용한 수학의 특성이나 아름다움 등 다양한 것들을 생각할 수 있다. 동기유발을 통하여 학생들이 그 수업에 흥미와 관심을 갖게 되었다면, 그 수업은 매우 성공적으로 출발한 것이다.

④ 학습할 과제는 단편적이고 기능적인 것보다는 개념의 이해, 수학적 사고력, 문제해결에 관한 내용을 강조하는 것이 바람직하다. 교과서에 있는 예제와 문제를 그대로 학습하게 하는 것은 예습을 해 온 학생들이 관심을 갖지 않을 가능성이 많다. 따라서 교과서에 있는 문제와 같은 수준이지만 다른 문제를 가지고 수업을 하면 학생들의 관심을 모을 수 있다. 교과서 문제의 일부는 가정 학습과제로 활용하며, 학생의 수준에 따라서 선택하여 학습하게 하는 것이 바람직하다.

⑤ 학습활동란에서 교사는 수업의 안내자로서의 역할을 하고 학생들은 학습의 주체가 되어 활동하는, 실현 가능한 가상적인 활동들이 기술되도록 한다. 이를 위해서 교사는 적절한 수업 모형을 생각하고 그에 맞는 학습활동을 충분히 사고 실험을 통하여 설정하여야 한다.

⑥ 적절한 보조 자료의 활동은 생동감 있는 학생 중심의 수업을 가능하게 한다. 구체물 조작 자료, 입체도형의 모형, 자, 컴퍼스, 색분필, 신문이나 잡지에 기재된 정보, 계산기, 컴퓨터, 보충 · 심화 과제 등은 중요한 보조 자료로 사용될 수 있다.

⑦ 시간 계획은 동기 유발, 중요한 학습내용, 정리에 필요한 시간을 계획해 두는 것이 바람직하다. 동기유발과 정리는 일반적으로 5분 정도로 한다. 동기유발과 정리에 많은 시간이 할애되면 본시 학습내용을 다룰 시간이 그 만큼 줄어들기 때문에 바람직하지 않다. 본시 학습활동 중 시간 계획에 너무 제한을 받으면 수업이 경직되거나 단절될 가능성이 많으며, 시간 계획을 고려하지 않는다면 학습활동이 지나치게 구체적이거나 간결하여 의도한 수업을 할 수 없는 경우가 발생한다. 동기유발, 중요한 학습주제, 정리에 필요한 시간을 기록하여 확인하는 것이 바람직하다.

⑧ 수업을 진행하는 동안 학생들의 준비도와 성취도를 확인하는 것이 학생들로 하여금 의미 있는 학습을 할 수 있게 하고 학생들에게 적절한 피드백을 줄 수 있는 기회를 갖게 한다. 진단평가나 형성평가의 내용은 간단한 질문으로 할 수도 있으며, 학생 활동을 관찰함으로써 할 수도 있고, 필요에 따라서는 필답시험으로도 할 수 있다.

⑨ 적당한 수준의 문제를 적당한 시간에 해결할 수 있는 가정 학습과제를 부과하는 것은 학생들이 능동적으로 학습하게 하기 위한 좋은 방법이다. 문제가 지나치게 많거나, 지나치게 어렵거나 또는 쉽거나, 지나치게 유사한 문제들만 가정 학습 과제로 부과하는

것은 바람직하지 않다. 교사는 학생들의 능력을 고려하여 과제를 주어야 하며, 과제의 결과는 반드시 빠른 시간 안에 평가하고 틀린 부분은 수정하여 학생들에게 돌려주어 반성할 수 있게 하여야 한다.

[예시1]

수학과 교수-학습지도안

<table>
<tr><td rowspan="2">단 원</td><td>대단원</td><td colspan="2"></td><td>차시</td><td>/</td><td rowspan="2">관 련</td></tr>
<tr><td>소단원</td><td colspan="2"></td><td>교과서</td><td>~</td></tr>
<tr><td>학 습
목 표</td><td colspan="5"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">지도단계
(소요시간)</td><td rowspan="2">학습내용</td><td colspan="4">교수-학습 활동</td><td rowspan="2">학습자료 및
지도상의 유의점</td></tr>
<tr><td>교사 활동</td><td colspan="3">학생 활동</td></tr>
<tr><td>도입</td><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td></td><td></td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">형평가문제</td><td colspan="6">문 항</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
</table>

[예제 2]

중학교 1학년 〈방정식 단원〉

학습 단계	학습내용	교수-학습활동		학습 자료	비고
		교사	학생		
도 입 (5 분)	▷판서 Ⅳ. 일차방정식 1. 등식과 방정식 § 1. 방정식과 그 해 [OHP1] ▶선수학습 확인 1. 다음 □안에 알맞은 수를 넣어라. (1) $\square+(-3)=10$ (2) $4\times\square=32$ 2. 다음 값을 문자를 사용한 식으로 나타내어라. (1) 170원짜리 우표 a장과 500원짜리 우표 b장의 값 (2) 사탕 120개를 35명에게 x개씩 나누어 주었을 때 남은 사탕의 개수 3. x가 다음 값을 가질 때, 3x+15의 값을 구하여라. (1) x=2 (2) x=3 (3) x=4 (4) x=5 4. 다음 식을 간단히 하여라. (1) $5x+3+6x-7$ (2) $2(x+1)+3x$ ▶학습목표제시 ▷판서 ◇학습목표 1. 등식, 방정식, 미지수, 해(근), 항등식의 뜻을 알 수 있다. 2. 주어진 값이 방정식의 해가 되는지 판별할 수 있다. [OHP2] ♧ 생각해봅시다. 수진이네 학교 합창반은 모두 38명인데, 남학생이 여학생보다 2명 더 많다. 여학생의 수를 x로 놓고, 다음 물음에 답하여라.	·인사한다. ·출석점검 −빈자리를 확인한다. · 학습 분위기 조성 −자세를 바로 하게 한다. ·선수학습 확인문제를 풀면서 전단원과 초등학교 때 배운 내용을 상기시킨다. −□안의 수 찾기 −문자를 사용한 식 −식의 값 −일차식의 계산 [답] 1. (1) 13 (2) 8 2. (1) (170a+500b) 원 (2) (120−35x) 개 3. 준식에 x=2 대입 $3\times2+15=21$ $3\times3+15=24$ $3\times4+15=27$ $3\times5+15=30$ 4. (1) $11x-4$ (2) $5x+2$ ·학습목표를 판서한다. ·실생활에서 자주 활용되고 있는 등식과 방정식의 예를 들어 학생들에게 흥미와 학습 동기 유발을 유도한다. ·OHP2 제시하고 물음을 읽게 한다. ·옆자리에 앉은 학생과 한 조가 되어서 물음1, 2를 해결하도록 시킨다.	·인사한다. ·대답한다. ·자세를 바로 한다. ·교사와 함께 문제를 풀면서 배운 내용을 상기한다. ·교사의 설명을 들으며 이번 시간에 배울 내용을 미리 짐작해 본다. ·물음을 다같이 큰 소리로 읽는다. ·교사의 지시에 따라 물음1, 2를 짝꿍과 상의해서 풀어본다.	교과서·분필·OHP·출석부	

학습 단계	학습내용	교수-학습활동		학습 자료	비고
		교사	학생		
전개 (35분)	교과서 110쪽 물음1.... 물음2.... 물음3..... 수업내용 설명 ▷판서 물음1. (38-x)명 물음2. (x-2)명 물음3. 38-x=x+2 [OHP3] 등식 5x + 2 = 6 (좌변) (우변) (양변) 등식이란? → 수량사이의 관계를 등호(=)를 써서 나타낸 식 문제풀이 ▷판서 뿌리문제 1 다음 중에서 등식을 모두 찾아라. (1) x-3=18 (2) 2×50〉80 (3) 9-2x (4) 2(x+4)=2x+8 줄기문제 2 답 (1) 2x=600 (2) x+(x+3)=25 (3) 90=7x+6 또는 90-7x=6	·모든 학생들에게 물음1, 2에서 구한 식은 어떤 관계가 있는지 질문한다. ·여러 학생을 호명하여 물음3을 질문한다. ·답을 제시한다. ·물음을 이용하여 등식의 뜻을 설명한다. ·OHP3을 제시하고 등식의 뜻을 명확히 설명한다. ·등식을 이루는 좌변, 우변, 양변의 뜻을 설명한다. ·학생들에게 교과서111쪽 뿌리문제 1번을 읽도록 시킨다. ·학생을 지명하여 등식을 찾고, 좌변과 우변을 구분하여 말하게 한다. ·답을 제시하고, 모든 학생들에게 등식의 뜻을 상기시킨다. ·문제를 읽고 학생들 각자 노트에 풀어보라고 한다. ·학생들을 호명하여 답을 말하게 한다. ·정답을 제시한다.	·교사의 질문에 귀 기울이고, 물음1, 2에서 구한 식은 어떤 관계가 있는지 생각한다. ·호명된 학생들은 대답하고 나머지 학생들은 자신의 생각과 비교 해 본다. ·답을 확인한다. ·교사의 설명에 귀 기울인다. ·문제를 큰소리로 읽는다. ·지명된 학생은 대답한다. ·교사의 설명을 듣는다. ·줄기문제 2를 노트에 푼다. ·호명된 학생은 답을 말한다. ·정답을 확인한다.	교과서 · 분필· OHP · 출석부	오답을 이야기한 학생과 정답을 얘기한 학생 모두를 대상으로 설명한다. 답은 미리 제시하지 않는다.

학습단계	학습내용	교수-학습활동		학습자료	비고
		교사	학생		
전개(35분)	[OHP4] ♧ 생각해봅시다. 문구점에서 영선이는 800원짜리 볼펜을, 현서는 200원짜리 연필을 같은 개수만큼 샀다. 또, 현서는 1200원짜리 색연필을 한 세트 더 샀는데, 두 사람은 같은 금액을 지불했다. 교과서 111쪽 물음1, 물음2, 물음3 수업내용설명 ▷판서 물음1. 200x+1200=800x 물음2. 준식에 x=1을 대입한다. 좌변 800×1=800 우변 200×2+1200=1600 ▷판서 물음3. 등식 4x=2x+4에 x=1, 2, 3각각 대입하자. 좌변 우변 4×1= 4, 2×1+4=6 4×2= 8, 2×2+4=8 4×3=12, 2×3+4=10 등식 4x=2x+4는 x=2이면 등식이 성립한다. [OHP5] 등식 4x = 2x + 4 ⇒ x에 관한 방정식 : x의 값에 따라 등식이 성립하기도 하고 성립하지 않기도 하는 등식 ⇒ 항등식 : 미지수 x에 어떠한 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식 예 3(x+2)=3x+6	·OHP4를 제시하고 문제를 끊어서 천천히 읽는다. ·옆자리에 앉은 학생과 한 조가 되어서 물음1, 2, 3을 상의해서 해결하게 한다. ·모르는 수량을 x라 놓고, 등식을 만든 후 구체적인 x의 값을 대입하여 등식을 성립하는 x의 값을 찾음을 설명한다. ·물음1, 2, 3을 판서하면서 설명한다. ·등식은 좌변과 우변의 값이 같아야 성립함을 설명한다. ·OHP5 제시하여 방정식, 미지수, 해(근), 방정식을 푼다, 항등식의 뜻을 설명한다.	·교사가 읽어주는 속도에 맞춰가며 머릿속으로 문제를 이해한다. ·교사의 설명에 따라 짝꿍과 물음1, 2, 3을 상의해서 해결한다. · 교사의 설명에 귀 기울인다. ·판서 내용을 보면서 교사의 설명에 귀 기울인다. ·교사의 설명에 귀 기울인	교과서·분필·OHP·출석부	

학습단계	학습내용	교수-학습활동		학습자료	비고
		교사	학생		
전개(35분)	문제풀이 ▷판서 뿌리문제 3 (1) $2x-1=7$ $2\times5-1=9$ (2) $5-3x=-10$ $5-3\times5=-10$ (3) $4x=6+x$ $4\times5=20,\ 6+5=11$ (4) $120=10x+35$ $10\times5+35=85$ 그러므로, (2)가 정답이다. 줄기문제 4 (1) $5x+2x=7x$ (2) $20-4x=x+6$ (3) $2x+4=6$ (4) $2(1+2x)=2+4x$ 답 (1), (4) 줄기문제5 (1) $3(x-4)=12$ $\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ (2) $6x+3=2x-5$ $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 답 (1) 8 (2) −2	·문제3을 판서하면서 설명한다. ·학생을 지명하여 질문한다. ·좌변에 있는 동류항을 계산하거나, 괄호를 풀었을 때 우변의 식과 같으면 항등식이 성립함을 설명한다. ·학생을 호명하여 칠판에 풀도록 시킨다. ·{}속에 주어진 숫자를 등식에 대입해서 등식을 성립시키는 값을 찾음을 설명한다.	·판서를 보며 교사의 설명에 귀 기울인다. ·지명된 학생은 대답한다. ·교사의 설명에 귀 기울인다. ·호명된 학생은 괄호안의 숫자를 차례로 대입하여 해를 찾는다.	교과서 · 분필 · OHP · 출석부	좌변과 우변이 같아야 등식이 성립함을 상기시킨다.
정리5분)	학습정리 [OHP3], [OHP5]제시 차시예고 § 2. 등식의 성질	·이번 시간에 배운 내용을 상기시키며 학생들에게 읽게 한다. ·의문 가는 점이 있는지 학생들에게 확인한다. ·질문 사항에 대해 대답해 준다. ·형성평가를 과제로 내준다. ·다음 시간에 배울 내용을 간략히 소개한다. ·수업을 마치고 인사한다.	·이번 시간에 배운 내용을 생각하며 큰 소리로 읽는다. ·의문사항이 있으면 질문한다. ·다음 시간까지 제출한다. ·교사의 설명에 귀 기울인다. ·인사한다.	교과서 · 분필 · OHP· 출석부	

2.2. 실제적인 수업 진행

1) 학습지도의 요령[35)]

(1) 동기유발의 방법

① 학습목표를 명확히 제시한다.
② 학습자가 학습의 필요성을 느끼도록 유도한다.
③ 학습자가 흥미를 갖도록 유도한다.
④ 학습활동에 참가하도록 장려한다.
⑤ 적절한 실례를 들어준다.
⑥ 상은 벌보다 유효하다.
⑦ 학습자의 성장과 성숙도에 적합하도록 유의한다.

(2) 발문과 응답의 요령

① 명확하고 간결한 발문을 하되 사고를 요하는 발문을 한다.
② 학습과제에서 이탈된 발문을 하지 않는다.
③ 학생의 학습능력과 학습경험에 적합한 발문을 한다.
④ 교사가 어떤 해답을 원하는가를 분명히 지시한다.
⑤ 학력 수준에 따라 고루 지명하고 응답하게 한다.
⑥ 응답을 못한 학생에게도 응답할 수 있도록 유도한다.
⑦ 정확히 응답한 학생에게는 칭찬하여 준다.

(3) 교구 · 교편물의 사용

① 학습을 능률적으로 진행하는데 필요한 자료와 교구만을 활용한다.
② 그 시간의 학습에 직접 관련된 자료와 기재만을 준비한다.
③ 수업 진행 중 그 활용의 시기와 시간을 적절히 선택한다.
④ 시청각 교재를 조작하는 지식과 기술을 익힌다.
⑤ 학생들이 잘 보이고 관찰할 수 있도록 게시 또는 장치한다.

35) 정봉도 안병즙, 『敎育實習 (1992)』 대구대학교 출판부, p.87-90.

(4) 칭찬과 질책의 요령

① 칭찬은 가급적 학생들 앞에서 하는 것이 좋다.
② 한 학생에게만 편중되는 칭찬은 옳지 않다.
③ 칭찬할 만한 행위가 끝난 직후에 칭찬하는 것이 효과적이다.
④ 질책은 학생들이 보지 않는 데서 조용히 하는 것이 좋다.
⑤ 질책은 교사의 감정을 앞세우지 말고 학생의 잘못을 이해시키는데 주력한다.
⑥ 부정적인 질책보다 긍정적인 질책이 더 좋다.

(5) 수업용어와 화술

① 어려운 말보다 쉬운 말을 사용한다.
② 발음이 분명하고 용어를 명료하게 말한다.
③ 빨라지기 쉬운 말을 의식적으로 또박또박 천천히 말한다.
④ 방언을 삼가고 표준어를 사용한다.
⑤ 말의 핵심과 중심을 용이하게 파악할 수 있도록 조리 있게 말한다.
⑥ 어려운 단어는 직역으로부터 의역으로 풀이한다.
⑦ 음성은 맑고 밝으며 음량은 교실 규모와 학습 분위기에 적당하게 한다.
⑧ 말을 유창하게 구사하기보다 교사의 애정과 자신을 보여준다.
⑨ 말의 강약, 장단, 고저 등을 변화 있게 사용한다.
⑩ 수업 내용과 관련된 실물, 실례, 명구, 일화, 시사문제 등을 몇 가지씩 준비한다.
⑪ 한 시간에 말할 내용, 시간, 순서를 미리 정한다.
⑫ 말의 소재를 학생 생활 주변에서 구하여 호기심을 끈다.
⑬ 어떤 상황, 상태의 설명보다 그 원인 · 이유를 규명하고 행동화할 수 있도록 말한다.
⑭ 교사의 말을 이해하고 흡수하고 있는지 타진하면서 진행한다.
⑮ 수업 목표를 상기하면서 수업 궤도를 이탈하지 않도록 말한다.

(6) 교단 태도

① 용모와 복장을 단정히 하여 깔끔한 모습을 보여준다.
② 언행을 조심하고 자세를 바르게 함으로써 교사의 품위를 유지한다.
③ 학생에게 친밀감과 안정감을 줄 수 있도록 친절과 성의를 보인다.
④ 자유로운 의사표시나 활동을 할 수 있도록 친절과 성의를 보인다.
⑤ 동작은 세련되고 언어는 고상하게 구사하여 학생에게 인격적 감화를 주도록 한다.
⑥ 시선은 항시 학생을 주시하여 이해도와 태도 형성에 유의한다.

(7) 과제부과 및 처리

① 학생의 학력, 능력으로 해결할 수 있는 예습, 복습, 직업 과제를 부과한다.
② 과제의 양은 과제학습의 소요 시간을 고려하여 적당량을 부과한다.
③ 획일적인 일제 부과와 더불어 학습집단의 능력별 부과도 고려하다.
④ 교사가 과제학습 결과를 검열하고 평가하기 쉽도록 부과한다.
⑤ 과제물은 반드시, 확인, 검열, 평가하여 되돌려 주고 이를 지도에 활용한다.

(8) 정리 · 평가의 요령

① 수업 종료 3분 내지 5분 전에 정리, 평가하는 것이 상례이다.
② 정리는 수업의 골자나 학습의 핵심을 요약하여 강조하거나 지적하는 것이다.
③ 평가는 학습의 내용을 어느 정도로 이해하였는가를 확인하거나 측정하는 것이다.
④ 문답, 설명, 판서, 간이 테스트, 토의, 발표 등의 방법을 사용한다.
⑤ 정리 · 평가의 목적은 학습지도의 목표 달성도를 측정하는 것이다.
⑥ 기본 형태: “오늘 배운 것은 무엇입니다.”(정리), “아는 사람은 손을 드시오.”(평가)
⑦ “오늘 배운 것을 요약해서 말하시오.”(정리 · 평가로 학생의 활동을 유도한다.)
⑧ 학생의 사고력을 충분히 발전시킬 수 있도록 관련 문제에 연결되도록 유도한다.
⑨ 평가의 결과는 기록, 정리하여 다음 학습지도의 반성 자료로 활용하도록 한다.
⑩ 평가에서 나타난 미흡한 점을 보완할 수 있는 보습지도 혹은 보습 과제를 부과한다.

2) 판서[36)]

① 판서의 종류(내용): 문장형, 낱말 나열형, 도표형, 수식형, 사진 또는 그림형, 관계도형 등
② 판서의 종류(표시 형태): 병렬형, 대조형, 구조형, 귀납형, 연역형
③ 판서의 종류(용도): 제목 제시형, 활동형, 내용형, 정리형
④ 판서는 분필로 칠판에 쓰는 방식이 가장 보편적이나, 경우에 따라서는 OHP와 화이트보드 등을 사용하여 판서하기도 한다. 또는 TV, VTR, 슬라이드 등을 이용하여 판서의 내용을 보여주기도 한다.
⑤ 좋은 판서의 요건
㉠ 학습의 방향, 목적, 주요 문제 등을 제시하는 것

36) 조희형, 박승재(1995), 『과학 학습지도』, 교육과학사, 232-233.

ⓛ 수업 내용을 요약 · 정리해 주는 것
ⓒ 중요한 내용을 구조화하거나 추상적인 내용을 구체화하려는 것
ⓔ 명료하고 정확하게 요약하는 것
ⓜ 체계적이고 계획적인 것
ⓗ 적절한 분량의 것
ⓢ 학습자 모두에게 잘 보이고, 누구나 잘 알아볼 수 있는 것

⑥ 판서의 방법 및 유의 사항
ⓖ 판서하기 전에 일체의 도구를 준비한다.
ⓛ 글자의 크기를 학습자의 시력과 수준에 맞게, 그리고 잘 알아볼 수 있게 한다.
ⓒ 칠판이 어둡거나 반사되지 않게 한다.
ⓔ 사전에 계획된 내용을 적는다.
ⓜ 그림, 사진, 도표 등과 함께 판서한다.
ⓗ 내용의 요점만 간단명료하게 구조화하여 판서한다.
ⓢ 설명과 동시에 하는 것이 좋다.
ⓞ 여러 가지 색 분필을 사용한다.

3) 설명식 수업의 기법[37)]

① 수업 과제물 제시하는 방법: 구두(口頭), 행동, 매체 등 세 가지
② 구도 제시 방법: 설명, 해설, 발문, 읽어주기 등
③ 설명: 아직 알려지지 않은 지식과 정보의 의미를 분명하게 알려 주는 언어적 교수 행위
④ 설명의 유형: 해설, 해석, 발표, 보고, 강연, 지시, 명령 등
④ 효과적인 설명법
ⓖ 평이한 설명: 학습자들 모두가 알아듣기 쉽게 설명한다.
ⓛ 논리적 설명: 설명하는 내용의 전후가 논리적으로 일관성 있게 설명한다.
ⓒ 적합한 설명: 설명의 내용과 용어가 학습자들의 수준이나 경험에 알맞다.
ⓔ 구체적 사실의 제시: 보기나 증거를 제시한다.
ⓜ 상호 비교에 의한 설명: 특징의 대조 · 비교한다.
ⓗ 통계치 제시: 정확한 이해를 위하여 측정치를 보여준다.
ⓢ 시청각 매체 이용: 직관이나 감각을 이용하는 수업에서는 시청각 매체를 사용한다.

---

37) 조희형, 박승재(1995), 『과학 학습지도』, 교육과학사, 231-232.

ⓞ 질의응답 시간 허용: 교사의 발문, 학생들의 질문, 토론 등을 통하여 설명에 대한 학생의 반응을 정확히 파악한다.
ⓩ 기타: 일람표, 도표, 회화, 사진 등을 이용하여 사실을 정확하게 보여준다.

⑤ 설명의 순서

㉠ 특별한 경우를 제외하고는 두 가지 이상을 동시에 설명하지 않는다.
㉡ 쉬운 것을 먼저 설명하고, 어려운 것일수록 나중에 설명한다.
㉢ 구체적인 것을 먼저, 추상적인 것을 나중에 설명한다.
㉣ 단순한 것을 먼저, 복잡한 것을 나중에 설명한다.
㉤ 내용의 특성에 따라 귀납적으로 또는 연역적으로 설명한다.
㉥ 결론이나 요점은 설명을 시작할 때와 끝마칠 때 두 번 제시한다.

⑥ 설명의 기법

㉠ 음성의 높낮이에 융통성과 변화성이 있어야 한다. 맑은 음성일수록 알아듣기에 좋다.
㉡ 발음은 언제나 정확하고 또렷또렷해야 하며, 표준말을 사용하는 것이 이상적이다.
㉢ 말은 재치가 넘치고 말솜씨가 좋아야 하며, 그 내용은 간단명료하게 한다.
㉣ 말하는 태도가 늠름하고 씩씩해야 하며, 겸손하고 예절바르게 말해야 한다.
㉤ 성심성의껏 설명하는 태도가 필요하다.
㉥ 가능한 한 밝은 표정으로 설명해야 하며, 설명에 따라 표정을 바꾸는 것이 좋다.
㉦ 표정을 바꿀 때는 유머를 사용하는 것이 좋다.

3. 여러 가지 수업방법: 강의식-일제식 수업, 협동학습, 창의력 신장 학습

3.1. 강의식-일제식 수업

1) 강의식 수업

강의식 수업은 대부분의 수업시간에 학생들이 획득해야 할 지식이나 행동을 교사의 일방적인 의사소통으로 수업을 전개하는 전통적인 수업이다. 만약 체계적 조직적으로 강의를 준비하고 능수능란하게 강의를 전달하게 되면, 강의식 수업은 사실상 기대하는 학습목표를 효과적으로 성취시키면서도 효율적인 학습이 이루어질 수 있는 수업이다.

(1) 강의식 수업의 개념적 정의

① 강의식 수업이란 사전에 계획한 강의 안에 따라서 지식의 체계(학습내용에 담겨있는 아이디어나 절차나 사실 등을 구조화하고, 그것들을 받아들이고 해석하고 반응하게 될 학생들에게 전달해 주는 활동)를 언어를 통하여 전달하는 과정이다. 당연히 강의식 교수법은 일방적인 의사소통으로 이루어진다. 즉 강사는 아이디어와 개념을 전달해 주고, 아이디어와 개념을 개발하고 평가해 주며, 강의를 마칠 무렵에는 중요한 강의 내용을 요약해 준다.[38)]

② 강의식 수업은 초등학교에서는 적용하기 어려운 방법이며 중학교 저학년 수준에서도 널리 활용하기는 힘든 교수방법이다. 대체로 중등학교 고학년 수준 이상에서 적절한 교수방법이다.

③ 강의식 수업의 전개과정에는 인지적인 활동과 사회적 활동이 동시에 포함되어 있고 교사는 지적 기능뿐만 아니라 인간 상호간의 의사소통 기술도 갖추고 있어야 한다.

(2) 강의식 수업을 적용하는 것이 바람직한 수업상황과 부적절한 수업상황

강사의 기본적인 목표가 지식이나 정보를 학생들에게 전달해 주려는데 있을 때, 강사가 아니면 정보를 얻을 수 있는 곳이 없을 때, 정보가 다양한 집단에 적응되어야 할 필요가

---

38) 강의가 진행되는 동안에 일반적으로 학생들에게 질문을 권장하지는 않으며, 경우에 따라서 학생들이 질문을 제기하는 경우에는, 강사는 사실과 정보의 명료함에 주안점을 두고 있고 고차적인 논의는 하지 않는다. 물론 강의식 교수법에서는 청취 기능과 노트정리 기능이 상당한 정도로 숙달되어 있어야 한다. 강의 도중에 강사나 수강자에 의해서 질문들이 제기되게 되면 그러한 교수법의 형태는 강의식-토의식 교수법이라고 말하는 것이 더 적절할 것이다.

있을 때, 학습주제에 대한 흥미가 유발되어 있을 때, 정보를 단지 짧은 기간 동안에 회상해야 할 때, 강의의 개요를 소개하거나 다른 학습활동을 위한 지시사항을 안내할 때 등에서는 강의식 수업이 효과적이다.

바람직한 수업상황	부적절한 수업상황
① 새로운 주제나 단원을 소개할 때 ② 쉽사리 획득하기 어려운 중요한 자료를 제시하고자 할 때 ③ 교과서의 내용을 보완하고자 할 때 ④ 학습흥미와 이해력을 증진시키고자 할 때 ⑤ 학습단원을 마친 후에 중요한 내용을 요약해 줄 때 ⑥ 짧은 시간 안에 많은 자료를 소개하고자 할 때	① 정보의 획득에 초점을 두고 있지 않는 수업목표들을 가르칠 때 ② 정보가 매우 복잡하고 추상적이고 세부적일 때 ③ 수업목표 성취를 위해서 학습자의 능동적 참여가 요구될 때 ④ 학습내용의 분석, 종합, 통합이 요구될 때 ⑤ 학생들의 학업성취수준이나 능력수준이 중간 이하일 때

(3) 강의식 수업의 장점

강의식 수업은 의심할 여지없이 가장 경제적인 교수방법 중의 하나이며, 의사소통이나 지식전달 기법중의 하나로써 다양한 장점을 지니고 있는 교수방법이다.

① 한 사람의 강사(교사)가 많은 학생들을 동시에 가르칠 수 있어 시간상 경제적이다.

② 학생들이 학습하게 될 지식의 범주를 교사가 완전히 이해하여 학생에게 맞추도록 지도하므로 학생들은 정확한 지식을 쉽게 이해하고 많은 노력 없이도 확장해 나갈 수 있다(학생들의 시간과 노력 절약).

③ 강의 노트는 강의를 받은 후에도 언제든지 활용할 수 있으므로 장기간 학습상태를 이끌어 갈 수 있다.

④ 학생들의 요구를 고려하면서 교사가 주관적으로 주제에 적절한 이해의 수준을 소개하고 강의를 이끌어가기 때문에 학생들에게 학습에 대한 흥미를 고취시켜 줄 수 있다.

(4) 강의식 수업의 단점

① 학생들은 교사의 경험과 교사의 강의 속도에 따라 학습을 해야 하므로 지도 내용에 대한 준비도나 이해력이 부족할 경우 교사의 전달을 이해하지 못하거나 잘못 받아들이게 된다.

② 학생들의 지식활동을 촉진시켜 주는 자극이나 참여의 과정에 제한을 받는다.

③ 탐구하거나 창의력을 발휘할 기회가 주어지지 않으므로, 능동적으로 창의적인 사고를 하기보다 단순한 기계적인 청취자와 같은 수동적이고 의존적인 사고를 하게 된다.

④ 학생들에게 언어적인 의사소통능력을 충분히 길러주지 못한다.
⑤ 학생들은 호의나 질문 제기를 위해 기회를 잘 포착하지 못한다.
⑥ 교과서에 담긴 내용을 주로 강의해 주기 때문에, 학생들이 스스로 읽어서 이해할 수 있는 내용의 경우에는 시간 낭비를 초래한다.
⑦ 강의 도중에는 학생들의 참여율이 낮기 때문에 학생들의 이해 수준을 거의 평가하지 않게 된다. 또한 강의 도중에는 교사가 강의에 대한 학생들의 이해 수준을 판단하기가 쉽지 않다.

2) 일제식 수업

(1) 일제수업의 개념적 정의
① 일제수업이란 일정한 집단의 학생들에게 동일한 교수법을 적용하여 동일한 내용을 일시에 지도하는 교수 · 학습형태를 지칭한다. 즉 일제수업은 일반적으로 학생 개개인의 독특한 능력, 관심, 학습요구 등을 면밀하게 고려하지 않고, 일인의 교사가 동일한 교과내용에 대하여 교사 나름대로 설정한 학습내용 수준에 따라서 교사중심의 전달식 교수방법으로 일제히 학습시키는 것을 말한다.
② 일제수업은 산업혁명 이후에 교육 기회의 평등화라는 이념 하에서 현대식 학교교육의 대중화가 이루어지면서 보편화되었고, 그 결과로 과다해진 교육인구를 가르치는 과정에서 일제수업은 그것 자체가 안고 있는 약점에도 불구하고 학교교육의 기본적인 교수방법으로 정착되게 되었다. 결국 학교수업이란 동시에 모든 학생들에게 동일한 교과내용을 똑같은 교수방법으로 전달해 주는 것으로 인식하게 되었다.
③ 일제수업은 어느 지역, 어느 연령층에 관계없이 적용 가능한 수업이다.

(2) 일제수업의 장점
① 인류가 쌓아온 엄청난 양의 지식과 그 체계는 그러한 내용을 잘 알고 있는 교사가 조리 있게 학생들에게 가르쳐 주는 것이 효과적이고 능률적이다.
② 투철한 교육관, 바람직한 교육목적관, 가치 있는 교과관, 발전가능성을 지닌 학생관, 전문적인 교수방법관 등을 지닌 유능한 교사의 경우에는 비록 교사 중심의 일제수업이라 할지라도 같은 내용을 학습시키는데 있어서 학생들의 학습생리를 파악해가면서 융통성 있는 수업전개와 함께 효과적으로 학습을 이끌어 갈 수 있다.
③ 학교교육의 대중화와 함께 보편화되어 온 일제수업은 지난 수세기 동안 학교교육의 전형적

인 수업방식으로 활용되어 왔기 때문에 교사나 학생들이 익숙해져 있어서 교수 · 학습활동의 전개에 혼란을 가져오지 않고 교사와 학생 모두가 적응하기 쉬운 교수법이다.

④ 다인수 집단의 학생들을 최소의 경비로 일인의 교사가 동시에 지도할 수 있다.

⑤ 일제수업은 교사의 능력 수준과는 무관하게 쉽사리 적용할 수 있다.

(3) 일제수업의 단점

① 학습자들의 개인차를 무시한 수업방식이기 때문에 진정한 의미에서 모든 학생들의 학업을 철저히 돌보아 줄 수 없게 되고 따라서 대부분의 학생들이 기대하는 성취수준을 달성하기 어렵다.

② 이질적인 다인수의 학생들에게 동일한 교수법을 적용하게 됨으로써 학습자들이 학습흥미를 상실하게 되며 또한 학습자들의 문제해결력이나 창의력을 신장시키지 못하게 된다.

③ 일제수업은 전적으로 교사의 교수능력에 의존하게 되므로 교사가 우수한 교수기술을 갖추고 있지 못하면 학업성취의 실패를 초래하게 된다.

④ 일제수업은 대체로 교과의 특성을 고려하지 않고 획일적인 전달식 수업에 치중하게 되므로 일반적으로 침체된 교수 · 학습 활동이 전개되기 쉬우며, 또한 학생들의 수업참여활동은 극히 제한되게 된다.

⑤ 일제수업은 그 특성상 교과서 중심의 설명식 수업 또는 강의식 수업을 이루게 됨으로써 대체로 학생들은 암기식 학습을 수행하게 된다. 그 결과로 교육에서 지향하고 있는 고등정신기능이나 문제해결력 및 사고력의 신장을 도모할 수 없게 된다.

(4) 일제수업의 개선과 학습강화 방안

① 일제수업에 흡수될 수 있는 다양한 교수기법의 개발이 필요하다.

㉠ 교사주도수업에서 학생참여수업으로 전환시키면서 일제수업과 병용하는 방법이 효과적이다.

㉡ 학생들의 능력이나 특성에 따라 학습집단을 편성하여 소집단 수업을 운영할 수 있고 또는 협동학습전략을 도입하여 교사의 지도 하에 학생들이 능동적으로 학습과제를 해결해 가면서 학습자 개개인이 자신의 독특한 능력요인을 키워가고, 아울러 학업에 대한 만족감을 모든 학생들이 가질 수 있도록 수업을 운영할 수도 있다.

㉢ 학습주제와 관련된 내용에 대하여 야외에서 관찰학습이나 조사학습을 실행시키는 방법도 효과적이다.

② 교수자료의 다양한 체제 개발이 필요하다.

㉠ 학습내용의 중간 중간에 학습단서 내지는 학습암시를 던져주는 적절한 질문, 학습목표, 요점 등을 삽입시킨다.

㉡ 교수 · 학습 자료의 내용제시 방식을 순차식 · 나열식이 아니라 “눈덩이 방법” 또는 “줌렌즈 방법” 등으로 도입한다.

ⓐ 눈덩이 방법: 첫 번째 학습내용을 숙달한 후에 두 번째 학습주제를 숙달하고, 첫 번째와 두 번째의 학습주제를 통합하여 숙달하고 나서 세 번째 학습주제를 숙달하고 그 다음에는 첫째, 둘째, 셋째, 학습주제를 통합시키는 방식으로 계속적으로 지식의 연결고리를 탄탄히 확장시켜 나가면서 학습력을 높여주는 방법이다.

ⓑ 줌렌즈 방법: 지식의 전체 체계나 개요를 학습시킨 후에 하나하나의 내용요소를 세부적으로 파악해 들어가고, 다시 전체 체계와 세부적 내용 요소와의 관련성을 확인해 보는 방식이다.

③수업의 체계적 접근원리가 필요하다.

㉠ 수업의 체계적 접근이란 교수 · 학습 활동의 효과성, 효율성, 매력성, 적절성, 일관성 등을 높여주기 위하여 검토해 보는 것을 말한다.

㉡ 교수목표설정의 타당성, 학습자의 학습준비도 파악, 교과내용의 분석, 구체적 수업목표의 진술, 학업 성취평가의 실시 등등의 각 단계를 절차적으로 적용하는 것이다.

④ 공학적 교수매체를 도입한 개별화 교수를 실현해야 한다.

⑤ 교사의 다양한 교수기술 개발이 필요하다.

3.2. 협동학습

1) 협동학습의 개념적 정의

협동학습은 학생들이 공동의 과제를 함께 공부하고 서로 격려하는 수업방법이다. 이질적인 학생들이 소집단을 구성하여 공동과제를 서로 도우며 해결하고 책임을 공유하면서 다 같이 학습목표에 달성하도록 하는 방법이다.

(1) 협동학습의 정의와 의의(Slavin, 1980)

① 협동학습이란 학생들이 학습집단에서 학습활동을 하고 그 집단의 성적에 기초하여 보상과 인정을 받는 교실 상황에서의 학습방법이다.

② 협동학습은 소집단 구성원들이 공동의 학습목표를 가지고 그 목표를 달성하기 위해서 역할을 분담하고 개별적인 책무성을 가지고 다른 구성원들과 도움을 주고받아 집단 구성원 모두에게 유익한 결과를 얻고자 하는 학습전략이다.

③ 학습능력이 각기 다른 학생들이 동일한 집단목표를 향하여 소집단에서 함께 활동하는 수업방법이다.

④'전체는 개인을 위하여(all for one), 개인은 전체를 위하여(one for all)'라는 태도를 갖게 함 으로써 학습부진을 개선할 수 있다.

(2) 협동학습의 주요 구성요인

① 집단목표인식

② 개별적 책임감

③ 성취결과의 균등배분

④ 과제의 세분화

⑤ 개인적 욕구의 반영

⑥ 소집단간의 경쟁

⑦ 긍정적 상호의존성

(3) 협동학습의 이론적 기초

① (Piaget 학파) 보존개념은 친구들과의 상호작용을 통해 학습된다. 학습내용에 대한 토론과정을 통해 인지적 갈등이 상승하고 부적절한 추론과정이 드러나며 인지적 불균형이 발생한다. 그리고 이를 해결해 나감으로써 질 높은 이해가 가능해진다. 이때 비슷한 수준의 학습자들로 소집단을 구성하는 것이 필요하다.

② (Vygosky, 1978) 교사나 더 높은 수준의 동료 학생과의 협동적 활동은 서로의 근접발달영역(The Zone of Proximal Development, ZPD)을 자극시켜 지적 능력이 향상된다. 특히, 교사나 더 높은 수준의 동료 학생을 모방하다가 아동에게 내면화되었을 때 잠재적 발달 수준이 실제적 발달 수준이 된다.

2) 협동학습의 다양한 모형들

학생집단학습(Student Team Learning : STL) 유형: 집단 내에서 협동을 하지만 집단 간에는 경쟁을 유도	협동적 프로젝트(Cooperative Project : CP) 유형: 집단 내에서 뿐만 아니라 집단 간에도 협동학습을 강조
① 학생팀 성취보상법(Student Teams Achivement Division: STAD) ②토너먼트 게임식 팀학습 (TeamsGames Tourarment: TGT) ③팀보조 개별화 학습 (Team Assisted Individualization: TAI) ④ 직소 Ⅱ(Jigsaw Ⅱ) ⑤독해-작문협동학습(Cooperative Integrated Reading and Composition: CIRC)	① 직소 Ⅰ(Jigsaw Ⅰ) ② 자율적 협동학습(Co-op Co-op) ③ 집단탐구법(Group Investigation: GI) ④ 함께 학습하기(Learning Together: LT)

(1) 학생 팀성취 보상법(STAD)

① 미국 존스홉킨스대학교의 Slavin 등(1981, 1990)에 의해 개발돼 STL 프로그램 중 하나이다.

② 기본기능의 습득이나 지식의 이해를 촉진시키기 위하여 고안된 방법이다.

③ 집단보상, 개별적 책무성, 성취결과의 균등배분을 포함한다.

④ 4~5명의 팀원을 구성한다.

⑤ 전개절차

㉠ 교사는 학급의 전체학생들을 대상으로 학습할 내용을 소개한다.

㉡ 학생들은 4~5명이 한 팀을 이룬 후, 팀 구성원 모두가 서로 가르치고 배우면서 동료의 학습을 지원하고 조정해 준다.

㉢ 모든 학생들은 각자 형성평가를 받는다.

㉣ 형성평가점수는 각 학생의 과거 점수와 비교하여 향상점수가 산출되게 되고, 개인별 향상점수는 협동 팀의 총점수로 환산된다. 이때 개인별 향상점수의 환산은 다음과 같이 한다. 각 팀에서 개인별 형성평가점수가 1위인 학생들을 뽑아서 차례로 1, 2, 3등에게 8, 6, 4점을 그리고 나머지 학생들에게는 2점을 팀 점수로 환산하여 준다. 또한 각 팀별로 2위인 학생들끼리, 3위인 학생들끼리 뽑아서 1위 학생들끼리의 점수 환산 방식과 같은 방식으로 비교하여 개인별 형성평가점수를 팀 점수로 환산한다.

㉤ 개인별 향상점수를 팀 점수로 합산한다. 이때 향상점수는 기초점수(지난 평균점수에서 5점을 뺀 것)와 형성평가점수간의 차이점수를 말하며, 최대로 10점까지 부여한다.

각각의 학생들은 자신의 과거 점수보다 좋은 점수를 얻어서 집단에 공헌한다.

ⓑ 향상점수와 팀 점수를 공고하고, 정한 규칙에 따라 집단보상을 한다. 이때는 최고 득점자와 팀 점수가 가장 높은 집단에게 보상을 준다.

ⓢ 학기말 성적은 기본적으로 개인의 득점수를 부여하나 때로는 향상점수와 팀 점수를 포함시키기도 한다.

⑥ 장점

㉠ 처음으로 협동학습을 시도하려는 교사에게 적용하기가 쉽다.

㉡ 학문적 목표와 긍정적인 상호 의존성을 동시에 달성할 수 있다.

㉢ 모든 학습자는 보상 앞에 평등하다.

㉣ 모든 학습자가 개별 책무성을 가지고 있기 때문에 적극적인 학습자가 될 수 있다.

㉤ 각 집단의 향상점수를 집단 보상을 하기 때문에 집단 간에 편파 문제를 해결할 수 있다.

⑦ STAD 협동학습의 특징

㉠ 구성원 각자의 목표뿐만 아니라 집단의 목표가 있어 서로 돕고 도움을 받으려 한다.

㉡ 집단에 대한 책무성과 과제에 대한 세분화가 이루어져 개별적 책무성이 강조됨으로써 개인의 능력을 최대로 발휘할 수 있다.

㉢ 개인의 능력에 관계없이 집단에 기여할 수 있는 성공의 기회가 균등하게 주어져 스스로 노력하게 된다.

㉣ 소집단간의 경쟁이 유발되어 구성원들의 결속이 다져지고 구성원들의 학습동기가 촉진된다.

(2) 토너먼트 게임식 팀학습(TGT)

① 기본적 기능의 습득과 이해력 · 적응력의 신장에 초점을 둔 방법이다.

② 전개절차는 STAD와 유사하나 개인별 형성평가 대신에 각 팀에서 사전성취도가 비슷한 수준의 학생들이 토너먼트 게임식 팀학습을 하는 것이 다르다.

④ 이 방법을 사용하기 전에 교사의 수업을 먼저 듣고 팀의 구성원 간에 서로 가르쳐주는 협력학습을 수행한다.

⑤ 팀별로 학습이 끝나면 각 팀에서 사전성취도가 우수한 3명을 선발하여 첫 번째 토너먼트 게임에 참여하고, 다음의 성적우수자 3명이 두 번째 토너먼트 게임에 참여하게 된다.

⑥ 토너먼트 게임에 참여하는 학생들은 학습한 내용과 관련된 문항들 중에서 우선적으로 숫자카드를 뽑아내고 그 카드번호에 해당되는 문항에 답을 한다. 여기에서 얻은 각자의 점수는 팀의 총점으로 합산되며, 이때 향상점수는 이용하지 않는다.

(3) 팀보조 개별학습(TAI)

① Slavin 등(1981) 존스홉킨스대학교에서 산수과 개별화학습 프로그램에 적용하고자 개발된 것이다.

② 학생들은 사전검사를 받고 난 후, 그 결과에 따라서 4~5명의 능력수준이 다른 학생들로 협동학습집단을 구성하게 되며, 집단 내에서 학생들은 개인별로 능력수준에 부합되는 학습과제를 수행한다. 각각의 학습과제는 단계적 습득을 위한 지시와 설명문, 문제해결기능의 연습문제지, 답안 점검지, 정답지 등으로 구성되어 있다. 학생들은 4문제를 해결한 후 팀의 동료와 교환하여 정답을 채점한다. 4문제를 모두 맞추면 다음의 학습문제로 넘어가고, 오답이 있으면 다른 4문제를 또 다시 풀어야 한다. 이와 같은 방식으로 문제해결기능 연습문제를 모두 마치면, 능력평가를 받게 되고, 능력평가에서 8문제 이상을 정답하면 최종평가를 받게 된다. 팀의 구성원들이 각자 학습하는 동안 교사는 매일 15~20분간의 개별지도도 병행한다. 팀은 매주 1회씩 학습한 단원에 대하여 평가점수를 받게 되고, 성취목표를 달성한 팀은 우수한 팀으로써 보상을 받는다.

(4) 직소 Ⅰ(Jigsaw Ⅰ)

① 1978년에 미국 텍사스 대학교의 Aronson과 그의 동료들이 개발한 협동학습모형으로써 학업성취 뿐만 아니라 인종 · 문화 간의 교우관계 형성과 같은 정의적 특성의 형성에 관심을 두고 있다.

② 집단구성은 5~6명의 이질집단으로 구성되고, 하나의 학습단원을 집단구성원의 수에 맞게 나눈 후에 학습자들에게 한 부분씩 할당한다.

③ 한 학급은 여러 개의 직소 집단으로 구성되며, 각 집단에서 같은 부분을 담당한 학생들끼리 따로 모여 전문가 집단을 형성한 후, 분담된 내용을 토의하고 학습한 후에 제각기 소속된 집단으로 되돌아가서 학습한 내용을 집단구성원에게 가르친다. 단원의 학습을 마치고 나면, 학생들은 퀴즈를 보고 개인별로 성적을 받게 된다.

④ 직소Ⅰ 모형에서는 과제 해결력의 상호의존성은 높으나 보상의 상호의존성은 낮은 편이다. 다시 말하면 퀴즈점수는 팀 점수로 합산되는 것이 아니고 개인별로만 점수를 산출하게 된다.

⑤ 학습과제의 해결을 위하여 개인별로 과제의 일부분을 분담해서 맡게 되며, 이때 학생들 간에 적극적인 협동 태도와 동료의 말을 경청하는 태도를 길러주기 위해 일련의 훈련과정을 제공해야만 한다.

(5) 직소 Ⅱ(Jigsaw Ⅱ)

① Slavin(1983)이 직소Ⅰ을 수정하여 개념 중심의 학습내용을 가르치려는데 목적을 둔다.

② 학급집단은 5~6명으로 구성되며, 학습 과제는 몇 개의 소주제로 나눈 후에 각각의 학생에게 하나의 소주제를 맡도록 한다. 그리고 각 팀에서 동일한 주제를 맡은 학생들이 따로 모여 전문가집단을 구성한 후 30분 동안 공동으로 토론을 하고, 다시 소속팀에 돌아와 전문가 집단에서 학습한 내용을 동료들에게 가르쳐준다. 끝으로 학생들은 개인별 형성평가를 받게 되고, STAD에서처럼 향상점수와 팀 점수를 산출하게 되고, 그 결과에 따라 보상을 받는다.

③ 직소Ⅰ보다는 보상 상호의존성을 높여준다.

(6) 자율적 협동학습(Co-op Co-op)

① 학생들로 하여금 자신의 학습과제를 선택하도록 하고 자신과 동료들의 평가에 참여하도록 허용하는 모형이다.

② 기본적으로 고차적 인지과정의 학습을 위해 개발되었으나 기본기능의 학습에도 적용이 가능하다.

③ 절차: 먼저 교사-학생간의 토의를 통해서 학습과제를 선정한다. 그리고는 교사에 의해서 이질적인 학생 팀이 구성된다. 이어서 팀 형성 및 협동기능(team building/cooperative skill)의 습득을 위한 훈련을 받는다. 팀이 형성되면 각 팀은 주제를 선정하고 이것을 하위부분으로 나누어 팀 구성원들이 그들의 흥미에 따라 분담을 한 후 개별적으로 이것에 대한 정보를 수집한다. 그 다음 각자가 학습했던 소주제들을 팀 구성원들에게 제시한 후 종합하여 팀의 보고서를 만들고, 이것을 다시 전체 학급에 제시한다. 마지막으로 평가단계로서 학생들은 세 가지 수준에서 평가가 이루어진다.

㉠ 팀 동료에 의한 팀 기여도 평가

㉡ 교사에 의한 소주제 학습기여도 평가

㉢ 전체 학급 동료들에 의한 팀 보고서 평가

교사는 개인의 성적을 낼 때, 세 가지의 평가 중 어느 것에 비중을 더 둘 것인가를 임의로 결정할 수 있다.

(7) 집단탐구법(GI)

① GI는 집단프로젝트 수행을 통해서 고차적 인지기능의 습득에 관심을 둔다.

② 학생들은 2~6명의 팀으로 구성되며, 학습과제는 집단구성원들이 공동으로 협의하여

선정하게 되며, 선정된 학습과제와 관련된 하위 주제들을 학생들의 흥미에 따라 선정하고 개인별로 하위 주제를 하나씩 맡아서 해결한다. 그러므로 다양한 학습경험을 제공해 주게 된다.

③ 전개 절차는 다음과 같다.

㉠ 주제의 선정과 학습집단 조직하기

㉡ 학습과제를 하위의 소주제로 세분화하고 소주제를 학생들에게 할당하기, 그리고 소주제의 해결계획을 수립하기

㉢ 집단목표와 소주제를 관련지으면서, 과제해결방안에 관하여 토의하고 종합하기

㉣ 최종보고서 작성 및 발표내용 정리하기

㉤ 각 집단은 학급에서 집단별 과제해결결과를 발표하기

㉥ 학습결과를 종합적으로 평가하기

(8) 함께 학습하기(LT)

① LT 모형은 미국 미네소타대학교의 David Johnson과 Roger Johnson에 의해 1975년에 개발된 '함께 학습하기(Learning Together)' 모형으로 편의상 Johnson 방법이라 칭한다(Johnson&Johnson, 1987).

② 집단구성은 능력수준이 다른 6~10명으로 편성하고, 과제는 집단별로 부여하고 평가 및 보상도 집단 단위로 하게 된다.

③ 시험은 개별적으로 시행하나 성적은 소속된 집단의 평균점수를 받게 되므로 자기 집단 내 다른 학생들의 성취 정도가 개인의 성적에 영향을 미친다.

④ 집단 평균 이외에 집단 내 모든 구성원들이 정해진 수준 이상에 도달했을 때, 각 집단 구성원들에게 보너스 점수를 주기도 한다. 즉 학생들의 협동적 행위에 대해서 보상을 줌으로써 협동을 격려하고 조장한다.

⑤ 협동 행위의 사례로는 의견이나 정보교환, 학습과제에 대한 질문과 응답, 다른 구성원들을 격려하는 말이나 행위, 그리고 이해 정도를 확인하는 일 등이다. 이러한 행위들이 수행되었다고 판단됐을 때 그 집단구성원들에게는 보너스 점수를 준다.

⑥ 장점

㉠ 모형이 매우 포괄적이고 일반적이기 때문에 적용에 있어서 융통성이 매우 높다.

㉡ 이 모형은 팀 간의 순수한 협동뿐만 아니라 팀 간 경쟁도 허용하고 있기 때문에 교사는 자신의 교육관이나 학급의 특성 등에 비추어 융통성 있게 적용할 수 있다.

㉢ 학생들의 협동적 학습기능 등이 크게 증진될 수 있다.

⑦ 단점

㉠ 모형이 포괄적이어서 실질적인 도움이나 안내를 얻기가 어렵다.

㉡ 학생들에게 협동기능의 신장을 시킬 수 있는 충분한 훈련이 이루어져야 한다.

3) 협동학습의 교육적 의의

① 역할보완성: 협동적인 관계에 있는 구성원 중에서 한 개인이 특정의 학습행동을 수행하도록 되어 있다면 다른 사람은 똑같은 학습행위를 반복할 필요가 없다.

② 적극적 과정집중력: 한 개인이 목표달성을 위하여 맡은 역할을 적극적으로 성공적으로 수행하게 될 때, 다른 동료들에게도 적극적인 학습참여를 유발하게 될 뿐만 아니라 또한 동료들로부터 받게 되는 호의적 평가는 과정성취를 촉진하게 된다.

③ 유인성: 한 학생이 목표달성을 위해 동료들을 자극하면, 서로가 수용적인 태도로 과업성취에 필요한 행동에 몰두하게 된다. 각 개인의 과업성취를 위해서 맡은 역할이나 임무를 성실히 수행함으로써, 집단구성원은 모두가 집단적인 사고과정 및 집단탐구, 협력활동의 의미를 이해하게 되고 모두가 성공적인 경험을 쌓게 된다.

④ 학습과제의 해결을 효율적으로 수행할 수 있고, 학생들이 적극적으로 학습활동에 참여하게 할 수 있으며 학생들 상호간에 긍정적인 인간관계를 형성하도록 촉진하는데 도움을 준다.

⑤ 협동학습은 상호이해, 타인에 대한 긍정적인 태도형성, 상호의 관심, 정중함, 친절함, 책임감, 상호존경심 등을 길러주는데 효과적이다.

⑥ 협동학습을 통해 보다 높은 교육적 성취를 이룩할 수 있도록 정보나 자료의 교환을 촉진시키고, 서로가 적극적으로 가르쳐주게 되는 동료 수업지도 활동이 강화된다.

⑦ 협동적 수업목표의 구조화가 이루어진 학습환경에서는 수업활동이나 학습과제의 해결에 학생들이 더욱 활발하게 참여하게 된다.

⑧ 협동수업이 이루어질 수 있도록 구조화된 학습풍토에서는 사고의 다양성, 광범위한 아이디어의 제시, 다양한 행동방식의 활동 등을 신장시킨다.

3.3. 창의력 신장을 위한 수업

1) 창의력 교육의 시작

① 창의력(Creativity) 교육에 대한 관심은 1950년 미국 심리학회 회장인 길포드(Guilford)의 이슈 제기 이후 심리학 분야에서 활발한 연구가 이루어져 오면서 우리 학교교육현장에서도 관심을 갖게 되었다[39].

② 국가와 사회 및 학교에서 보다 큰 관심을 갖게 된 것은 시대와 사회가 급격하게 변하고 있기 때문이며 국가, 사회 그리고 기업, 학교, 문화계 등 창의력을 중시하고 추구하지 않는 분야가 없을 정도가 되었다.

③ (주의) 창의력은 인간의 심리적 구인(構因, construct)의 일종이기 때문에 개념, 특성, 구성요소 등에 대한 학자들 간의 연구 결과나 견해가 다양할 뿐만 아니라, 학교교육활동에 구체적으로 적용할 수 있는 지도법이나 원리가 명확하게 정리되어 있지 않다.

2) 창의력의 개념적 정의와 구성요소

(1) 창의력의 정의

① 문제해결과정과 같은 인지활동이다.

㉠ Torrance(1977): 곤란한 문제를 인식하고, 그것을 해결하기 위하여 아이디어를 내고, 가설을 검증하며, 그 결과를 전달하는 과정

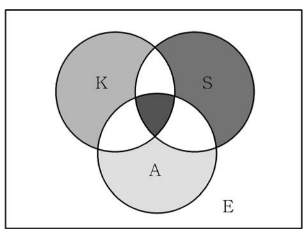
㉡ 김영채(2001): 새롭고 유용한 아이디어를 생성해 내는 정신 과정

② 정신작용의 결과로 우리들의 외부에 나타난 산출물, 생산품이다.

㉠ Guilford(1977): 새롭고 신기한 것을 낳는 힘

㉡ 정범모(2001): 여러 영역의 활동에서 새롭고 뜻있는 것을 만들어 내는 힘

③ 통합적 개념이다. 즉, 창의력이란



㉠ 지식, 특히 영역-특수적인 지식(domain-specific knowledge)

㉡ 다양한 사고기술(thinking skill)

㉢ 개인의 정의적 특성(affective trait), 즉, 높은 동기(motivation)와 바람직한 인성(personality)의 3가

---

39) 제 3차 교육과정에서 창의성 교육의 중요성이 언급되었고(교육부, 『초등학교교육과정해설I』, P47), 1975년 경상북도 허창규 학무국장이 '창의력'이란 단행본을 출간하여 학교에 보급하였었다.

지 요소와 개인을 둘러싸고 있는 환경(environment)이라는 배경 요소가 함께 상호 작용한 결과로 나타나는 것이다(네 가지 요인(KSAE)의 역동적 상호작용).

(2) 창의력 구성요소

학자	구성요소	비고
Torrance(1979)	능력+기능+동기	
Amabile(1983)	영역관련 지식+창의성 관련 기술+과제동기	중다적 요소
Sternberg(1988)	지능+인지양식+성격과 동기	
Csikszentmihalyi(1989)	개인(person)+영역(domain)+장(field)	사회적 체제 모형
Isaksen, Puccio, Treffinger(1993)	사람+환경+과정+산출물	생태학적 상호작용 모형
Sternberg, Lubart(1995)	지능+지식+사고양식+성격+동기+환경	투자이론
정범모(2001)	개인+영역+장+문화풍토	사면체 모형
임선하(2001)	사고성향+경험+사고기능+관련지식	DESK

(3) 창의력과 동기

창의적인 사람들은 창의적인 활동을 하기 위하여 수면, 음식, 기타 삶에 필요한 것들을 한동안 잊어버리고 일종의 열정으로 가득 차 있는 듯이 보인다.

① 동기의 하위 내용: 호기심, 자신감, 민감성, 열정감, 헌신, 집착력 등

② 지도 방법

㉠ 호기심: 주변의 사물이나 현상에 대해 '왜 그럴까?', '무슨 까닭일까?' 등과 같이 왜-사고(Why~) 훈련하기

㉡ 자신감: 자신을 괜찮은 존재로 생각하는 긍정적 자아개념 갖기

㉢ 민감성: 일상적 현상에서 문제 찾아보기

㉣ 열정감: 주의를 집중하여 문제에 몰두하기

(4) 창의력과 사고기술

창의력 신장에 핵심은 학습자 스스로 사고하는 기술 즉, 사고기술(thinking skill)이다. 사고기술은 Guildford(1956)가 제안한 확산적 사고와 수렴적 사고를 포함한다.

┌ 유창성, 융통성, 독창성
㉠ 확산적 사고능력┤
└ 많고 다양하며 자세하고 깊은 아이디어를 생성해 낼 수 있는 능력

┌ 정교성
㉡ 수렴적 사고능력┤
└ 생성해 낸 아이디어를 정교하게 다듬어 내는데 사용할 수 있는 도구

① 사고기술의 하위 내용: 유창성, 융통성, 독창성, 정교성, 비유, 재구성, 조합, 결합 등

② 지도 방법

㉠ 유창성: 특정한 문제 상황에서 가능한 아이디어를 생성하기

㉡ 융통성: 대상에 대한 주시점(注視點) 바꾸어 보기

㉢ 독창성: 다른 사람과 다른 기발하고 새로운 생각해 보기

㉣ 정교성: 어떤 문제를 풀면서 다시 한 번 더 생각해 보기

3) 창의력 교육

(1) 창의력 교육을 중요시해야 하는 이유

① 변화의 시대(광속도의 변화 시대, 전체적, 총제적인 변화의 시대, 예측 불가능한 변화의 방향)에 적응하기 위해 창의력 교육이 필요하다.

② 21세기 지식기반사회, 지식혁명 사회에 적응하기 위해 창의력 교육이 필요하다. 이때, 지식이란 과거의 전통적 지식, 구입한 지식, 객관적 지식이 아닌 창의적 지식, 생산적 지식, 주관적 지식이다. 따라서 내가 생산하고, 구성하고, 제조한 것이어야 지식이라 할 수 있으며 따라서 창의적 지식이 필요하다.

③ 국가수준의 수학과 교육과정에 '기초능력을 토대로 창의적인 능력을 발휘하는 사람'을 가장 상위목표의 인간상으로 설정하여 창의력 교육의 필요성을 강조하고 있다.

> 교육인적자원부(1998, p.2): '21세기는 단순히 세기의 변환이 아니라 밀레니엄(millennium)적 변환을 의미한다. 이에 대비하기 위하여 건전한 인성 및 창의성을 함양해야 한다'고 전제하였으며, 교육개혁위원회에서는 이를 7차 교육과정 개혁의 기본 방향으로 설정하였다.
>
> ┌ 초등학교 '자신의 생각과 느낌을 다양하게 표현하는 경험과 느낌을 가진다.'
> │
> ├ 중학교 '자신의 생각과 느낌을 창의적으로 표현하는 경험을 가진다'
> │
> └ 고등학교 '학교생활에 필요한 논리적, 비판적, 창의적 사고력과 태도를 익힌다'

④ 교원, 학생, 학부모 모두 창의력 교육을 기대하고 있으며 이는 학습자의 학습권 차원에서도 당연히 보호되어야 할 교육과제라 보고 있다.

(2) 창의력 교육 방법

① 가르치기보다 스스로 배우도록 한다.

: 학습은 인간의 본능이다. 인간은 완전한 존재로 태어나며, 결핍한 것을 학교기관에서 보충 받고, 치료받는 것이 아니라, 스스로 배워서 끊임없이 자신을 재창조하고, 현상이나 대상을 재해석, 재구성하며, 인식의 주체자로서 지식을 스스로 생산할 수 있는 존재이기 때문이다.

② 교사가 창의적 사고의 모범을 보인다.

: 교사 스스로 나는 얼마나, 어떻게 창의적인가 자문해 보는 것이 좋다. 그리고 수업을 비롯한 학교교육활동 전체에 걸쳐 교사의 언어, 행동, 자세 등에서 개방적이고, 수용적이 되어야 한다. 교사 자신이 자신감, 적극성, 유연성, 정교성, 민감성, 독특성 등의 창의적 특성들을 가지려고 노력하거나 열려 있는 사고, 자신의 오류를 시인하고 학생들과 함께 풀어갈 자세를 갖는 것이 창의력 개발을 위한 태도 형성에 도움이 될 수 있다.

③ 수업목표를 적절하게 제시한다.

: 학생이나 교사가 수업목표를 명확히 인지하게 되면 앞으로의 목표를 향한 계획을 세울 수 있고, 필요한 준비를 할 수 있으며, 어떤 문제점이 기다리고 있을 것인지 그에 대한 대처는 어떻게 할 것인지 등에 관한 사고를 미리 해 볼 수 있도록 하는 기능을 한다.

④ 협동학습 방법을 활용한다.

: 협동학습을 활용하면 학생들의 교우관계, 자아개념, 동기, 고차적 인지학업성취, 친사회적 행동, 학교에 대한 호감 등이 향상됨은 물론 창의성, 문제해결력이 높아진다.

⑤ 발문을 적절히 활용한다.

: 발문은 학생들의 고차적 사고를 자극할 수 있으며, 특히 발문의 유형과 수준에 따라 학습자들의 창의성은 촉진될 수도, 소멸될 수도 있다. 발문이 단조롭고, 일방적이고, 형식적이며, 1차적 수준으로 진행되기보다는 복합적이고, 양방향적이며, 유목적적이고, 2차, 3차적 발문일 때, 학습자들의 창의력이나 고차적 사고력이 촉진될 수 있을 것이다.

⑥ 자신감을 갖도록 지도한다.

⑦ 실수와 실패가 허용되는 수업을 디자인한다.

⑧ 독자적인 생각이나 행동을 길러 준다.

: 수업과정은 학생들에게 독자적인 사고나 행동을 장려하도록 그리고 격려할 수 있도록 설계되어야 한다. 교사의 질문, 동료 학생들의 발표나 설명에 대한 자신의 생각으

로 반론, 수정, 비판, 대치, 보충 등의 활동이 독자적인 사고를 길러 주고, 그런 학생이 창의적인 인물로 나타날 수 있다.

⑨ 수업과정에서 열정을 쏟게 한다.

: 수업에서 열정을 길러주기 위해서는 위에서 언급한 수업목표의 명확한 인지는 물론이며, 적절한 발문과 단서 제시, 과제 난이도의 개인별 적정 유지, 시청각 및 ICT 자료 투입, 교사의 유머와 열정 등이 중요하다. 이러한 학습활동을 통해서 학생들은 열정적인 참여자가 되고, 이는 곧 창의적인 심리적 특성으로 이어진다.

부록

수학교육론

1.수학교육론 용어정리

개폐연속체
/open-closed continuum

딘즈(Zoltan Paul Dienes)에 의하면 심리역학 메커니즘의 3단계를 통해 개념이 구성되면 구성된 그 개념이 정착되는 시기가 온다. 그러고 나서 내성적 활동에 의한 분석·검토와 문제해결에 적용하는 과정을 통해 개념에 더 정통하게 된다. 이와 같은 상태가 되면 구성된 개념은 더 높은 수준의 새로운 개념 구성을 위한 자료, 즉 놀이의 대상이 되고 있는 것으로 다음 수준의 개념 구성 사이클이 시작된 것이다. 심리역학 메커니즘 3단계를 거쳐 구성된 개념은 닫힌 상태가 되지만, 내성적 분석과 적용의 과정에서 열린 상태로 변해 더 높은 수준에서 새로운 개념 구성이 이루어지는 것이다. 이 교대 과정이 끝없이 계속되는바, 딘즈는 이와 같은 개념 구성 사이클을 개폐연속체라 부르고 있다. 개폐연속체에서 닫힌 상태로부터 열린 상태로 옮겨지기 위해서는 내적인 모순이나 갈등 의식이 요구된다.

경험적 추상화
/abstraction empirique(프)

피아제는 추상화를 크게 경험적 추상화와 반영적 추상화로 구분하고 있다. 경험적 추상화는 지각할 수 있는 대상으로부터 대상의 공통 성질을 이끌어내는 것이다.

관계적 이해
/relational understanding

관계적 이해는 스켐프(Richard R. Skemp)가 제시한 네 가지 이해 중의 하나이다. 이 용어는 본래 올센(Stieg Mellin-Olsen)이 제시한 것이다. 올센은 이해를 관계적 이해와 도구적 이해로 구분했는데, 스켐프가 이것을 받아들여 발전시킨 것이다. 관계적 이해란 무엇을 해야 할지 그리고 왜 그런지를 모두 아는 능력으로 흔히 '이해한다'고 할 때의 그 이해를 의미한다. 스켐프는 관계적 이해를 일반적인 수학적 관계에서 특수한 공식이나 과정을 연역하는 능력으로 요약하기도 하며, 또 관계적 학습의 목표인 관계적 스키마를 구성하는 것으로 설명하고 있기도 하다. 한편 스켐프는 나중에 바이어스(V. Byers)와 허스코빅스(N. Herscovics)의 형식적 이해를 보완·발전시킨 논리적 이해와 기호적 이해를 제시함으로써 이해를 모두 네 가지로 구분하였다.

관계적 수학
/relational mathematics

스켐프는 수학을 관계적 수학과 도구적 수학으로 구분하고 있다. 학생들이 수학을 관계적으로 이해했을 때의 그 수학이 관계적 수학이다. 스켐프에 의하면 관계적 수학은 적어도 다음의 네 가지 장점이 있다.

① 새로운 과제에 더 잘 적응된다.
② 기억하기가 쉽다.
③ 그 자체가 수학교육의 목적이 될 수 있다.
④ 유기적이다.

교수학적 계약
/The Didactical Contract

교수·학습의 상황에서 교사는 학생이 새로운 지식을 잘 획득할 수 있도록 적절한 조건을 제공해야만 한다. 즉 이 조건과 학생이 이전에 획득한 지식이 합해지면, 교사는 학생이 새로운 지식을 획득할 수 있을 것이라고 보장해 준다는 것을 의미한다. 이와 같이 적절한 조건을 제공하는 것은 학생에 대한 교사의 의무라 볼 수 있다. 반면 학생은 교사가 제공한 조건을 만족시켜야 한다. 이는 교사에 대한 학생의 의미라 볼 수 있다. 다시 말해, 교수-학습에서 교사와 학생 사이에는 묵시적인 계약이 존재한다 볼 수 있으며 이 계약을 교수학적 계약(Brousseau, 1984)이라 한다.

예 학생이 주어진 문제를 풀지 못했다

면, 학생은 교사에 대한 의무를 다하지 못한 것이 될 수 있고, 따라서 학생은 교수학적 계약에 의해 더 열심히 공부해야 만 한다. 또 학생이 문제를 풀지 못한 경우, 교사가 학생에 대한 의무를 다하지 못했기 때문일 수도 있다. 그래서 교사는 교수학적 계약에 의해 학생에게 적절한 새로운 문제를 제시하는 등 그 학생을 도와주어야만 한다.

교수학적 변환 transposition didactique(프)

교사가 어떤 지식을 가르치고자 할 때 그는 교수학적 계약에 따라 그 지식을 보다 더 잘 가르치기 위해 노력하게 된다. 이러한 노력에는 그 지식을 가르치는 데 이전에 배운 지식이 어떻게 관련되는지, 학생들에게 그 지식을 어떻게 이해시킬 것인지, 그 지식을 어떻게 구성시킬 것인지, 학생이 어떻게 학습하게 할 것인지, 수업의 과정에서 그 지식과 관련하여 어떻게 추측하게 할 것인지 등에 대해 고심하는 것이 포함된다. 결국 교사는 교수학적 계약의 요구에 따라 그 지식의 조직, 상대적인 중요성, 표현 등을 교수학적인 입장에서 변형하게 되는 바, 이를 일컬어 교수학적 변환(Brousseau, 1984)이라 한다.
한편 쉐바야드(Y. Chevallard)는 교육적 의도에 의해 학문적 지식을 가르칠 지식으로 변환하는 것을 지식의 교수학적 변환이라고 불렀다. 학문적 지식을 도구로서 사용하는 행위에 사회적 의미를 부여하기 위해 그 지식을 정당화하거나 정당성을 주장할 필요는 없다. 그러나 가르칠 지식은 사회적 승인과 정당화를 요구한다. 수학 지식의 교수학적 변환의 주체는 교과서 저자와 교사이다(우리나라의 경우 수학과 교육과정 개발자 역시 교수학적 변환의 주체이다).
〈cf〉교수학적변환론(didactic transposition theory)은 이 교수학적 변환을 전문적으로 연구하는 분야이다.

교수학적 상황론 Theory of didactical situation

브루소(Guy Brousseau)에 의하면 교수학적 상황은 교사가 학생들에게 제시한 문제를 가지고 그들과 상호 작용하는 시스템으로 된 게임에 참여하는 것으로, 학생, 교사, 환경이라는 하위 요소로 구성된다. 교수학적 상황 속에서 교사와 학생의 의무적 관계는 교수학적 계약으로 설명된다. 교사와 학생이 파트너가 되어서 어떤 책임을 져야 하는지, 그리고 서로에게 해야 할 의무가 무엇인지를 결정하는 관계로서 상호 호혜적인 의무의 체계는 계약과 흡사하다. 그러나 수학적 계약은 다소 암묵적인 성질을 지닌다.
교수학적 상황론에서는 수학 학습이 행동–공식화–타당화–제도화의 4단계를 밟아 이루어지도록 상황을 구성할 것을 제안한다. 행동 단계에서는 여러 가지 관련성 또는 규칙에 따라 결론을 내리지만, 그러한 규칙을 의식하지는 못하는 단계이다. 공식화의 단계는 행동 속에서 암묵적으로 사용하던 규칙을 의식하고 표현하는 단계이다. 타당화 단계는 공식화 단계에서 의식되고 표현된 규칙이 타당한 것인지를 따져보는 단계이다. 이 단계에서는 규칙 자체가 사고의 대상 또는 탐구의 주제가 된다. 제도화 단계는 타당화 된 규칙이 하나의 (사회적인) 관습으로 공고히 자리 잡는 단계이다. 교사는 수학적 지식을 재조직하고 상황을 설정하며, 그 상황의 안내자, 보조자, 중재자가 되어야 한다. 또 제도화 과정에서 중심적인 역할을 해야 한다.
이러한 상황의 발전 과정은 원시수학적 개념–의사수학적 개념–수학적 개념의 순서로 발달해 온 수학 개념의 역사적 발달 과정과 평행하다. 행동 단계는 원시수학적 개념 상태, 공식화 단계는 의사수학적 개념 상태, 그리고 타당화와 제도화 단계는 수학적 개념 상태에 대응한다. 이렇게 보면 교수학적 상황론은 수학 개념의 역사발생적 메커니즘을 상황 구성에 반영한 역사발생적 원리의 일종이라 할 수 있다.

교수학적 현상학 The Didactical Phenomenology

프로이덴탈(H. Freudnethal)은 본래 수학적

개념, 구조 또는 수학적 아이디어라고 하는 본질(nooumenon)이 물리적, 사회적, 그리고 정신적 세계의 여러 현상(phainomenon)을 조직하는 수단의 결과라는 사실에 기초해 수학의 교수 · 학습의 과정에서도 조직될 필요가 있는 현상에서 시작하여 학습자로 하여금 조직의 수단인 그 본질을 숙달하도록 해 주어야 한다는 관점에서 교수학적 현상학을 도입했다. 현상과 본질은 상대적인 것으로 현상이 본질로 조직되고 나면 다시 그 본질은 현상이 되어 새로운 본질로 조직되게 된다. 그런데 이 때 이 본질은 우선적으로는 심상(mental object)으로 구성된다는 것이 중요하다.

〈cf〉 아동들은 수가 무엇인지, 원이 무엇인지, 더하는 것이 무엇인지, 그리고 그래프를 그리는 것이 무엇인지를 배울 때 우선 심상으로 파악하고 심적 활동으로 실행해야한다.

구성의 원리 /constructivity principle

구성의 원리는 딘즈가 제시한 네 가지 수학 교수 · 학습 원리의 하나이다. 새로운 개념은 이미 알고 있는 개념으로부터 개인적인 차원에서 먼저 구성되도록 해야 하며, 그 논리적 관계는 구성 후에 분석되어야 한다는 원리이다. 딘즈에 의하면, 아동들은 논리적 사고 전에 구성적인 사고를 할 수 있다. 분석적 사고는 구성을 전제로 하며, 12세 전까지는 분석적 사고를 거의 할 수 없다. 따라서 분석적 사고보다 구성적 이해에 이를 수 있도록 학습 상황을 조직하는 것이 바람직하다.

구성주의/constructivism

구성주의는 1960년대와 70년대에 걸쳐 행동주의로부터 여러 가지 형태의 구조주의와 인지주의로의 철학적 전환 과정에서 생겨난 인지론의 한 형태로 알려지게 되었다. 구성주의가 수학교육 분야에서 본질적인 논의의 대상이 된 것은 1980년대 후반으로 보인다. 구성주의에서는 언어의 의미를 경험에 따른 주관적 구성의 산물로 간주하며, 의사소통은 언어 의미의 거듭된 수정을 통해 가능해진다고 본다. 구성주의에서는 모든 지식이 개인의 주관적인 구성 과정에 의해 끊임없이 재구성되는 불완전한 산물이다. 또한 지식이 외부의 교육적 전달에 의해 학습자에게 전달될 수 있다는 전통적 관점을 단호히 거부하고 학습에 의한 수학적 지식의 자주적 구성을 요구한다. 구성주의는 '구성'의 의미를 어떻게 해석하느냐에 따라 급진적 구성주의, 조작적 구성주의, 인류학적 구성주의, 사회적 구성주의로 구분될 수 있다.

귀납적(인) 사고 방법

귀납적인 사고 방법은 귀납(법)을 구사하는 방법으로, 연역적인 해결이 안 되는 상황에서 몇몇 자료에서 일반적인 규칙과 성질을 발견하여 이를 근거로 당면 문제를 해결할 때 이용하는 사고 방법이다. 여기서 귀납은 불완전 귀납, 즉 많은 사례에서 볼 수 있는 동일한 주장이 미지이고 종류가 같은 사례에서 성립할 것으로 보고, 그 사례의 집합에 대한 일반적인 주장을 천명하고, 보편적인 법칙을 발견하는 추리이다. 귀납적인 사고 방법에서는 몇몇의 자료를 모은 다음 그 자료 사이의 공통인 규칙이나 성질을 찾아내어, 그 규칙이나 성질이 그 자료를 포함하는 집합에서 성립할 것이라고 추측하고, 추측한 그 일반성이 참임을 더 확실히 하기 위해 새로운 자료로 확인하는 절차를 거치게 된다. 자료를 모은 다음 두루 살펴보고 규칙을 찾아낼 수도 있지만, 자료를 모아가면서 일반성을 예상하고, 그 예상을 확인하면서 자료를 모을 수도 있다. 귀납은 추측이므로 발견한 일반성이 참임을 보이기 위해서는 연역이 이어져야 하지만 학생들의 능력을 고려하여 귀납한 것을 그대로 인정하여 이용하기도 한다(2011 개정 교육과정에 따른 중학교 정당화 내용).

균형이론/equilibrium theory

균형이론은 개인의 인지발달을 개인의 스킴과 환경 사이의 불균형과 균형의 반복 과정으로 설명하는 피아제(Jean Piaget)의 이론을 의미한다. 피아제에 의하면 개인에게는

환경과의 균형을 이룩하여 스킴의 무모순성을 달성하려는 기본적인 욕구가 있다. 인간은 타고난 스킴을 바탕으로 조직 · 적응 기능을 통해 환경과 상호작용을 하면서 더 유연하고 포괄적인 스킴을 재구성함으로써 더 나은 균형을 추구한다. 조직과 적응이라는 지능의 두 불변적 기능은 사고 작용의 내적 · 외적인 측면으로 서로 분리될 수 없게 결합되어 있다. 조직기능은 발달의 연속성을 보증한다. 한편 적응 기능은 조절과 동화의 상보적인 두 측면으로 나누어진다. 동화는 기존의 어떤 스킴을 고수하면서 가능한 한 넓은 범위의 상황을 그것에 종속시키려고 하는 것이고, 조절은 자신의 스킴을 충분히 음미하고 문제를 해결하기 위해 그 스킴을 조정, 분화하는 기능이다. 동화와 조절에 의해 문제가 해결되면 그러한 유형의 문제에 대하여 일시적인 균형이 달성된다. 피아제에 따르면 인간의 지능 발달은 상대적으로 안정된 균형 상태를 나타내는 정해진 몇 단계를 통과한다. 이와 같이 외부 환경에의 적응과정에서 계속해서 일어나는 인지적 불균형화와 동화와 조절에 의한 새로운 균형화가 반복되는 스킴의 끊임없는 재구성과정이 바로 인지발달이고 또한 학습이다.

급진적 구성주의 /radical constructivism

급진적 구성주의는 글라저스펠드(Ernst von Galsersfeld)가 합리적인 앎(knowing)의 모델로 제시한 이론이다. 급진적 구성주의는 지식이 어떻게 정의되든 간에 사람의 머릿속에 있으며, 또 사고의 주체가 자신의 고유한 경험에 기반을 두고 지식을 구성할 수밖에 없다는 가정에서 출발한다. 급진적 구성주의에서는 인식 주체에 의한 지식의 구성을 주장하는데 그치지 않고, 개인의 주관과 독립된 객관적인 보편적 지식의 존재를 거부하고 지식의 의미를 적응을 위한 도구로서의 상대적인 적합성 · 실용성 및 그에 따른 도태와 생장의 원리에서 찾는다. 급진적 구성주의는 '이성 중심의 합리주의 사상, 과학의 권위와 가치, 확실성과 보편성, 정초주의'를 부정하고 '상대성과 다원성, 불확실성, 문화적, 사회적, 개인적 다양성'을 중시한다.

기성 수학/ The Ready Made Mathematics

기성 수학(H. Fredenthal, 1973)은 수학에서, 어떤 결과에 이르기까지의 과정에 주목하지 않은 채 오직 그 결과만을 중요시하는, 즉 수학을 이미 만들어진 산물 그 자체로 생각할 때의 수학을 의미한다. 공리 또는 정의가 먼저 제시되고 나서 어떤 정리가 제시되며 공리, 정의 또는 다른 정리로부터 연역된 증명이 잇따르는 방법이다.
[반] 실행 수학

기초-기본 복귀 운동/ The back-to-basic movement

수학교육 현대화운동에 대한 비판과 반성의 결과, 의미 있는 학습이 이루어지지 못했을 뿐만 아니라 학생들의 기초적인 계산 능력마저도 저하되었다는 주장이 팽배해졌다. 이에 학생들의 발달 단계를 고려하여 기초 · 기본적인 것(basics 또는 basic skills)을 찾아 교재로 재구성하자(back-to-basics)는 움직임이 대두되었던 바, 이 일련의 움직임을 일컬어 기초 · 기본 복귀 운동이라고 한다.
새수학으로 인해 응용이 소홀히 취급되었고 기능과 이해 모두 만족스럽지 못한 결과를 초래하였으며 그 결과 M. Kline의 "왜 쟈니는 덧셈을 못 하는가" 와 같은 선동적 주장이 호응을 얻게 되면서 기초 · 기능 복귀 운동이 일어나게 되었다. 이 운동 하에 행동적 목표를 강조하였고, 필산의 강조와 함께 소비자 수학을 강조한 바, 이러한 수정은 지진 학생을 위주로 한 것이었다. 이 운동은 승급을 위한 최소 학력 기준의 설정을 가져왔고 어느 정도 성공을 거두었다. 하지만 우수한 학생들의 학력은 저하되었으며, 적응력과 문제해결능력이 감소되었다.

기호적 이해 /symbolic understanding

기호적 이해는 스켐프가 제시한 네 가지 이해 중의 하나로 시간적으로 가장 나중에 제시된 것이다. 스켐프는 바이어스(V. Byers)와 허스코빅스(N. Herscovics)가 제시한 형식적 이해를 논리적 이해로 보완 · 발전시켰다. 후에 그 형식적 이해를 재분석하여, 수학적 기호 체계와 표기를 적절한 수학적 아이디어와 관련시키는 능력을 정교화한 기호적 이해를 제시하였다. 즉, 스켐프는 기호적 이해를 기호 체계와 개념 구조, 즉 스키마 사이의 상호동화능력으로 정의하고 있다. 여기서 기호 체계는 기호적 이해에 수반되는 스키마로, 개념의 집합에 대응되는 기호의 집합이며, 개념들 사이의 관계에 대응하는 기호들 사이의 관계도 포함한다.

나선형 원리/spiral principle

브루너(Jerome S. Bruner)에 의하면, 교육에서 어떤 주제를 취급할 때, 그 주제의 최종적인 형태의 취급이 가능하다고 여겨질 때까지 교육을 연기해서는 안 되며, 그 이전 단계에서 그 주제는 간단한 형태로 도입되어야 한다. 이때 그 형태는 이후의 단계에서 재구성이 가능해야 한다. 이와 같이 어떤 주제가 더 높은 학년에서 반복적으로 재구성되도록, 낮은 학년에서부터 지적으로 정직하게 그리고 학생들의 사고방식과 일치하는 방식으로 나선형을 이루어 가능한 한 일찍부터 시작되어야 한다. 이것이 나선형의 원리이다. 나선형 원리에 바탕을 두고 개발한 교육과정이 나선형 교육과정이다. 한편 우정호에 의하면 딘즈의 구성의 원리는 나선형의 원리에 포함된다.

논리·수학적 경험
logic-mathematical experience

피아제에 의하면 논리 · 수학적 경험은 행동으로부터의 추상화를 수반한다. 이를테면 사과를 어떤 모양으로 늘어놓고 어떤 순서로 세어보아도 같은 수가 된다는 것을 발견했을 때 논리 · 수학적 경험을 한 것이다. 이와 같이 대상 자체와는 무관하게 주체의 활동과 결과에 대한 경험이 논리 · 수학적 경험이다. 피아제에 의하면 모든 논리 · 수학적 개념은 주체 자신에 의해서 구성된 것으로 내면화되어 조작으로 변환될 수 있는 행동만을 포함하고 있으며, 일반적으로 조정된 객관적이고 필연적인 행동 결과와 관련되어 있다.

논리적 이해
/logical understnading

논리적 이해는 스켐프가 제시한 네 가지 이해 중의 하나로서, 도구적 이해와 관계적 이해만으로 설명할 수 없는 이해의 현상을 새로 구분하기 위해 제시한 것이다. 이것은 바이어스와 허스코빅스가 제시한 형식적 이해를 바탕으로 한다. 그들에 의하면 형식적 이해는 수학적 기호 체계와 표기를 적절한 수학적 아이디어와 관련시키고, 이 아이디어를 논리적 추론으로 결합시키는 능력이다. 스켐프는 이 중에서 수학적 아이디어를 논리적 추론의 연결 고리에 결합시키는 능력을 정교화 하여, 주어진 가정 그리고 공리나 정리와 같이 이미 참이라고 확인된 수학 지식을 적절히 선택하여 논리적 필요에 따라 추론 고리를 기술하는 것을 보여줄 수 있는 능력을 논리적 이해로 정의하고 있다. 관계적 이해를 할 수 있다고 해도 논리적 추론 과정을 기술해 나갈 때 연속되는 명제 사이의 함의 관계에 관련된 이해를 하지 못할 수 있는데, 스켐프에 의하면 그것은 바로 논리적 이해의 부족에 기인하는 것이다.

논리주의/logicism

논리주의는 수학을 논리의 일부로 보고 모든 수학을 논리로 환원하고자 하는 수리철학이다. 논리주의의 목적은 논리학의 개념과 공리에 바탕을 둔 공리 체계로서의 수학의 개념과 이론을 만들어 냄으로 수학지식의 확실성을 논리의 확실성으로 환원하는 것이다. 논리주의에서 증명은 논리학의 공리와 정의로부터 수학적 명제를 이끌어내는 수단으로, 수학지식을 논리적으로 정당화하기 위한 장치이다. 그러나 논리주의를 실현하기 위한 시도는 패러독스가 발생하게 되면서 결국 실패로 끝나게 되었다.

도구적 이해 /instrumental understanding

도구적 이해는 스켐프가 제시한 네 가지 이해 중의 하나이다. 이 용어는 본래 올센이 제시한 것이다. 올센은 이해를 관계적 이해와 도구적 이해로 구분했는데, 스켐프가 이것을 받아들여 확산시킨 것이다. 스켐프는 도구적 이해를 공식을 이해하지 못한 채 문제해결에 적당히 기억된 공식을 적용하는 능력으로 요약하고 있다. 도구적 이해는 관계적 이해에 비해 상대적으로 용이하고 그 보상이 즉각적이고 분명하게 나타난다.

도구적 수학 /instrumental mathematics

스켐프에 의하면 학생들이 수학을 도구적으로 이해했을 때의 그 수학이 도구적 수학이다. 도구적 수학이 진정한 수학은 아니지만, 다음 세 가지 이유로 그것을 가르친다고 할 수 있다.

① 문맥 자체로 보면, 도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 어떤 경우는 매우 쉽다.
② 보상이 즉각적이고 명백하다.
③ 상대적으로 적은 지식이 필요하기 때문에, 어떤 사람은 종종 보다 빨리 올바른 답을 얻을 수 있다.

동화판 수학 /The Fairy Tale Version of Mathematics

프로이덴탈은 수학자들이 수학의 연역적 체계를 학생들이 보다 쉽게 이해하기를 바라면서 동화 속에서나 있을 법하게 꾸며낸 수학을 동화판 수학이라 하였다. 이는 실제적으로는 고등수학 또는 인간의 삶 그 어느 쪽에도 연결될 수 없는 가짜수학이다. 동화판 수학은 연역적 체계로서의 수학인 기성수학을 가르쳐야 한다는 보수적 관점과 활동주의 교육 사상에 따라 수학을 가르쳐야 한다는 진보적 관점이 절박하게 맞부딪게 되면서 생겨난 비정상적인 모습의 학교수학이라 할 수 있다.

딘즈의 6단계 수학개념 교수 · 학습 과정

딘즈는 수학개념이 놀이를 통한 구성적 활동에 의해 형성된다고 보고, 이를 위한 6단계의 교수 · 학습 과정을 제시하고 있다. 1단계는 수학적 구조가 내재된 자료를 자유롭게 다루는 자유놀이 단계이다. 2단계는 일정한 규칙을 가진 놀이가 이루어지는 규칙놀이 또는 게임의 단계이다. 3단계는 다양한 동형인 규칙놀이를 하며 공통성을 파악하는 공통성 탐구의 단계이다. 4단계는 추상된 수학적 구조의 비형식적인 표현 단계이다. 5단계는 비형식적인 표현을 기호로 나타내는 기호화 단계이다. 6단계는 기본적인 성질로부터 체계화를 시도하는 형식화 단계이다.

명확화 단계 /stage of explicitation

반 힐레(Pierre Marie van Hiele)는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 명확화 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 세 번째 단계로, 발견된 관계를 표현하는 활동을 통해 그를 명확히 하며 전문적인 용어를 학습하는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 도형의 성질에 관한 아이디어를 표현하는 활동은 이 단계에 해당한다.

문자 선택의 자유성 /freedom of choice property

문자 선택의 자유성은 주어진 대상(referent)을 지칭하기 위해서 거의 아무거나 임의로 문자를 선택할 수 있음을 의미한다. 문자가 갖는 선택의 자유성은 수학적 언어의 유연성(flexibility)을 부여한다. 학생들이 선택의 자유성을 내면화하는 데는 오랜 시간이 걸리는 것으로 보인다. 학생들이 수학에서 문자 선택의 자유성을 인식할 수 있도록 특별한 지도가 요망되는데 같은 것을 다른 문자를 사용하여 나타낼 수 있다는 것을 알고 있는 학생들도 흔히 서로 다른 문자는 서로 다른

것을 나타내어야 한다고 믿는 경향이 있어, a=b는 거짓이라고 생각하게 된다.

문제해결/Problem Solving

문제해결은 하나의 과정으로, 어떤 친숙하지 않은 문제상황이 요구하고 있는 것을 만족시키기 위해, 개인이 이전에 획득한 지식, 기능 및 이해한 것(understanding)을 사용하기 위한 수단이다.

문제해결 단계 /The Stage of Problem Solving

폴리아(G. Polya)에 따르면 문제를 해결해 가는 사고과정은 4단계로 구분될 수 있다. 첫째는 문제를 이해하는 단계로 '구하는 것이 무엇인지를 분명히 아는 단계'이다. 둘째는 여러 가지 사항들이 어떻게 관련되어 있는지 또한 미지인 것이 자료와 어떻게 연결되어 있는지를 알아내어 풀이에 대한 착상을 하고 계획하는 단계이다. 셋째는 계획을 실행하는 단계이며 넷째는 완성된 풀이를 되돌아보고 다시 검토하며 논의하는 반성 단계이다.

- 문제이해 (Understanding the problem)
- 계획의 작성 (Devising a plan)
- 계획 실행 (Carrying out the plan)
- 반성 (Looking back)

물리적 경험/physical experience

피아제에 의하면 물리적 경험은 대상으로부터의 추상화를 수반하는 것이다. 이를테면 큰 사과는 작은 사과보다 무겁다는 것을 발견했을 때 물리적 경험을 한 것이다. 이 성질은 주체가 적용하기 전에도 사과가 갖고 있던 성질로 주체가 그 성질을 단지 경험한 것에 불과하다. 이와 같이 물리적 경험으로부터의 무게 추상은 경험적 추상화에 의한 것으로, 일반화가 수반된다.

모델링/modelling [프로이덴탈]

프로이덴탈에 의하면 모델링은 수학화의 한 가지로 어떤 복잡한 현실이나 이론을 그 보다 더 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 이상화하고 단순화하는 것을 의미한다. 그리고 이를 위한 매개물이 바로 모델이다. 즉, 복잡한 현상이나 이론이 모델을 통해 더 형식적인 처리가 가능하게끔 이상화되거나 단순화되는 것이다.

메타인지적 이동 /The Meta-cognitive Shift

수학의 교수 · 학습에서, 교사는 어떤 수학적 지식의 교육이 제대로 이루어지지 않는 경우, 교수학적 계약에 따라 이 지식을 보다 잘 이해시키기 위해 적당한 교수학적 장치를 고안하게 된다. 그런데 이 장치를 이용하여 수업을 할 때, 교사의 교수학적 노력의 초점이 그가 가르쳐야 할 수학적 지식 그 자체로부터 자신이 만든 교수학적 장치로 이동하는 경우가 있다. 이와 같이 교수학적 장치 그 자체가 교수의 대상이 되어 버리는 것을 일컬어 메타인지 이동(Brousseau, 1984)이라 한다.

예 음의 정수의 개념을 도입하기 위해 마술콩(실제로는 음의 정수, 기호' ^ '로 나타낸다)이 보통 콩(실제로는 양의 정수)을 만나면 둘 다 사라진다는 가상적 상황을 소개하고, 5+^5=0 또는 7+^4=3과 같은 표기 방법에 대해 연습하게 된다. 이 때 '음의 정수'라는 전문적인 용어는 전혀 사용되지 않는다.

반례/counterexample

반례란 추측을 반박하는 예이다. 라카토스(I. Lakatos)는 반례를 '국소적 반례'와 '전면적 반례'로 구분했다. 국소적 반례는 부분 추측을 반박하는 것이고 전면적인 반례는 원래의 추측 그 자체를 반박하는 것이다. 라카토스에 의하면 국소적이고 전면적이지 않은 반례, 전면적이고 국소적인 반례, 전면적이고 국소적이지 않는 반례가 있다. 전면적이고 국소적인 반례를 '논리적 반례', 그리고 다른 두 반례를 '발견적 반례'라고 한다. 전면적 반례가 대두되었을 때 이에 대처하는 방법으로 괴물배제법, 예외배제법, 괴물조정법, 보조정리합체법 등이 있다.

반 힐레 수준이론 /van Hiele level theory

반 힐레 수준이론은 네델란드의 반 힐레 부부(Dina van Hiele-Geldof, Pierre Marie van Hiele)에 의해 제시된 수학 학습 이론(최초의 논문은 1955년에 발표되었음)으로, 이 이론을 발표하게 된 이유는 다음과 같다. 그들은 수학을 가르치면서 아무리 애써서 설명해도 또 학생들이 아무리 최선을 다해 이해하려 하여도 이해하지 못하는 부분이 있음을 알았으며 그러다가 적당한 때가 오면 학생들이 쉽게 이해하는 것을 보면서 수학적 사고에는 서로 다른 수준이 있다는 것을 발견하였다. 남편 반 힐레가 1957년에 발표한 논문 '아동의 사고와 기하'에 따르면 기하에서의 사고 수준은 ①시각적 인식 수준(0수준)에서는 도형이 겉모습에 의해 판단된다 ②분석 수준(1수준)에서는 도형은 성질을 갖는 것이다 ③관계적 · 추상적 인식 수준(2수준)에서는 성질이 정렬된다. 성질은 다른 성질에서 연역된다. 한 성질이 다른 성질에 앞서거나 뒤따르게 된다. 학생들이 이 수준에서 연역의 본질에 의미를 이해하는 것은 아니다 ④형식적 연역 수준(3수준)에서는 사고가 연역의 의미, 정리의 역, 공리, 필요충분조건에 관계된다(그는 이 논문에서 5번째 수준에 대해서 자세히 설명하는 대신, '수학자들이 사용하는 절차에 충분히 익숙해지기 전에는 이 수준에 도달할 수 없다'고 말하고 있다).

〈cf〉 1986년 저서 '구조와 통찰'에서는 '제 1수준, … 제 5수준'이라 하고 있다. 즉, 반 힐레는 1986년 저서에서 이 수준이론이 다른 수학에도 적용될 수 있다고 주장하면서, 수학 학습의 과정에서 시각적 수준, 분석적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역적 체계를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 파악하는 수준의 5개 사고 수준을 구별할 수 있다.

반 힐레 수준이론에서, 수학의 학습은 한 수준에서 다음 수준으로 상승되어 가는 과정이다. 그러나 이 상승은 자연스럽게 이루어지는 것이 아니며, 적절한 교수 · 학습 프로그램에 힘입어, 다음과 같은 다섯 단계를 거쳐 상승하게 된다. ①정보의 단계-학생들은 작업 영역을 알게 된다 ②안내된 탐구 단계-형성되어져야 하는 망(network)의 서로 다른 관계를 가진 여러 과제가 학생들을 안내하게 된다 ③명료화 단계-학생들은 과제가 가진 관계를 의식하게 되며, 그 관계를 말로 표현하고자 시도하게 되며, 그리고 교과에 따르는 전문어를 학습하게 된다 ④자유로운 탐구 단계-학생들은 관계의 망 속에서, 일반적인 과제에 의해 자기 자신의 방법을 찾는 것을 학습하게 된다 ⑤통합의 단계-학생들이 교과에 관해 그리고, 이제 자신들이 마음대로 할 수 있게 된, 새로운 형성된 관계의 망에 관해 학습한 모든 것을 개관한다.

〈cf〉 부인은 학위를 받은 직후 사망했기 때문에, 이 이론은 실질적으로는 남편 반 힐레(Pierre Marie van Hiele)가 개발해 온 이론이라 할 수 있다.

발견술/heuristics [쉔펠드]

발견술은 쉔펠드(Alan H. Schoenfeld)가 수학적 문제해결과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개의 범주 중의 하나로서, 익숙하지 않거나 비표준적인 문제의 해결에 도움이 되는 전략 또는 테크닉을 의미한다. 발견술은 문제 해결에 유효한 일종의 경험법칙이라 할 수 있다. 이를테면 그림 그리기, 적절한 기호 도입하기, 관련된 문제를 이용하기, 문제를 재형식화하기, 거꾸로 풀기, 검증과 입증을 위한 여러 가지 절차 등이 이 범주에 속한다.

보조정리합체법 /method of lemma incorporation

전면적 반례이지만 국소적 반례가 아닌 경우, 원래의 추측은 반박되지만 증명은 반박되지 않는다. 라카토스는 이 경우에 증명에 문제가 있다고 보고, 증명분석을 통해 전면적 반례가 또는 국소적 반례가 됨을 보일 수

있다고 보고 있다. 그리고 이 분석과정에서 감추어진 조건이나 보조 정리를 들추어내서 추측에 합체시킴으로써 추측을 개선하는 방법을 보조정리합체법이라 하고 있다.

보존/conservation

보존은 피아제가 제시한 것으로, 아동들이 어떤 양의 측도가 물리적인 변화(이동, 분할, 변형 등)에도 불구하고 불변으로 있음을 인지하는 것을 의미한다. 그리고 이때, 양이 보존된다거나 아동들이 보존 개념을 가지고 있다고 한다. 피아제에 의하면 수학적 개념의 이해에는 보존 개념 형성이 전제된다. 그는 여러 가지 양의 보존 개념에 대해 연구·조사하고 있는데, 이에 의하면 집합수는 5-7세, 길이와 넓이는 7-8세, 무게는 9-12세, 부피는 11-12세에 보존된다.

브루너의 가설

브루너의 가설은 그가 《교육의 과정》에서 가정한 '어떤 교과든지 지적으로 올바른 형식으로 표현하면 어떤 발단 단계에 있는 어떤 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다'를 의미한다. 브루너는 《교육의 과정》을 발간하고 10년 후, 이것은 반드시 어떤 교과 내용이든지 그것을 가르치는 궁극적인 형식이 있다는 뜻이 아니라, 학생들이 배워야 할 개념이나 원리를 학생들이 파악할 수 있는 형식으로 친절하게 번역해주는 방법이 있다는 뜻이라고 말하였다.

분석적 채점법/analytic scoring

분석적 채점법은 과제가 포함하고 있는 주요 요소 각각에 대해 점수를 할당하는 방법이다. 분석적 채점법에서는 문제해결의 여러 요소를 동시에 고려하게 해 주며, 특정 영역에 대한 학생들의 강점과 약점이 명확하게 파악된다. 따라서 효율적인 교수·학습을 위한 구체적인 정보를 줄 수 있다. 또 교사는 평가를 통해 학생들에게 문제해결과 관련된 핵심적 요소에 대해 피드백을 주고 싶거나 별도의 지도 시간을 요하는 문제해결의 특정 한 부분을 확인하고 싶을 때 유용하다. 그러나 평가하는 데 상당한 시간이 소요되며, 학생들에게 단일한 점수를 부여할 수 없다.

비판적 오류주의 /critical fallibilism

비판적 오류주의는 포퍼(Karl Popper)가 과학적 발견의 논리를 기술하기 위해 제기한 것으로 과학 지식의 성장을 추측과 반박의 과정으로 규정하며, 모든 지식은 잠정적인 것으로 끊임없는 비판의 대상이 된다고 보는 과학철학이다. 포퍼에게 과학 지식의 성장이란 사실이나 관찰 경험의 단순한 축적이 아니라 시행착오, 곧 추측과 반박의 과정이며 제기된 과학적 이론의 비판과 폐기, 보다 나은, 보다 더 만족스러운 이론으로의 거듭된 대치를 의미한다. 비판적 오류주의에 따르면 과학 지식은 추측과 반박에 의해서 성장하며, 지식은 결코 확실성을 가질 수 없고 단지 잠정적일 뿐이다. 인간은 진리를 알 수 없으며 단지 추측할 수 있고 추측을 개선할 수 있을 뿐이다. 추측을 검사하고 그에 대한 반박을 고려하여 추측을 검사하거나 이를 제거할 수 있는 새로운 추측을 창안하여 대체함으로써 지식의 성장이 이루어진다. 포퍼의 비판적 오류주의는 라카토스의 오류주의 수리철학의 모태이다.

사회적 구성주의 /social constructivism

사회적 구성주의는 어니스트(Paul Ernest)가 전개한 구성주의로 수학적 지식의 사회적 성격을 강조하고 수학적 지식의 객관성을 사회적 공유성으로 파악한다. 사회적 구성주의에서는 언어가 사고와 의미의 발달, 지식의 형성에 결정적 역할을 한다고 본 비고츠키(Lev S. Vygotsky, 1896~1934)의 주장을 수용하면서, 수학적 지식의 바탕으로 사회적·문화적 규약으로서의 언어로 보는 규약주의의 관점을 취하고 있다. 또 수학의 발견을 추측과 증명 및 반박의 논리에 의한 사회적 구성 과정으로 본 라카토스의 준경험적인 오류주의 수학관을 바탕으로 하고 있다.

상징적 표현 /symbolic representation

상징적 표현은 브루너가 사용한 용어로 명제를 형성하고 변형하는 규칙과 법칙에 의해서 지배되는 어떤 상징체계로부터 이끌어 낸 일단의 상징적 혹은 논리적 명제에 의한 표현을 말한다. 이를테면 추상적인 개념, 원리, 법칙을 나타내는 문장이나 수식, 여러 가지 기호 특히 문자 변수로 표현하는 것이 이에 해당한다. 상징적 표현은 가장 추상적이고 가장 효과가 큰 방법으로, 그 힘은 하나하나의 기호에 있지 않고 기호 체계 즉, 언어로서의 기호의 결합에서 생긴다.

수직적 수학화 /vertical mathematising

수직적수학화는트레퍼스(Adrian Treffers)가 사용한 용어로 수학적 대상을 수학적 체계 내에서 가공 처리하는 것, 즉 수학적인 것을 더 높은 수준으로 전환하는 것을 의미한다. 이를테면 덧셈의 성질이 일반화되어 법칙으로 인식되는 것은 수직적 수학화이다. 프로이덴탈에 의하면 수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작하지만, 수학적 경험이 축적되면 수학 자체의 수학화인 수직적 수학화가 시작된다. 트레퍼스에 의하면 수평적 수학화와 수직적 수학화가 모두 빈약한 수학교육은 기계론적 수학교육이고 그 반대는 현실주의적 수학교육이다. 수직적 수학화는 충실하지만 수평적 수학화가 빈약한 수학교육은 구조주의적 수학교육이며, 그 반대는 경험주의적 수학교육이다.

수평적 수학화 /horizontal mathematising

수평적 수학화는 트레퍼스가 사용한 용어로 문제장면을 수학적 문제로 변형하는 것을 의미한다. 이를테면 구체물을 세어 2+7=7+2임을 인식하는 것은 수평적 수학화이다. 프로이덴탈에 의하면 수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작한다.

수학교육의 인간화 /Humanizing Mathematical Education

수학교육의 인간화란, 수학을 성공과 실패를 거듭해 온 인간적 활동으로 보고, 수학교육이 바로 그 인간적인 수학적 활동을 촉진하는 교육이 되어야 한다는 것을 의미한다. D. Wheeler(1975)는, 아동이 학교에서 수학을 배울 때 수학의 가치와 매력을 경험하는 대신 수학 때문에 손상된 마음을 간직한 채 졸업하게 되는 비인간적인 현실을 극복하기 위해 수학교육의 인간화를 제창했다. D. Wheeler는 이러한 수학교육의 인간화를 위해, 아동에게 수학적 지식을 강요하는 대신 아동의 수학적 활동을 촉진하는 수학화를 강조하였다. 그리고 아동에게 인간 활동으로서의 수학을 제시하며, 수학을 매개로 한 아동의 의식성을 육성하기 위해 자각의 경험을 이용할 것도 아울러 제안하고 있다.

수학교육 현대화 운동/New Math

1950년대 전기부터 미국과 유럽에서 미온적으로 시작되고 있던 수학교육개혁 움직임은 1957년 10월 4일에 있었던 소련의 인공위성 Sputnik(스프트니크) 1호의 발사 성공을 기폭제로 하여, 그 후 1970년대 후반까지 세계 각국에서 급속하게 진전되었다. 이 일련의 수학교육 개혁 움직임을 수학교육 현대화운동이라 한다.
미국은 스프트니크 쇼크 이래 나라의 위신을 세우고자 과학기술교육의 개선에 착수하여, 빠른 개혁을 진행하였다. 특히, SMSG(학교수학연구그룹)은 실험교과서를 만드는 등, 적극적으로 현대화를 추진하여 세계 각국에 큰 영향을 주었다. 유럽에서도 OEEC(유럽경제협력기구) 가맹국들이 과학기술요원 충족을 위하여 현대화의 필요성을 절감하고 1959년에 로야몽에서 세미나를 개최하는 등, 현대화의 기운이 무르익어 갔다. 이 세미나에서 듀돈데(J. Dieudonne)는 현대수학의 대담한 도입, 논리적 엄밀성의 강조, 유클리드 기하 등 과거 교재의 대담한 삭제, 대수적 구조와 현대적 방

법의 중시 등을 현대화의 기본 방향으로 제시하였다.

① 수학적인 면 : 19세기 말부터 수학이 비약적으로 발달하였다. 특히, 집합론, 추상대수학, 위상수학, 확률, 통계 등이 발달했다. 또 그러한 발달에 수반하여 수학의 응용 영역도 변화 및 확대되었다.

② 사회적인 면 : 컴퓨터의 발달을 포함하여 과학기술의 현저한 발달이 있었다.

③ 심리학, 교육학적인 면 : 피아제와 브루너 등의 인식론과 교육이 발달했다.

수학적 다양성의 원리 /mathematical variability principle

수학적 다양성의 원리는 딘즈가 제시한 네 가지 수학 교수·학습 원리의 하나로서, 일반적인 수학적 개념을 이루는 불변인 특성이 드러나게 하기 위해서 비본질적인 모든 특성을 변화시켜야 한다는 원리이다. 즉, 수학적 개념을 제시할 때 변화시킬 수 있는 것과 변화시킬 수 없는 것 중에서 변화시킬 수 있는 것은 가능한 한 변화된 것을 제시하여야 한다는 것이다. 이것은 수학적 개념의 충실한 일반화를 위한 전략이다.

스키마/schèma(프)/schema

스키마는 본래 의학 용어로 사용되던 것을 바아트렛(F. Bartlett)이 심리학에 도입한 것이다. 비록 스켐프가 심리학적인 관점에서 스키마에 대해 자세히 논의하고는 있으나, 그 의미는 사실상 피아제의 쉐임(schème)과 거의 같다. 스켐프는 스키마를 인간의 기억 속에서 개념들이 결합적 또는 개념적으로 연결되어 저장된 개념 구조(conceptual structures)로 설명하고 있다. 즉, 스켐프에게 있어 개념 구조와 스키마는 동의어이다. 스키마와 지식 구조(Knowledge structures) 역시 동의어이다. 스키마는 지식을 쌓아가고 이해가 가능하도록 하는 데 사용된다. 어떤 것을 이해한다는 것은 그것을 적당한 스키마에 동화시키는 것이다.

스키마 학습 이론 /schemtaic learning theory

스키마 학습 이론은 스키마, 동화, 조절이라는 피아제의 개념에 근거하여 전개된 스켐프의 학습 이론으로 적절한 스키마를 구성하고 사용하게 하는 방식의 학습 이론이다. 스켐프에 따르면 스키마 학습은 당장의 학습을 더욱 효과적으로 할 수 있게 해주며, 장래의 학습을 위해서도 필요한 적응력 있는 정신적 도구를 준비해 준다. 스키마 학습에서 중요한 것은 적절한 예비 스킴이 존재하는가 어떤가 하는 학습 준비성과 자료를 어떻게 배열할 것인가 하는 자료 제시이다.

쉐임/schème(프)

피아제는 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있는 인지 구조를 쉐임이라고 하고 있다. 즉, 쉐임은 인간의 모든 행동과 조작을 가능하게 하는 인지적 작인이다. 쉐임은 고정적인 것이 아니며 가동적이다. 고립적으로 존재하는 것이 아니라 인지 구조 전체에서 서로 관련되고 통합되어 있으며, 일반화와 분화가 가능하다. 또, 경제적인 성격을 가지고 있어서 인지적인 소모를 가능한 한 경감시키려고 한다. 인간은 기본적인 행동 쉐임을 가지고 태어난다. 이 쉐임이 환경에의 계속적인 적응을 통해 일반화되거나 분화되고 다른 쉐임과 조정되면서 더 가동적이고 일반적인 구조로 재구성된다. 특히, 일련의 행동 쉐임은 상호 조정되어 반영적 추상화에 의해 조작적 쉐임으로 재구성된다. 환경에의 적응 상황에서 끊임없이 일어나는 인지적 균형의 파괴와 동화와 조절에 의한 새로운 균형화가 반복되는 쉐임의 재구성과정이 인지 발달이자 학습이다. 한편, 피아제는 어떤 특정한 행동이나 조작 결과의 단순화된 표상 즉, 이미지를 나타내기 위해 스키마(schèma)라는 용어를 사용하고 있다. 다시 말해, 스키마는 사고의 형식적 측면에 상당하는 것이며, 쉐임은 사고의 조작적 측면에 상당하는 것이다.

실행 수학 /The Acted out Mathematics

실행수학이란 수학 그 자체를 인간의 활동으로 볼 때의 수학을 의미한다. 기성 수학으로 만들어지기 전에는 언제나 실행 수학적인 모습으로 전재했다. 다시 말해 수학은 수학자들의 오랜 사고 활동을 거쳐 완성되었던 것이다. 따라서 학교수학이 실행수학을 제재로 해야만 한다는 것은 학생들이 수학자에 의해 이전에 이미 발명이 된 수학을 발명되던 그 방식 그대로 다시 한 번 발명하게 해야만 한다는 것을 의미하는 것이라 할 수 있다. 한편, 실행수학을 폴리아(G. Polya, 1957)식으로 표현한다면, '구성도중에 있는 수학', '발명되고 있는 수학' 또는 '발생 상태 그대로의 수학'이다.

[반] 기성 수학

시각화/visualization

시각화란 '손으로 그리든, 컴퓨터를 이용하든 관계없이 수학적 개념과 원리와 문제를 기하학적으로 또는 그래프로 표현하거나, 그렇게 표현된 것을 이용하는 것'으로 정의한다. 시각화의 대표적인 유형으로는 기호로 나타내어진 수학적 내용을 도해의 형태로 제시한 정적인 것과 컴퓨터 소프트웨어나 영화를 이용한 동영상과 같은 동적인 것이 있다. 특히 컴퓨터 소프트웨어는 학생들에게 역동적인 동영상을 통해 수학의 불변성을 보여줄 수 있다는 측면에서 수학의 시각화를 돕는 매우 뛰어난 도구이다. 그러나 컴퓨터 소프트웨어를 이용하는 상황에서 강력한 시각적 자극으로 수학적 사고가 어렵게 되고 학생들이 주어진 과제를 해결하기 위해 도입된 시각적 수단에 대한 조작에 몰입하게 되어 소위 메타인지적 이동이 일어날 수도 있다.

신념 체계/belief system

신념 체계는 쉔펠드가 수학적 문제해결과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개 범주 중의 하나로서, 개인의 수학세계관 즉 개인의 문제해결 행위를 결정짓는, 그러나 반드시 의식적일 필요는 없는 여러 가지 요인들의 집합체를 의미한다. 개인의 수학세계관에서는 자기 자신, 문제해결과 관련된 환경, 주제 그리고 수학 그 자체에 관한 것이 포함될 수 있다. 개인은 그 수학세계관에 바탕을 두어 수학과 수학적 과제에 접근하며, 개인이 선택하는 방법을 결정짓는다. 신념체계가 문제해결을 위한 맥락을 확립하게 되며, 그 안에서 자원, 발견술, 그리고 통제가 작용하게 된다.

심리역학/psycho-dynamics

심리역학은 딘즈가 수학적 개념 형성의 과정을 설명하기 위한 심리학적 근거로서 제시한 3단계의 구성적 활동 메커니즘을 의미한다. 1단계는 개념의 구성 요소를 다루는 오랫동안의 무의식적인 예비놀이 단계이다. 2단계는 1단계의 경험이 의미 있는 전체로 점차 구성되어 가는 방향에 대한 느린 깨달음이 일어나면서 수학적 경험이 시작되는 단계이다. 3단계는 갑작스럽게 구조에 대한 통찰 즉, 이해의 순간이 오고 개념이 형성되는 단계이다.

심상/mental object

심상(心象)은 프로이덴탈이 사용한 용어로 개념 형성의 근원이 되는 자발적 관념 또는 직관 등과 같은 것이다. 프로이덴탈에 의하면 수학화의 과정에서는 일반적으로 현상의 조직 수단을 먼저 직관적으로 인식하여 심상을 구성한다. 즉, 심상은 본질의 일차적 형태이다. 개념은 본질의 이차적 형태이다. 이를테면 탁자, 방문, 신문지, 책, 침대 등의 직사각형 모양을 한 현상으로부터 심상으로서의 직사각형을 구성하고, 다시 직사각형의 개념을 형성하는 것이다.

안내 단계/stage of information

반 힐레는 사고 수준의 비약을 위해서는 5단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 안내 단계는 이 교수 프로그램을 구

성하는 첫 번째 단계로, 자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 예와 예가 아닌 것을 조사하는 활동은 이 단계에 해당한다.

암묵적 모델/Tacit Model

암묵적 모델이란, 휘시바인(E. Fischbein)이 제안한 것으로서, 어떤 수학 개념이 있을 때, 그 개념을 대리하는 자기 나름대로의 상, 즉 모델을 일컫는다. 이렇게 만들어진 암묵적 모델은 마음속에 고착화됨으로써, 그 이후 수학을 학습하는 과정에서 지속적으로 영향을 미치게 되는바, 바로 수학적 오개념의 근원이 되기도 한다. 이를테면 많은 학생들이 '□=3+4'와 같은 식은 뒤집어 쓰인 것이라고 주장하며, '3=3'은 의미 없다고 이 식을 거부하거나, '6-3=3', '7-4=3'과 같은 식으로 해석하기도 한다. '4+5=3+6'과 같은 식에 대해 '=' 이후에는 답이 나와야 한다고 주장한다. 이와 같은 주장은 바로 등호 '='은 여러 요소를 하나의 결과로 변환하는 기호라고 간주하는 암묵적 모델이 자리 잡고 있어서 지속적으로 영향을 미쳤기 때문이다.

〈cf〉 암묵적 모델의 특성

① 암묵적 모델은 매우 구조적이다. 그 결과 하나의 현상 또는 하나의 개념에 대해 전체적으로 단일하고 이미 풍부한 해석을 내리게 해 준다.

② 실제의 개념이 추상적일 때조차도, 이 개념을 대리하는 암묵적 모델은 구체적이고 실제적이고 행동적이다.

③ 암묵적 모델은 행동의 관점에서 볼 때 간편하고, 경제적이고, 직접적으로 표현 가능하기 때문에 추론 과정에서 특권적 위치를 점유한다.

④ 암묵적 모델은 그 자체로는 매우 단순함에도 불구하고, 일반적으로 많은 규약을 양산한다.

⑤ 실제의 개념과 마찬가지로 암묵적 모델도 자기 나름대로의 규칙을 지닌 실체로서, 외적 규약에 의존하지 않는다.

⑥ 암묵적 모델은 견고하다. 습득한 형식적 지식에 더 이상 대응할 수 없게 된 이후에도 이 암묵적 모델은 오랫동안 생존하다.

역동적 원리/dynamic principle

역동적 원리는 딘즈가 제시한 네 가지 수학 교수 · 학습 원리의 하나로서, 수학개념이 형성되는 자연스런 심리역학적과정에 따라 경험과 학습 상황이 조직되어야 한다는 원리이다. 즉, 수학개념이 발생할 수 있는 놀이나 게임을 경험시켜 주어야 한다는 것이다. 딘즈는 이 심리역학적과정을 놀이를 통한 3단계의 구성적 활동으로 보고 있다. 1단계인 예비적 놀이 단계에서는 방향과 목적이 없는 듯한 놀이가 그 자체를 즐기게 된다. 따라서 이 단계에서의 개념학습은 개념의 구성 요소가 놀이 자료에 포함되지만 가능한 자유스러워야 하므로 이 단계에서는 예비적인 게임이 필요하다. 2단계는 1단계보다 더 목적 지향적이긴 하지만 찾고 있는 것에 대한 분명한 인식이 결여되어 있다. 따라서 어느 정도 구조화된 활동이 필요하므로 구조화된 게임이 필요하다. 3단계에서는 개념이 형성되므로 형성된 개념을 정착시키고 적용시키기 위한 연습 게임이 요구된다. 이 원리를 활동적 원리 또는 역동성의 원리라고 하기도 한다.

역사발생적 원리 /The Histo-genetic Principle

역사발생적 원리는, 수학의 역사에서 볼 수 있는 역사적 도식화의 과정을 단축하여, 학생들이 그것을 수학의 교수-학습에서 재현하게 한다는 교수 원리이다. 이러한 역사발생적 원리는 연역적으로 전개된 이론 체계에 따른 형식적인 학교수학의 결함을 극복하기 위하여 18세기 이래 거듭 제기되어 왔으며, 특히 20세기 초에 클라인(F. Klein)과 포앙카레(H. Poincare)에 의해 강력하게 주장되었다. 프로이덴탈은 이러한 역사발생적 원리에 따른 수학교수 · 학습을 시도함으로써, 수학의 발달이라고 하는 인류 그 자체의 학습 과정을 단축된 형태의 가상적 과정으로

재현시켜 학생들로 하여금 수학적 사고를 경험하게 할 수 있다고 보고 있다.

연역적(인) 사고 방법

연역적인 사고 방법은 연역을 구사하는 사고 방법이다. 연역은 전제로 주어진 몇몇의 명제로부터 논리적인 규칙을 사용하여 필연적인 결론을 엄밀하게 도출하는 방법이다. 좁은 의미로는 일반적인 주장에서 특수한 주장으로 나아가는 추리를 의미한다. 일반적으로 학교수학에서 그 근거가 되는 명제, 즉 공리를 미리 분명히 정해 놓고 출발하는 것은 아니다. 연역적인 사고 방법에서는 여러 가지 유형이 있다.

① 해석적인 사고 방법: 구하려는 것이 얻어졌다고 하고 어떤 사실이 성립하지 않으면 안 되는가 라는 식으로 사고를 전개

② 총합(總合)적인 사고 방법: 주어진 조건으로부터 무엇을 말할 수 있는지 또는 어떤 사실이 성립하는지 알아보려는 방향으로 사고를 전개

③ 구조적인 사고 방법: 집합에 주목하고 그 기본연산이나 관계를 포착하여 그것이 어떤 조건을 만족하는가를 분명히 하려는 방향으로 사고를 전개

④ 공리적인 사고 방법: 무정의 용어와 공리를 선정하고 새로운 용어를 도입하면서 정리를 증명

모두 연역적 사고 방법에 속한다.

연역주의자의 양식 /The Deductivist Style

수학에 관해 저술된 거의 모든 책 또는 논문의 경우, 공리 또는 정의가 먼저 제시되고 나서 어떤 정리가 제시된다. 이와 같은 거의 의무적인 진술 양식은 유클리드 이래 현재까지 계속되고 있는 수학계의 오랜 전통이며 라카토스는 이러한 양식을 일컬어 연역주의자의 양식이라고 하면서 수학에서의 권위주의는 바로 이 양식에 의해 조작되고 있다 하였다. 연역주의자의 양식에서는 고심해서 진술한 일단의 공리, 보조 정리, 정의로부터 시작한다. 일단의 공리와 정의에 이어, 조심스럽게 표현된 정리가 잇따른다. 이 정리 뒤에는 증명이 잇따르게 된다. 연역주의자의 양식에서는 또한 모든 명제는 참이고 모든 추론도 타당하다. 그리하여 수학은 영원히 변치 않는 진리가 계속 쌓여 가는 집합으로 제시되는바 반례, 반박, 비판 등을 용납하지 않는다.

열린수학/Open Mathematics

'닫힌수학'은 실재(reality)에 대한 지식인 이론이 완벽하게 실재, 즉 객관적 세계와 학생으로부터 분리된 수학이다. 즉, 닫힌수학이란 자체적으로 완비된 것이고 정적인 것이다. 열린수학이란, 단지 주위의 환경 즉, 실재와 관련되어야 효과적이며 열린수학은 실재의 일부만을 수학화 할 뿐으로, 유일한 답을 만드는 것이 아니라 실재를 구조화하는 수단을 만든다. 즉, 닫힌수학과 비교해서 열린수학은 여러 가지 가능성을 만들어 낸다.

영상적 표현 /iconic representation

영상적 표현은 브루너가 사용한 것으로 어떤 개념을 완전히 정의하지는 않지만 그것을 나타내는 일단의 대략적인 이미지나 그림에 의한 표현을 의미한다. 이를테면 도형을 나타내는 그림, 수도(數圖), 벤다이어그램, 통계적인 그래프, 함수의 그래프, 대응도, 수형도, 플로우차트(flow chart), 여러 가지 도해 등과 같은 그림 표현이 이에 해당한다. 영상적 표현은 일종의 기하학적 언어로 생각할 수 있는 매우 가치 있는 수학적 사고 수단이다.

오류주의/fallibilism

오류주의는 수학은 준경험 과학이며 수학가설은 추측에 불과하다고 보는 라카토스의 견해에 바탕을 둔 수리철학이다. 라카토스는 포퍼(Karl Popper)의 비판적 오류주의에 입각하여, 수학지식의 성장을 증명과 반박의 논리로 설명하고 있다. 라카토스에 의하면 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가

단조롭게 증가하면서 성장하는 것이 아니라 추측-증명-반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장한다. 즉, 수학은 추측과 반박에 의해 성장하는 준경험 과학이며, 수학지식은 반박되지 않을 때 잠정적으로 확인될 수 있을 뿐인 추측에 불과하다. 오류주의 대신 준경험주의(quasi-empiricism)라고 하기도 한다.

유추적(인) 사고 방법

유추적인 사고 방법은 유추를 구사하는 사고 방법으로 어떤 사상(事象) A에 대해 그것의 성질 또는 법칙 P를 알고 싶으나 모른다고 할 때, 이미 알고 있는 사상 중에서 그 사상과 닮은 사상 A을 생각해 내어, A에서 성립하는 성질 또는 규칙 P과 유사한 P가 원래의 사상 A에서 성립하지 않는지 알아보려는 사고 방법이다. 여기서 유추는 유비추리(類比推理)로 어떤 특수한 경우에서 다른 어떤 특수한 경우에 이르는 추리를 의미한다. 그런데 언제나 바른 것만을 유추한다고 볼 수는 없으므로 유추하고 나서 반드시 그것을 확인하지 않으면 안 되지만, 학생들의 능력을 고려하여 유추한 것을 그대로 인정하여 이용하기도 한다.

의사경험적 추상화/abstraction pseudo-empirique(프) /pseudo-abstraction

전조작적 수준 또는 구체적조작 수준의 아동은 자신이 확인할 수 있는 구성 결과에 근거하지 않고 구성을 실행할 수 없다. 이때 그 결과의 확인이 대상에 대해서 행해진다고 하는 점에서 그 구성의 과정은 경험적 추상화와 관련이 있는 것으로 보인다. 그러나 사실상 그 확인된 성질은 주체의 활동에 의해서 대상에 도입된 것이다. 피아제는 이와 같이 구성과정이 경험적 추상화와 관련이 있어 보이지만, 구성 결과를 확인해 주는 성질은 주체의 활동에 의해서 대상에 도입되는 추상화를 의사경험적 추상화라 하고 있다. 의사경험적 추상화의 과정에서 주체는 대상을 다루고 대상에 대한 실제적인 관찰을 하지만, 추상화되는 성질은 이전부터 존재하는 것이 아니라 주체의 행동의 조정에 의해서 대상에 도입되는 것이다. 따라서 이러한 의사경험적 추상화를 통해서도 논리·수학적 개념이 구성될 수 있다.

이차적 직관/secondary intuition

이차적 직관은 자연스런 경험이 아닌 교육적 간섭을 통해 획득된 개념으로부터 전환된 신념이다. 이차 직관의 창안은, 각각의 인지가 필연적이고 예견적인, 그리고 나중에는, 확립된 표상의 역할을 하는 활동에서, 학습자가 개인적으로 관여할 때 일어난다.
[반] 초보적 직관

인식론적 장애 /epistemological obstacle

인식론적 장애는 어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용하였던 지식으로, 학생의 인지구조의 일부가 되었지만, 새로운 문제상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식을 의미한다. 수학학습에서의 인식론적 장애는 브루소(Guy Brousseau)가 제안한 것으로, 그의 교수학적 상황론의 핵심적인 개념의 하나이다. 인식론적 장애는 학습하고자 하는 지식의 본성에 기인하는 것이므로 피할 수 없고, 새로운 지식이 성장·발달하기 위해서는 반드시 극복해야 하는 장애이다. 수학의 역사적 발생과정에서 나타난 인식론적 장애가 학생들에게도 매우 유사하게 나타난다는 것이 확인되고 있다. 인식론적 장애 형성에 영향을 주는 요인으로는 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유 등을 생각할 수 있다. 그러나 이 요인은 지식의 본질과 밀접히 관련된 불가피한 것으로 피할 수도 없고, 피해서도 안 되는 것이다. 대신 이를 조절하고 제어하는 능력을 개발하는 것이 필요하다.

인류학적 구성주의 /anthropological constructivism

인류학적 구성주의는 콥(Paul Cobb)이 급

진적 구성주의를 적용할 때 야기될 수 있는 혼란을 해소하기 위해 제시한 이론이다. 객관적인 수학적 지식의 실체를 완전히 부정하면 교육되고 있는 지식의 가치와 정당성을 크게 훼손하게 되므로 수학교육은 딜레마에 빠지게 된다. 인류학적 구성주의에서는 이를 해소하기 위해 수학적 지식의 객관성을 수학 공동체의 상호교섭과 조정 활동을 통한 공통 주관적인 합의 개념으로 해석한다. 인류학적 구성주의는 하나의 학습을 그 자체의 고유한 문화, 역사, 규약 등을 갖는 공동체로, 또한 그러한 것을 생성해 내는 하나의 사회로 보아야 한다는 것을 강조하고 있다. 그리고 이렇게 보면, 인류학적 구성주의는 사회적 구성주의의 한 종류로 볼 수 있다.

일반화의 사고 방법

일반화의 사고 방법은 일반화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 일반화는 내포를 고정시키고 이에 해당하는 외연을 명확히 하는 것으로, 문제해결을 위해 그 문제에서 볼 수 있는 일반성을 알아내거나, 또는 해결된 문제를 바탕으로 그 문제를 포함하는 집합 전체에서 성립되는 일반성을 알아내는 것이다.

자기평가/self assessment

학생들이 자신의 수학적 지식, 과정 및 태도를 학습하고, 이해하고, 그리고 조사하는데 있어서 자신의 진보를 능동적으로 모니터(monitor)하는 과정이 흔히 자기평가라고 불린다. 자기평가는 자기 자각(self awareness)과 자신평가(self evaluation)의 두 요소로 이루어진다. 자기 자각은 자신이 알고 있는 것에 관해 아는 것으로, 자신의 수학적 지식, 과정, 전략 및 태도의 레퍼토리를 자세히 살펴보는 것을 포함한다. 자신평가(self evaluation)은 자신이 무엇인가를 할 때 자기가 하고 있는 것을 통제하고 모니터하는 것으로, 자기 자각을 넘어 자신의 수학적 지식, 과정 및 성향을 비판적으로 보는 것을 포함한다.

자원/resources

자원은 쉔펠트가 수학적 문제해결과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개의 범주 중의 하나로서, 각 개인이 가지고 있으면서 특정한 문제의 해결에 동원할 수 있는 수학적 지식의 전체를 의미한다. 이를테면 특정한 영역에 관한 직관과 비형식적 지식, 사실, 알고리즘적 절차, 비알고리즘적이지만 기계적으로 수행할 수 있는 절차, 그리고 특정한 어느 영역에서의 작업에 필요한 규칙에 관한 이해 즉, 명제적 지식 등이 이 범주에 속한다.

자유로운 탐구 단계 /stage of free orientation

반 힐레는 사고 수준이 비약을 위해서는 5단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 자유로운 탐구 단계는 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 되는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 한 종류의 도형의 성질을 알고 다른 도형에서 이 성질을 찾아보는 활동은 이 단계에 해당한다.

전형적인 예/paradigm

프로이덴탈에 의하면 전형적인 예는 곧바로 그 구조에 대한 깊은 통찰을 제공해 주면서 동형인 다른 상황에 신속하고 정확하게 전이 가능한 예를 의미한다. 프로이덴탈은 수학적 개념, 원리, 법칙이 여러 가지 예의 관찰로부터 귀납적으로 획득되는 것, 즉 귀납적 이해로 획득되는 것이 아니라, 전형적인 예로부터 곧바로 구조를 파악하는 각지(覺知)를 통해 획득된다고 주장하고 있다.

전형적인 증명/preformal proof

전형적인 증명은 올바른 증명이지만 형식적으로 표현되지 않은 일련의 추론을 의미한다. 이러한 추론에서 결론은 타당한 것이긴 하지만, 비형식적 전제를 기반으로 한다. 이를테면, 구체적으로 주어진 실생활의 대상, 기하적-직관적 사실, 실생활과 관련된 기본

적인 아이디어, 또는 직관적으로 분명한 것으로 '공통적으로 이해할 수 있다', '심리적으로 분명하다'와 같은 언어 표현 등이 포함된다. 수학적 귀납법과 간접적 증명('…라고 가정하며', '…라면 어떻게 될 것인가?') 도 포함된다. 전형적인 증명은 적절한 조작적, 기하적 표현을 이용하여 이것을 일반적인 근거로 받아들이는 증명이다. 또 적절한 예 또는 모델 내에서 이루어지는 증명으로, 형식적 증명을 생성하거나 확신시키기도 하고, 정리의 의미를 더욱 명확히 이해하도록 도우며, 학생들이 심리적으로 자연스럽게 할 수 있는 증명이다.

전미수학교사협의회(NCTM)

The National Council of Teachers of Mathe- matics(NCTM)은 전미수학교사협의회라 번역할 수 있는 것으로 미국 최대의 수학교육단체이다. 1902년에 오스틴(C. M. Austin)을 초대회장으로 하여 설립된 이 단체의 설립목적은 수학교사 상호간의 협력과 협동을 증진하는 것과 교육 전문가들이 수학교육에 대한 주의와 고려를 촉구하는 것이었다. 그리고 이러한 목적을 실현하기 위해 설립 당시부터 기관지 Mathematics Teacher 및 연보를 의욕적으로 발간해 왔다.

절차적 지식 /Procedural Knowledge

절차적 지식은 개념적 지식(Conceptual Know- ledge)에 대비되는 것이다. 절차적 지식은 수학의 외형적 언어인 기호 표상 체계(수학 기호와 통사법)와 수학과제를 해결하는 데 필요한 알고리즘 또는 규칙으로 이루어져있다. 절차적 체계의 가장 중요한 특성은 구조화이다. 절차는 위계적으로 배열되어 있어 어떤 절차는 다른 절차의 하위 절차로 끼워지게 된다.

재발명법/Method of Reinvention

수학의 교수 · 학습방법인 재발명법(H. Freudenthal, 1973)은, 수학을 활동으로 해석하고 분석하는 것에 터한 지도 방법을 뜻한다. 프로이덴탈에 따르면, 재발명법은 이전에 존재하지 않았던 새로운 어떤 개념을 발명해 내게 하는 지도 방법을 의미하는 것이 아니라, 이전에 이미 발명이 된 개념을 그 개념이 발명되어 온 역사적 과정에 따라 다시 한 번 발명해 내게 하는 교수 · 학습방법을 의미한다. 그러나 이것은 수학의 역사를 그대로 반복하는 것을 의미하는 것은 물론 아니다. 그러기보다는 수학개념이 역사적으로 발달해 온 과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재구성하여, 그것을 학생들이 재현할 수 있도록 이끄는 교수 · 학습방법을 의미한다. 프로이덴탈은 학생들에게 수학의 발달이라고 하는 인류 그 자체의 학습과정을 단축된 형태의 가상적 과정으로 재현시켜 줌으로써, 학생들이 수학적 사고의 경험을 하게 할 수 있다고 보고 있다.

제1수준/first level(시각적 수준)

제1수준은 반 힐레가 기하학습과정에서 설정한 첫 번째의 사고 수준을 의미한다. 반 힐레는 1981년 이전에는 제1수준을 제0수준이라 하였다. 이 수준에서는 주변 대상을 도형이라는 정리 수단에 의해 파악하는 단계로, 기본적인 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 설명 없이 전체로서 시각적으로 판별한다. 이를테면 이 수준에서는 정사각형과 직사각형을 서로 다른 것으로 파악한다. 이와 같이 시각적 판단을 하기에 이 수준의 특징을 인식(recognition)으로 보기도 한다.

제 수준/second level(분석적 수준)

제2수준은 반 힐레가 기하학습 과정에서 설정한 두 번째의 사고 수준을 의미한다. 반 힐레는 1981년 이전에는 제2수준을 제1수준이라 하였다. 이 수준에서는 주변 대상의 정리 수단이었던 도형이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 이를테면 직사각형의 대각선의 길이는 같다든가 또는 마름모의 네 변의 길이가 같다는 등의 성질을

말할 수 있지만, 도형이나 그 성질을 명확히 상호 관련지을 수는 없다. 이와 같이 도형에서 외형적으로 찾을 수 있는 요소를 기술하기에 이 수준의 특징을 분석(analysis)으로 보기도 한다.

제3수준 /third level(비형식적 연역 수준)

제3수준은 반 힐레가 기하학습과정에서 설정한 세 번째의 사고 수준으로, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 수준이다. 반 힐레는 1981년 이전에는 제3수준을 제2수준이라 하였다. 이 수준에서는 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다. 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 이를테면 모든 정사각형은 직사각형임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다. 즉, 간단한 연역이 있을 수 있지만 증명이 이해되지는 못하며, 단지 도형과 그 관련성을 정렬할 수 있기에 이 수준의 특징을 정렬(order)로 보기도 한다.

제4수준 /fourth level(형식적 연역수준)

제4수준은 반 힐레가 기하학습과정에서 설정한 네 번째의 사고 수준으로, 형식적인 연역 체계를 파악하는 수준이다. 반 힐레는 1981년 이전에는 제4준을 제3수준이라 하였다. 이 수준에서는 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체 기하의 연역 체계를 파악한다. 이를테면 삼각형의 내각의 합은 180도라는 명제를 증명할 수 있다. 그래서 이 수준의 특징을 연역(deduction)으로 보기도 한다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며, 다른 공리 체계의 가능성을 이해하지는 못한다.

제5수준/fifth level(엄밀화 수준)

제 5수준은 반 힐레가 기하학습과정에서 설정한 다섯 번째의 사고 수준으로, 논리적 법칙의 본질을 통찰하는 수준이다. 반 힐레는 1981년 이전에는 제5수준을 제4수준이라 하였다. 이 수준에서는 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있고, 힐버트(David Hilbert)류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다. 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리 체계의 성질을 이해한다. 그래서 이 수준의 특징을 엄밀(rigor)로 보기도 한다. 반 힐레에 의하면 제 5수준 이상은 학교수학과 무관하며, 그 자신도 제 5수준에 대해서는 상세하게 설명하고 있지 않다.

제한된 탐구 단계 /stage of guided(or bound) orientation or exploration

반 힐레는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 제한된 탐구 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 두 번째 단계로, 제시된 자료를 통해 탐구 분야를 연구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조가 점진적으로 파악되는 단계이다. 이를테면 제1수준에서 제2수준으로 가는 경우 접거나, 측정하기, 대칭 찾기 등은 이 단계에 해당한다.

조작/operation

피아제에 의하면 조작은 내면화된 가역적 행동이다. 행동이 내면화되었다는 것은 어떤 행동의 특정한 내용을 벗어나, 그 행동의 일반적인 형태를 인지 구조화했음을 의미한다. 내면화는 언어를 사용하고 이미지를 그리며, 상징 기능이 생김으로써 가능해진다. 내면화가 이루어지면 시간적으로 공간적으로 멀리 떨어진 사건을 동시에 파악할 수 있게 되어, 과거의 행동을 반성하고 그것을 표현할 수 있게 된다. 또 상징적 규약을 받아들이게 되어 사회적 상호 작용이 가능하다. 행동이 가역적이라는 것은 머릿속에서 이미 한 행동을 취소(또는 부정)하거나 또는 상반(相反)을 통해 출발점으로 되돌아올 수 있음을 의미한다. 한편, 피아제는 조작을 구체적 조작과

형식적 조작으로 구분하고 있다. 분류, 계열화 등이 구체적 조작이고, 언어적 가설에 근거하여 추론하는 것은 형식적 조작이다.

조작 교구/manipulative material

수학에서 사용되는 조작 교구는 대체로 손으로 다룰 수 있는 교구를 의미한다. 이를테면 다진수 블록(multibase blocks), 속성 블록(attribute blocks), 패턴 블록(pattern blicks), 지오보드(geoboard), 퀴즈네르 색막대(Cusinaire color rods), 탱그램(tangram) 등이 여기에 해당한다. 수학적 개념을 가르치기 위해 특별히 고안된 것 이외에, 돈이나 저울 등과 같이 주변 환경에서 차용한 것도 활용 목적에 따라 조작교구가 될 수 있다. 조작 교구는 다음의 네 가지 특성을 가진다.

① 학생들의 지각적 감각에 자극을 주어야 한다.
② 학생들이 만질 수 있어야 한다.
③ 이동과 재배열이 가능해야 한다.
④ 수학적 아이디어를 표현해야 한다.

조작적 구성주의 /operational constructivism

조작적 구성주의는 피아제가 전개한 수학인식론이다. 이에 따르면, 논리 · 수학적 개념은 생물학적 유기체의 구조를 출발점으로 하여 감각과 운동의 구조를 거쳐 행동의 일반적 조정(regulation)으로부터 반영적 추상화에 의해서 구성된 조작과 그것을 바탕으로 구성된 보다 고차의 조작이다. 또 수학의 역사적 발생의 메커니즘과 개인에 있어서의 수학의 심리적 발생의 메커니즘 사이에는 평행성이 있으나 서로 역순서로 발생한다. 조작적 구성주의에서는 인식 주체에 내재된 실현되지 않은 객관적인 수학적 지식의 잠재성과 그에 이르는 불변의 발달 통로를 가정하고 있다는 점에서, 이데아의 보편성과 수학적 지식의 실재성을 믿고 회상설을 제기한 플라톤주의(platonism)의 발생적 해석으로 볼 수 있다. 즉, 피아제는 주관에 의한 자의적인 구성을 용인하지 않으며 매우 객관적으로 생명체의 본질이라고도 말할 수 있는 행동의 조정에 의한 구성, 즉 보편성의 실현을 주장하는 것이다.

죠르단 효과/The Jourdain Effect

몰리에르(Moliere)의 희곡 '자칭 신사(would-be gentleman)'에 나오는 극중 인물인 죠르단(Jourdain)은 철학자에게서 산문과 운문의 차이에 대해 설명을 듣게 된다. 그리고 마침내 '이런, 사십년간이나 산문으로 말해왔으면서도 그것을 모르고 있었다니! 아무튼 가르쳐 주셔서 대단히 고맙소' 라고 외치게 된다. 즉, 죠르단은 산문이 무엇인지도 모르면서 마치 자신이 산문을 아는 것처럼 생각한다.
수학의 교수 · 학습에서도 이와 유사한 현상이 일어날 수 있다. 예컨대 여러 개의 작은 요구르트 병이나 색칠한 그림 등으로 약간의 기이한 조작을 한 학생에게, 교사가 '너는 방법 클라인군(Kleinian Group)을 발견했어!' 라고 하는 경우이다. 학생이 진정으로 클라인군을 알아서가 아니라 어쩌다보니 그렇게 되었음에도 교사는 학생의 반응을 과대해석하고 있는 것이다. 수학의 교수 · 학습에서 이처럼 교사가 학생의 매우 사소하고 진부한 반응을, 그것이 마치 어떤 수학적 지식의 발로에서 비롯된 것인 양 취급하는 현상을 일컬어 죠르단 효과(Brousseau, 1984)라 한다. 이 죠르단 효과는 토파즈 효과의 심각한 퇴행으로 교사가 특정한 지식에 대해 학생과 토론하기도 어렵고 그렇다고 가르칠 수 없음을 인정하기도 어렵게 되는 경우, 그러한 곤란을 피하고자 할 때 나타나게 된다.

증명/proof [라카토스]

라카토스에 의하면 수학은 추측과 증명과 반박에 의해 성장하는 준경험 과학이며 수학지식은 반박되지 않을 때 잠정적으로 확인될 수 있을 뿐인 추측에 불과하다. 라카토스는 증명을 본래의 추측을 부분 추측 즉 보조정리로 분해하여 비판과 반박의 시야를 넓히는 사고 과정이라 주장하였다. 라카토스에게 증명은 확실성을 갖는 정리를 증명하는 것이

아니라 추측을 개선하는 것이다.

지각적 다양성의 원리 /perceptual variability principle

지각적 다양성의 원리는 딘즈가 제시한 네 가지 수학교수·학습원리의 하나로서, 같은 개념을 지각적으로 다르지만 구조적으로는 동치인 다양한 구체적인 자료로 제시해야 한다는 원리이다. 이 원리는 개념 형성에서 가능한 한 넓은 범위를 허용하기 위한, 또 아동들이 추상적인 개념의 본질을 유도하기 위한 것이다. 이 원리를 다중 구체화의 원리(multiple embodiment principle)라고 하기도 한다.

지시 체계/director system

지시 체계는 현 상태와 목표 상태를 파악하고 비교하여 그 간격을 좁히기 위한 계획을 세우고, 그에 따라 행동하게 하는 정신적 도구로서 지능의 본질이다. 지식 체계는 스켐프가 지능이 목표 지향적으로 행동한다는 것을 설명하기 위해 인공두뇌학에서 차용한 용어이다. 지시 체계는 외부 환경으로부터 정보를 수용하여 실제적인 대상에 대하여 행동하게 하는 지시 체계인 델타-1과 그 델타-1이 경제적으로 또, 적응력을 가지고 작용하도록 스키마를 구성하는 지시 체계인 델타-2로 나뉜다. 지적 학습은 이 델타-2에 의해 이루어진다.

지식의 구조 /structure of knowledge

브루너는 학문은 독특한 기본적인 구조를 가지고 있다는 것을 전제로 하여, 교육과정은 그 구조를 중심으로 조직되어야 한다고 보고 있다. 브루너가 구조를 어떤 의미로 사용하고 있는지 명확히 한 것은 아니다. 수학교육학자들은 브루너가 말하는 구조의 의미를 일반적 원리, 기본 개념, 일반적 아이디어의 의미로 대치될 수 있는 것으로 보고 있다. 브루너에 의하면, 학생들이 배워야 할 개념이나 원리 즉, 구조를 학생들이 파악할 수 있는 형식으로 친절하게 번역해 주는 방법이 있다. 여기서 교과의 구조를 파악한다는 것은 한 가지 현상을 여러 가지 현상과 관련해서 이해할 수 있게 된다는 것을 말한다. 즉, 구조를 학습한다는 것은 사물이나 현상이 어떻게 관련되어 있는가를 학습하는 것이다.

지적 학습/Intelligent Learning

스켐프는 수학을 학습하는 두 가지 양상으로 '습관적 학습'과 '지적 학습'을 제시했다. 습관적 학습의 결과는 새로운 상황에 대처하는 적응력이 떨어진다. 이러한 적응력을 높여주는 학습이 바로 지적 학습이다. 즉, 수학학습에서 지적 학습은 많은 공식을 외우는데 있는 것이 아니라, 필요에 따라 수없이 다양한 행위 계획을 이끌어 낼 수 있도록 '지식 구조'를 쌓는데 있다. 그래서 어떤 상황에 맞는 공식이 없는 경우에도 적절히 대처할 수 있는 계획을 만들 수 있다. 이러한 계획은 행동에 선행에서 구성될 수 있고, 행동에 비추어 수정될 수 있다. 이러한 것들이 매우 다양한 상황에서 폭넓은 여러 가지 목표 수행을 가능하게 한다. 더욱이 우리는 서너 개의 계획을 세워서 이 계획을 행동에 옮기기 전에 그중 최선의 것을 택할 수도 있다. 지적 학습은 행동에 선행하는 경우가 많다. 그리고 행동은 목표를 성취하는 것뿐만 아니라 가설을 검증하는데도 사용된다.

직관기하

트루틀레인(J. P. Treutlein)이 창설한 것으로 도형에 대한 직관적 인식과 취급 그 자체에 교육적 가치가 있다고 보아, 그것을 하나의 독자적인 교과로 대우하는 것을 의미한다. 따라서 직관기하는 논증기하의 입문이라는 것을 전제로 하는 것은 아니며, 단지 직관에 의한 도형 개념의 형성 그 자체를 목적으로 하고 있는 것이다.

직관주의/intuitionism

직관주의는 수학의 대상이 직관에 의해 구성된다고 보는 수리철학이다. 직관은 다른 어

떤 논리보다도 선행하는 것으로 수학의 기본 개념과 기본 명제를 자명한 것으로 인식하게 하는 것이다. 직관주의에서 수학지식은 제한된 구성적 논리에 기초한 구성적 증명에 의해 확립되며, 수학적 대상의 의미는 그것이 구성되는 과정에 의존하게 된다. 즉, 직관주의자들은 직관적으로 안전한 구성적 방식을 이용하여 수학적 지식을 이끌어 냄으로써 그 확실한 기초를 제공할 수 있다고 생각하였다. 직관주의자들은 논리주의에서 직면하게 되었던 패러독스를 피할 수는 있었지만, 수학의 내용을 지나치게 제한하는 오류를 범함으로써 고전수학의 많은 부분을 포기하는 결과를 가져왔다.

초보적 직관/primary intuition

초보적인 직관은 체계적인 교육과 무관하게 개인적인, 그러나 문화 변인에 종속되는 정상적인 일상 경험의 결과로 발달하는 인지적 신념이다. 초보적 직관은 기초 직관(ground intuition)과 개별적 직관(individual intuition)을 모두 포함한다. 초보적 직관은 전조작적 직관과 조작적 직관으로 세분될 수 있다. 전조작적 직관은 형태에 바탕을 두며, 조작적 직관은 조작에 바탕을 둔다. 구체적 조작기 동안에 발달하는 조작적 직관은 전 생애 동안 안정된 획득물로 남게 된다.

총체적 채점법/holistic scoring

총체적 채점법은 과제 해결의 전체적인 완성도에 따라 단일한 점수를 부여하는 방법이다. 총괄적 채점법이라고 하기도 한다. 이러한 채점법에서는 해답뿐만 아니라 과정을 중시하며, 학생들의 답안에 대해 단일한 점수를 부여하기 때문에 비교적 신속하게 평가할 수 있고, 답안에 구체적인 기준을 주어 객관성이 확보된다. 그러나 문제해결에 대해 단일한 점수를 부여하기 때문에 학생들의 강점과 약점을 파악하기 어렵고, 학생들을 효과적으로 도와줄 수 없다.

추측 직관/conjectural intuition

추측 직관은 미래의 사건, 어떤 현상의 코스 등에 대한 자신감과 연합된 가정(assumption)이다. 추측 직관을 통해 개인은 어떤 것을 추측하고 가정한다. 추측 직관은 보통 사람의 직관과 전문가의 직관으로 세분될 수 있다. 보통 사람의 직관은 전문적인 지식에 바탕을 둔 것이 아니라 매일 매일의 경험에 바탕을 둔 것이다. 전문가의 직관은 전문적인 지식에 바탕을 둔 것이다. 전문가는 최소한의 정보를 바탕으로 가장 적절한 측면을 파악하고, 정보의 중요성을 결정하며, 여러 가지 가능한 해석을 가늠하여 의미 있는 결론을 내린다.

퀴즈네르 색막대 /Cusinaire colour rods

벨기에의 초등학교 교장인 퀴즈네르(G. Gusinaire)가 영국의 저명한 수학교육학자인 가테그노(C. Gattegno)와 공동으로 개발한 수학교구이다. 이 교구는 아동들이 자발적으로 가지고 노는 동안에 수 개념을 터득하도록 고안된 것으로 나무로 만든 막대로 되어 있으며, 색과 크기로 숫자를 구분해서 나타낸다. 즉, 가로, 세로의 길이와 높이가 각각 1cm인 흰색의 정육면체는 1을, 높이 2cm인 빨간색의 정육면체는 2를, 높이 3cm인 연두색의 정육면체는 3을, 높이 4cm인 분홍색의 정육면체는 4를, 높이 5cm인 노란색의 정육면체는 5를, 높이 6cm인 초록색의 정육면체는 6을, 높이 7cm인 검정색의 정육면체는 7을, 높이 8cm인 고동색의 정육면체는 8을, 높이 9cm인 파란색의 정육면체는 9를, 높이 10cm인 주황색의 정육면체는 10을 나타낸다. 이 교구는 임의의 단위에 의한 측정, 혹은 그것을 바탕으로 한 비로서의 수의 개념을 강조하고 있다.

토파즈 효과/The Topaze Effect

마르셀 빠뇰(Marcel Pagnol)의 유명한 희곡 토파즈의 첫 장에 보면, 교사 토파즈(Topaze)는 12살 된 자신의 학생에게 양의 복수를 나타내는 불어 'des moutonsse'를 정확히 받아쓰도록 지도한다. 그 과정에

서 학생의 어깨 너머로 잠시 들여다 본 후, 학생이 잘 받아쓰지 못하자 안타까운 마음에서 des moutons, des moutonss라고 불러준다. 그리고는 마침내 des moutonsse라고 불러 주고 만다. 그는 몇 차례의 실패 끝에 약간의 양해를 구하면서 그것이 복수라는 명백한 힌트를 주게 된다.

수학의 교수 · 학습에서도 이처럼 교사가 학생이 스스로 할 수 있도록 해주는 그런 학습 환경을 조성하는 대신, 그러한 학습 환경을 오히려 일소해 버리는 경우가 있다. 이러한 현상을 일컬어 토파즈 효과(Brousseau, 1984)라고 한다. 이 토파즈 효과는 교사가 교수학적 계약에 따라 학생들을 도와주어야 한다는 의무감에 지나치게 매였을 때, 심리적인 압박감에서 일어나게 되는 전형적인 현상이라 할 수 있다.

통제/control

통제는 쉔펠트가 수학적 문제해결 과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개 범주 중의 하나로서, 자원과 전략의 선정과 이행에 관한 전체적인 결정 행위를 의미한다. 이를테면 계획, 모니터와 평가, 의사결정, 그리고 의식적인 메타인지적 행동 등이 이 범주에 속한다.

통합 단계/stage of integration

반 힐레는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 통합 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 다섯 번째 단계로, 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약 일보 전에 이르게 되는 단계이다. 이를테면 제1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 도형의 성질을 요약하는 활동은 이 단계에 해당한다.

특수화의 사고 방법

특수화의 사고 방법은 특수화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 특수화는 어떤 사상의 집합에 관한 고찰에서 그 집합에 포함되는 더 작은 집합이나 한 사상에 관해 생각하는 것이다. 특수화는 문제를 명확히 파악할 필요에서, 또는 자신의 능력에 맞는 그리고 스스로 관련이 있는 문제로 손질하려 할 때 행해진다.

포트폴리오 평가 /Potfolio Assessment

본래 포트폴리오라는 개념은 미술, 사진, 건축 등과 같은 전문분야에서, 여러 개의 작품 중에 가장 잘 된 작품을 고를 수 있다는 것에서 나온 것이다. 수학 교수 · 학습 분야에서, 포트폴리오는 흔히 학생들이 교수 · 학습에서 수행한 여러 가지 것을 모아 놓은 것을 의미한다. 이를테면 초등학교의 경우 아동들이 수업 시간에 만든 여러 가지 모양, 또는 숙제로서 만들어 온 것, 아동들이 치른 시험지 등이 여기에 포함될 수 있다. 중 · 고등학교의 경우 학생들이 치른 시험지가 대부분일 수도 있다. 포트폴리오 평가란, 간단히 말하자면, 포트폴리오에 모아놓은 여러 가지 자료를 토대로 학생들의 장단점을 실질적으로 파악, 즉 평가하는 것이라 할 수 있다. 그런 만큼 이 평가는 등급을 매기기 위한 것이 아니라, 학생들의 수학 학습을 도와주기 위한 것이며 교사들의 수학 지도에 도움을 주기 위한 것임을 알 수 있다.

플라톤주의/platonism

플라톤주의는 플라톤의 이데아론에 바탕을 둔 것으로 수학의 대상을 인간의 활동과는 전혀 무관하게 존재하는 영구 불멸의 완전한 실재 즉, 이데아로 보는 수리철학이다. 플라톤주의에 따르면 수학을 한다는 것은 이미 존재하는 수학적 대상의 성질과 관계를 발견하는 과정이다. 플라톤주의에서 증명은 수학 지식의 절대적 진리성을 정당화하기 위한 유일한 방법으로서, 수학명제가 참임을 보증하는 이성에 근거한 핵심적인 방법으로 기능하였다. 그러나 플라톤주의는 비유클리드 기하학의 출현으로 그 빛을 잃었다.

형식도야 · 실질도야

도야는 독일어의 '모양을 만든다' 는 의미와 같이 넓은 의미로는 교육과 거의 같은 뜻으로 사용되고 있지만, 좁은 의미로는 문화의 전달, 지적 · 기능적 능력을 신장시키는 작용을 가리킨다. 도야는 또 인간의 심적 제 능력의 연마에 관한 측면과, 객관적 가치의 습득에 관한 측면으로 나누어 생각해볼 수 있다. 전자를 형식도야, 후자를 실질도야라고 부른다. 형식도야는, 지, 정, 의 등의 심적 작용에서 나타나는 제 능력을 인간의 소여(所與)로서, 이러한 능력의 연마를 교육의 목적으로 삼는 입장으로, 교재의 습득 차제보다는 그것을 획득하는 추리력, 판단력, 기억력, 상상력 등의 훈련·도야에 중점을 두는 교육관이다. 반면, 실질도야는 교재 내용을 교수 · 학습하는 것에 의하여, 아동의 정신을 가꾸고자 하는 교육관이다.
옛날부터 수학은 형식도야의 학문으로 여겨져 왔다. 이러한 입장에 최초로 학문적 근거를 제공한 것이 18세기에 시작된 능력심리학이다. 능력심리학은 '특정한 교재 또는 상황에서 사고력이나 관찰력을 훈련하면 다른 교재의 학습이나 사물의 관찰에도 그 효과가 전이한다' 고 주장한다. 따라서 정확한 추리력이나 올바른 판단력은 수학을 학습하게 하는 것에 의하여 발달하게 된다. 형식도야를 전반적으로 부정한 사람은 헤르바르트이며 그는 교과 내용의 교수를 중시하는 실질도야의 입장을 취했다.

형식주의/formalism

형식주의는 수학을 아무런 의미도 부여되지 않는 기호의 나열에 불과한 형식적 체계로 규정하는 수리철학이다. 형식주의자들은 수학을 의미가 배제된 기호의 형식적 계산으로 대치함으로써 의미를 포기하는 대가로 무모순성을 얻고자, 엄밀한 연역적 증명을 강조하였다. 그러나 형식주의자들의 노력은 임의의 수학 체계의 무모순성은 입증될 수 없으며, 어떠한 무모순인 공리 체계도 필연적으로 불완전하다는 괴델(Kurt Güdel)의 불완전성 정리에 의해 좌절되었다.

형식적 고착/formal abidance

형식적 고착은 메타인지적 이동과는 반대로 지식의 전달에서 개인화와 문맥화의 중요성을 과소평가하여 그것을 간과하고, 논리적 · 형식적으로 표현된 수학적 지식을 곧바로 제시하는 현상을 의미한다. 이를테면 일반화된 공식을 제시하고 그 공식의 의미보다는 학생들이 공식을 익숙하게 사용할 수 있도록 연습시키는 과정에 주목하는 현상이 이에 해당한다. 함수를 집합 사이의 대응으로 곧바로 제시하는 것도 그 예가 된다.

활동적 표현 /enactive representation

활동적 표현은 브루너가 사용한 용어로서 어떤 대상을 적절한 일련의 행동을 통하여 표현하는 것을 의미한다. 이를테면 어린 아동은 저울대의 원리에 근거하여 명백하게 행동할 수 있으며 시소를 조정할 수 있다. 아동은 자기 쪽을 더 내려가게 하려면 받침대로부터 더 멀리 물러나야 한다는 것을 안다. 즉, 아동은 저울대의 원리를 행동적으로 표현하고 있는 것이다.

2. 2014학년도 대비 임용고사 문제 풀이

[2교시 전공A 기입형 1번] 2점

프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수 · 학습 이론에 따르면, 아래의 2가지 사항은 현상으로부터 본질에 이르는 접근이 아니라 학습자에게 본질을 부과하는 접근이다. 프로이덴탈은 이와 같은 교수학적 접근 방식을 무엇이라 하였는지 쓰시오.

- 기성수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구성하는 것
- 수학화 과정에 대한 경험은 생략하고 기성 지식을 초등화해 가르치는 것

[모범답안] 반교수학적 전도

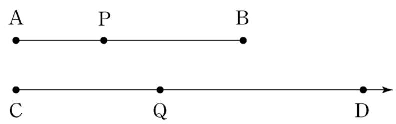
[참고자료]

프로이덴탈에 의하면 수학은 현상의 정리수단의 본질이다. 따라서 현상을 조직화하는 활동인 수학화 과정을 재발명해야 한다.

- 프로이덴탈은 전통적인 수학교육에서와 같은 기성의 '닫힌' 지식 체계에 따른 수학의 지도, 구체화를 통한 개념형성을 위한 지도, 나아가 '새 수학'의 EIS 방법론을 '반교수학적 전도'라고 규정한다.
- '새 수학'에서와 같이 전문학자가 생각하는 추상적인 개념을 구체화를 통하여 지도하여 곧바로 개념형성을 시도하거나, 기성수학의 위계구조에 따라 일반적인 빈약한 구조에서 특수한 풍부한 구조로 나아가는 것은 '반교수학적 전도'이다.
- 〈Euclid 원론〉은 자연스러운 기하학적 사고의 발생 순서를 뒤집어 정의, 공리, 공준, 정리 형식의 공리적 전개 양식으로 체계화한 교과서이다. 이러한 기하의 연역적 전개는 기하학적 지식을 탈개인화된 공적인 학문적 지식으로 변환시킨 것인바, 프로이덴탈이 지적한 '반교수학적인 전도'가 발생한다.
- 프로이덴탈은 기성수학의 형식적 전개 순서에 따라서 교재를 구성하여 학습자에게 부여하는 연역적 전개 양식을 '반교수학적 전개'라고 부르고 있다.

[2교시 전공A 기입형 2번] 2점

다음은 어떤 수학적 개념의 원형과 그 개념에 들어있는 아이디어를 다룬 교사 교육용 자료의 일부이다.

> • 이 개념의 원형은 다음과 같다.
>
> [그림]과 같이 선분 AB와 반직선 CD에 대하여, 선분 AB위의 점 P와 반직선 CD 위의 점 Q 가 각각 A와 C로부터 같은 속도로 동시에 출발하여 각각의 선을 따라 움직인다고 하자. 이때 점 P의 속력은 PB의 거리에 비례하고, 점 Q의 속력은 일정하다고 하자.
>
> 
>
>
> [그림]
>
> 이때, 거리 CQ를 거리 PB의 (　　) (이)라고 하였다.
>
> • 다음은 이 개념에 들어있는 아이디어를 활용한 계산의 한 예이다.
>
> | n | ⋯ | 1005 | ⋯ | 1009 | ⋯ | 2014 | ⋯ |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|
> | $(1.0001)^n$ | ⋯ | 1.1057181 | ⋯ | 1.1061604 | ⋯ | 1.2231016 | ⋯ |
>
> 이 표를 활용하면 $1.1057181 \times 1.1061604$의 근삿값을 쉽게 얻을 수 있다.
>
> ⋯ (하략) ⋯

( ) 안에 들어갈 용어가 무엇인지 쓰시오. 그리고 수학을 완성된 생산품으로 제공하는 것이 아니라 수학이 발생해 온 과정을 경험하게 하기 위해 수학적 개념의 원형이나 그 개념에 들어있는 아이디어를 활용하는 교수 · 학습 원리가 무엇인지 쓰시오. [2점]

[모범답안] 로그(1점), 역사발생적 원리(1점)

[참고자료] 역사발생적 원리

• 역사발생적 원리란 수학의 역사적 발달 과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재구성하여 학생들이 수학화 과정을 재발명할 수 있도록 하려는 교재 구성 원리이다.

(예) 1741년 Clairaut의 〈기하학 원론〉 기하의 역사적 발생의 동기와 과정을 교재 구성에 이용

- 역사발생적 원리의 인식론적 바탕은 개체발생이 계통발생을 단축된 형태로 반복한다는 생물학적 원리 곧, 다원주의자인 Haekel이 제기한 '재현의 원리'이다. 곧 개인의 수학적 사고의 발달은 수학의 역사 자체를 따르며 따라서 개인의 지식교육은 인류의 지식 발생과 동일한 흐름을 따라야 한다.
- 역사발생적 원리에 의하면 수학은 완성된 생산품(논리적인 지식 체계)이 아니라 역사적 발생과정 곧, '수학화' 과정을 되밟아가면서 바르게 이해되고 적용된 실행수학이다.
- 수학교사는 인류의 대역적인 학습과정 곧, 수학의 역사를 분석해야 한다.

[2교시 전공A 기입형 3번] 2점

다음은 중학교 2학년 기하영역의 평행사변형의 성질을 다루는 수업의 일부이다.

교사: 측정 활동을 통해 알아낸 평행사변형의 성질 '두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.' 가 왜 성립하는지 설명해 보도록 하지요.

학생: 어려워요.

(이 문제를 해결한 학생이 없는 듯 보인다.)

교사: 시간이 없으니 어쩔 수 없네. 대각선을 그어 평행사변형을 두 삼각형으로 나누면, 그 두 삼각형이 합동이 돼요. 그러면 그 성질이 성립한다는 것을 바로 보일 수 있을 것입니다.

학생: 합동이 되니까 성립하네요.

교사: 그러면 다음 내용을 공부합시다.

밑줄 친 부분에서 학생 스스로 학습할 환경을 교사가 제거하는 현상이 발생하고 있다. 여기서 이 교수학적 현상은 '교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다'는 압박에 의해 발생한다고 할 수 있다. 브루소(G. Brousseau)의 수학교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 이러한 현상을 설명할 수 있는 개념과 이러한 압박을 설명할 수 있는 개념을 각각 쓰시오.

[모범답안] 토파즈 효과(1점), 교수학적 계약(1점)

[참고자료] 극단적인 수학교수현상

교과서 저자나 교사에 의한 수학적 지식의 교수학적 변환 가운데에는 의사개인화, 의사문맥화 혹은 탈개인화, 탈문맥화를 과도하게 강조했거나 경시하는 데에서 비롯되는 여러 가지 극단적인 현상을 찾아볼 수 있다.

(1) 토파즈 효과(Topaze effect)

교사가 가르쳐야 한다는 '교수학적 계약'의 압박 때문에 풀이에 대한 명백한 힌트를 주거나 유도질문을 하거나 문제와 함께 해답을 제시함으로써 학생들의 지식 구성을 방해하거나 그러한 학습환경을 일소하게 되는 것을 말한다. 이는 학습-지도에서 흔히 일어나는 지식의 개인화와 문맥화 및 탈개인화와 탈문맥화의 과정의 중요성을 간과한 방편적 조치의 예이다.

(2) 주르뎅 효과(Jourdian effect)

학생과 가르치고자 하는 지식에 대하여 토론하기도 어렵고 그렇다고 가르칠 수 없다는 것을 인정하기도 어려운 상황에서, 학생의 행동이나 대답이 사실은 평범한 단서나 의미로 야기된 것임에도 불구하고 교사는 학생의 그러한 반응을 어떤 수학적 지식의 표현으로 받아들이려고 하는 것, 곧 어떤 수학적 지식이 형성되었음을 보여주고 있다고 인정해 버리는 것을 말한다. 이는 학생의 개인화와 문맥화 및 탈개인화와 탈문맥화 과정을 과대평가한 결과이다.

(3) 메타인지적 이동(meta-cognitive shift)

진정한 수학적 지식을 가르치기 어려운 경우 교수학적 고안물이나 발견적 수단을 사용하게 되는데, 그 결과 교사의 교수학적인 노력의 초점이 수학적 지식 그 자체로부터 그가 고안한 교수학적 수단으로 이동되는 것을 말한다. 이는 학생의 개인화, 문맥화 과정을 지나치게 강조한 결과이다.

(4) 형식적 고착(formal abidance)

메타인지적 이동과 반대로 지식의 전달에서 개인화, 문맥화의 중요성을 과소평가하여 이를 간과하고 논리적 · 형식적으로 표현된 수학적 지식을 곧바로 제시하는 것을 말한다.

[2교시 전공A 기입형 4번] 2점

다음은 중학교 1학년 기하영역에서 모든 다각형의 외각의 크기의 합이 $360°$ 임을 알아내는 수업 상황이다.

(학생들은 삼각형의 외각의 크기의 합이 $360°$ 임은 알고 있지만, 아직은 n각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 없는 상태이다.)

… (상략) …

교사: (그림을 제시하며) 다각형의 각 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?

학생: $180°$ 입니다.

교사: 그러면 n각형의 모든 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?

학생: $180° \times n$입니다.

교사: 외각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?

학생: 잘 모르겠어요.

교사: 내각과 외각의 관계를 생각해 보면 외각의 크기의 합을 구할 수 있지 않을까요?

(다각형에 외각과 내각을 표시하면서 외각과 내각의 관계를 떠올리게 한다)

학생: 아! 알겠어요. 내각과 외각의 크기의 합에서 내각의 크기의 합을 빼면 될 것 같아요.

교사: 내각의 크기의 합은 알고 있지요?

학생: 네. $(n-2)\times 180°$ 입니다.

교사: 그러면 외각의 크기의 합을 구하는 식을 나타낼 수 있을까요?

학생: (외각의 크기의 합)$= 180° \times n -$(내각의 크기의 합)

$= 180° \times n - 180° \times (n-2) = 360°$ 입니다.

교사: 잘했어요. 따라서 다각형에서 외각의 크기의 합은 언제나 $360°$ 로 일정함을 알 수 있어요.

… (하략) …

위 상황에서 교사는 학생의 근접발달영역에서 교사의 사고 과정을 모방할 수 있는 시범이나 실마리를 제공하고 있다. 이러한 교수·학습 상황에서 학생들이 과제를 수행해 나가는데 있어서 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파는 무엇이라 하는지 쓰시오.

[모범답안] 비계설정

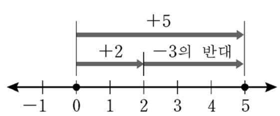
[참고자료]

Scaffolding(비계) 설정 이론

- Scaffolding 설정은 비고츠키 이론을 적용하여 효과적인 개별화 교수의 주요 요소를 평가하려 했던 우드(Wood), 미들레튼(Middleton), 브루너와 로즈(Bruner&Ross) 등에 의해 소개된 용어이다.
- Scaffolding의 사전적 의미는 건물을 지을 때에 높은 곳에서 딛고 일할 수 있도록 긴 나무나 널빤지를 써서 걸쳐 놓은 시설이다.
- 교수 · 학습에서의 Scaffolding이란 학생의 근접발달영역(ZPD) 내에서의 효과적인 교수 · 학습을 위해 교사가 학생과 상호작용 중 적절한 도움을 주기 위해 은유적으로 사용한 용어이다.
- Scaffolding 설정은 교사나 부모, 좀 더 유능한 동료가 학생에게 적절한 안내나 도움을 제공함으로써 학습에 도움을 주어 인지발달을 돕는 발판 역할을 하는 체계를 말한다.
- Scaffolding 설정과정에서 중요한 것은 학생의 ZPD 내에 있는 과제를 제시하여 학생 자신이 학습에 더 많은 책임을 갖도록 자극하면서 점차 도움을 줄여 가는 자기조절기능을 증진시키는 것이다.

[2교시 전공A 서술형 1번] 3점

다음은 정수의 사칙연산을 지도하기 위한 셈돌 모델, 수직선 모델, 귀납적 외삽법에 대한 예시이다.

셈돌 모델	$2+(-3)=-1$	●●+○○○=○
수직선 모델	$2-(-3)=5$	
귀납적 외삽법	$2\times(-3)=-6$	$2\times2=4$ $2\times1=2$ $2\times0=0$ $2\times(-1)=-2$ $2\times(-2)=-4$ $2\times(-3)=-6$

정수의 사칙연산을 지도할 때, 셈돌 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점을 각각 쓰시오. 그리고 정수의 사칙연산을 지도할 때, 수직선 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 귀납적 외삽법의 장점을 각각 쓰시오.

[채점기준표]

셈돌 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점 -- 1.5점

수직선 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 귀납적 외삽법의 장점 --- 1.5점

[모범답안]

셈돌 모델을 이용하여 음수의 사칙 연산 중 '양수×음수=음수', '음수×음수=양수' 등을 설명할 때 '검은 돌×흰 돌=흰 돌', '흰 돌×흰 돌=검은 돌'이 된다고 설명하는데, 이러한 수업은 '음수×음수=양수'가 됨을 그냥 약속하듯이 선언해 버리는 수업과 다르지 않으므로 학생들은 음수의 곱셈에서 보이는 부호의 의미를 바르게 이해하지 못한 체 단지 외우게 된다. 이러한 수업이 셈돌 모델의 약점이다. 그러나 수직선 모델은 수의 관념에 '방향'이라는 요소를 포함시켜서 '음수×음수=양수'가 되는 이유로 '음수의 곱은 방향을 바꾸는 것이다'라고 설명하여 부호의 의미를 직관적으로 이해할 수 있도록 돕게 되므로 셈돌 모델의 약점을 보완하게 된다.

수직선 모델의 약점은 음의 부호가 '왼쪽을 향한다', 곱셈과 나눗셈에서는 '반대 방향으로 향한다' 그리고 '뺄셈'의 의미 모두를 포함하는 다중적 의미를 갖고 있어 학생들이 혼란을 겪을 수 있다. 이때, 교사가 귀납적 외삽법을 이용해 연산의 구조가 유지되도록 수 체계를 귀납적으로 확장하면 음의 부호는 '0보다 작은 수'라는 하나의 의미를 가지게 되어 학생들이 음의 부호에 대한 혼란을 보완할 수 있게 된다.

[답안 작성 시 유의점]

본 문제는 답안 형식이 문제에 제시되어 있다. 즉, '셈돌 모델의 약점과 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점을 각각 쓰시오'에 맞추어 "셈돌 모델의 약점은 … 이고 이를 보완할 수 있는 수직선 모델의 장점은 … 이다" 와 같이 정리하면 된다.

이처럼 서술형 문제는 출제자가 묻는 것을 올바로 알고 그에 맞추어 적는 연습이 필요하다.

[참고자료]

- 수직선 모델에서 음의 부호는 다중적인 의미를 갖는다(음수를 표현하기 위하여 '왼쪽을 향한다', 곱셈이나 나눗셈을 할 때 '반대 방향' 그리고 덧셈의 반대인 '뺄셈'). (;→()괄호로 변경. 확인 요망.)
- 셈돌 모델로 곱셈과 나눗셈을 설명할 때 '(검은 돌)×(검은 돌)' 또는 '(흰 돌)×(흰 돌)'의 경우에는 (검은 돌)이 되고, '(검은 돌)×(흰 돌)'의 경우에는 (흰 돌)이 된다는 규칙을 특별한 이유 없이 약속해야만 하는데, 이는 '(음수)×(음수)=(양수)'가 된다는 것을 그냥 받아들이게 하는 것과 다르지 않다.

[3교시 전공B 서술형 1번] 3점

다음은 폴리아(G. Polya)의 수학적 문제해결 교육론에 근거해 어떤 문제를 해결한 과정의 일부이다.

〈이해 단계〉
문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 파악하면서 문제를 분석한다. 그하려는 것을 x로 놓는다.

〈계획 단계〉
문제에서 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악하고, 그러한 관계를 나타내는 방정식을 세운다. 이때 방정식이 참이라고 하자.
$\sqrt{2x-6}=3-x$

〈실행 단계〉
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-8x+15=0$이고, $(x-3)(x-5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다. 그런데 이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.

〈반성 단계〉
$x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. 따라서 $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다. $x=3$이 문제의 상황에 부합하는지의 여부를 점검한다.

위 문제해결과정에서는 수학적 발견술인 분석법이 사용되고 있다. 〈계획 단계〉와 〈실행 단계〉에서 분석법이 어떻게 사용되고 있는지 각각 설명하시오.

[채점기준안]

〈계획 단계〉에서 분석법의 사용 설명 --- 1.5점

〈실행 단계〉에서 분석법의 사용 설명 --- 1.5점

[모범답안]

〈계획 단계〉에서 '방정식 $\sqrt{2x-6}=3-x$이 참이라고 하자'에서 분석법이 사용되고 있다. 즉, 방정식 풀이에서 분석법은 '이 풀이를 만족하는 x값이 구해졌다'고 가정하여 이 방정식이 참인 등식이 됨을 가정하게 되는데, 〈계획 단계〉에서는 이러한 분석법이 사용되고 있다.

〈실행 단계〉에서 '필요조건 $x=3$ 또는 $x=5$'를 유도하는 분석법이 사용되고 있다. 즉, 〈계획 단계〉에서 x값이 구해졌다고 가정하면서 인정된 등식으로부터 필요조건인 $x^2-8x+15=0$를 그리고 $(x-3)(x-5)=0$로부터 필요조건인 $x=3$ 또는 $x=5$를 유도하는 분석법이 사용되고 있다.

[답안 작성 시 유의점]

분석법은 '참'이라 가정하는 부분이 가장 중요한 Point이다. 따라서 계획 설정 단계에서 '방정식이 참이라고 하자'와 실행 단계에서 '이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다'라는 부분이 중요하다. 단, 분석법이 어떻게 되었는지 설명해야 하므로 중요한 Point 부분을 직접 언급하는 것으로 답을 마무리하기보다 이 부분들이 왜 분석법인지를 분석법의 정의와 그 활용으로 타당성 있게 설명해야 한다.

[참고자료]

- 분석법은 수학적 발견술[1] 가운데 가장 강력하면서 가장 오래 전부터 사용되어 온 방법이다.
- 분석법을 처음으로 체계적으로 정리한 사람은 기원전 3세기경의 그리스 수학자

1) 발견술이란 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 실제적인 문제해결에서 전형적으로 유용한 발견과 발명의 방법과 규칙, 실제적인 발견과 발명의 전략과 전술을 의미한다. 단, 발견술은 주어진 문제의 해답을 발견하는데 도움을 줄 뿐 그에 따라 사고한다고 하여 문제의 해결이 보증되는 것은 아니며, 해답이 발견되었다고 하더라도 그것이 옳다는 것을 보증해 주지 않는다.

Pappus이다: 우선 구하고자 하는 것을 이미 구한 것처럼 가정하고 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하고 다시 그로부터 유도될 수 있는 명제를 도출하기를 계속하여 이미 알고 있는 명제에 도달하는 방법이다.

- 데카르트의 분석법은 17세기 초반에 대수적 방법으로 기하학적 연구를 하는 곧, 방정식을 이용하여 도형의 성질을 연구하는 해석기하학을 탄생시켰다: 방정식을 세워서 문제를 푸는 경우 문제가 풀린 것으로 가정하고 미지인 것과 자료 사이에 조건을 만족하는 등식 곧 방정식을 세운 다음 이를 변형하여 문제를 해결하는 경우이다.

참고문헌

수학교육론

· 강문봉(1997),『의식화가 수반된 문제해결 수업 모형』 (대한수학교육학회 논문집 제 7권 제 1호, 133-143)
· 강옥기(2001), 『수학과 학습지도와 평가론』 경문사
· 강옥기 외(2011), 『수학교육학 정론』 경문사
· 강원대학교 1종 도서 편찬 위원회(2001), 이산수학 교사용 지도서 (교육인적자원부)
· 교육부(1998), 교육비전 2002: 새 학교문화 창조 (교육부)
· 교육부(1997), 제7차 수학과 교육과정 1차 심의 자료
· 교육부(1992), 수학과 교육과정 (교육부 고시 제 1992 - 11호)
· 교육부(1992), 수학과 교육과정 (교육부 고시 제 1992 - 19호)
· 교육부(1997), 수학과 교육과정 (교육부 『고시 제 1997 - 15호)
· 교육부(1997), 수학과 교육과정 (교육부 고시 제 1995 - 15호)
· 교육부(1999), 중학교 교과과정 해설서(Ⅱ) (대한교과서주식회사)
· 교육부(2006). 개정 수학과 교육과정 (교육부 고시 제 2007 - 79호)
· 교육부(2007). 개정 중학교 교육과정 해설서 (교육과학기술부)
· 교육부(2008). 개정 고등학교 교육과정 해설서 (교육과학기술부)
· 교육부(2009), 개정 교육과정 총론 (교육과학기술부)
· 교육부(2011), 개정 수학과 교육과정 (교육과학기술부)
· 교육부(2015), 개정 수학과 교육과정 (교육과학기술부)
· 권성룡 외(2006), 『테크놀로지와 함께 하는 수학교육』 경문사
· 김남희(1991), 『변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구』 서울대석사학위논문
· 김남희(1997), 『변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색』 서울대박사학위논문
· 김남희 외(2006), 『예비교사와 현직교사를 위한 수학교육과정과 교재연구』 경문사
· 김남희 외(2008), 『예비교사와 현직교사를 위한 수학교육에서의 컴퓨터활용』 경문사
· 김남희(2008), 『예비교사와 현직교사를 위한 학교수학과 교구』 경문사
· 김남희 외(2012), 『수학교육과정과 교재연구』 경문사
· 김용국·김용운(1986), 『수학사 대전』 우성문화사
· 김용운(1986), 『수학사학과 수학교육』 J. Historia Mathematica Vol.3. No.1
· 김은영(1991), 『수의 이야기, 퀴즈, 일화, 교훈을 통한 학습 흥미유발이 학력 신장에 미치는 영향』
· 김응태, 박한식, 우정호(1985), 『증보 수학교육학개론』 서울대학교 출판부
· 김판수 외(2000), 『구성주의와 교과교육』 학지사
· 나귀수(1998), 『증명의 본질과 지도 실제의 분석』 서울대박사학위논문
· 나귀수(1998), 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색 (대한수학교육학회)
· 남승인·류성림(2002), 『문제 해결 학습의 원리와 방법』 형설출판사
· 대한수학교육학회 연보(2014), 『대한수학교육학회』 경문사
· 대한수학교육학회 연보(2015), 『대한수학교육학회』 경문사
· 류희찬(1998), 탐구형 소프트웨어를 활용한 "열린" 수학교육, 열린교육의 이론과 실제
· 류희찬 외 옮김(2003), 『고등수학적 사고』 경문사

· 민세영(1997), 역사 발생적 원리에 따른 로그단원의 지도에 관한 연구 (대한 수학교육학회 논문집 Vol.Ⅶ, No.2 381-396)
· 박경미(2009), Lakatos의 증명과 반박 방법에 따른 기하 교수·학습 상황 분석 연구 (학교수학 11(1), 55-70)
· 박경은(2011), 『오수벨의 유의미 수용학습에 대한 학습법』 성균관대학박사학위논문
· 박경은(2013), 『스토리텔링으로 수학 가르치기』, 경문사
· 박경임(1995), 수학교육에 있어서의 구성주의 (대한수학교육학회)
· 박선화(1998), 『수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구』 서울대박사학위논문
· 박성택(1995), 인지 발달에 근거를 둔 수학 학습 모형 탐색 (수학교육』 제 34권 제1호)
· 박세희(1985), 『수학의 세계』 서울대학교 출판부
· 박영희(2000), 『Freudenthal의 재발명 이론의 적용에 관한 연구』 성균관대석사학위논문
· 박창균(1998), 플라톤주의와 직관주의 (대한수학회 뉴스레터 57호)
· 박창균(1997), 『Cantor의 무한관』 J. Historia Mathematica Vol.10. No.1
· 박한식(1992), 『한국 수학 교육사』 대한교과서주식회사
· 박혜향(2002), 『박혜향 수학교육론』 형설출판사
· 박혜향(2005), 『박혜향과 함께하는 수학교육론 이야기』 열린출판사
· 박혜향(2009), 『박혜향과 함께하는 수학교육론 이야기』 열린출판사
· 방승진 역, 부르바키여 안녕 (대한수학회 뉴스레터 45호, Ian Stewart)
· 배종수(1999), 『초등수학교육 내용지도법』 경문사
· 백순근, 소경희(1998), 국가 교육과정에 근거한 평가 기준 및 도구 개발 연구(총론) (한국교육과정평가원)
· 백순근(2000), 『수행 평가의 원리』 교육과학사
· 이만근 외(2007), 『이만근과 오은영이 들려주는 흥미 있는 수학이야기』 수학사랑
· 서동엽(1998), 『증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색』 서울대박사학위논문
· 서울특별시교육연구원(2001), 중등 수학과 수업 · 평가 방법 개선 직무연수 (제1기)
· 신영미(1993), 『수학사와 수학교육』 서울대석사학위논문
· 신동선·류희찬(1998), 『수학교육과 컴퓨터』 경문사
· 신현성(1992), 『수학 교육론』 경문사
· 신현성(2002), 『수학교재 연구 및 지도』 학지사
· 오솔(2014), GeoGebra를 활용한 공간벡터 교수학습 자료 개발에 관한 연구 (경기대학교 교육대학원 수학교육전공)
· 우정호(2000), 『수학학습-지도 원리와 방법』 서울대학교 출판부
· 우정호(1998), 『학교수학의 교육적 기초』 서울대학교 출판부
· 우정호 외(2008), 『프로이덴탈의 수학교육론』 경문사
· 유연주외 1명(1997), 급진적 · 사회적 구성주의와 포스트모더니즘 (대한수학교육학회)
· 이경화(1996), 『확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구』 서울대박사학위논문
· 이경화(1992), 『학교수학의 교육학적 변환에 관한 연구』 서울대석사학위논문

· 이경화(1996), 『확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구』 서울대박사학위논문
· 이대현(2012). 수학적 창의성의 요소와 창의성 개발을 위한 수업 모델 탐색, (한국초등수학교육학회지 16(1), 39-61)
· 이수정(2000), 『통계지도에 관한 고찰』 서울대석사학위논문
· 이용률, 성현경, 정동권, 박영배 역(1995), 『문제해결과정과 발문분석』 경문사
· 이재돈(1999), 『수학교사와 수학교육』 대구대학교 출판부
· 이정림(1997), 대학 수학교육의 현황과 발전방향 (수학교육논총, 제15집)
· 이정희(1991), 『확률 및 통계 영역의 연계성에 관한 연구』 이화여대석사학위논문
· 이종영(1998), 컴퓨터 환경에서 교수학적 변환의 가능성 (대한수학교육학회 수학교육학연구 8(2), 475-484)
· 이종영(1998), 『컴퓨터 기반 수학 학습-지도 환경에 관한 교수학적 분석』 서울대석사학위 논문
· 이종영(2001), 컴퓨터 환경에서 극단적인 교수 현상의 가능성과 수학 교수·학습 양식에 관한 고찰 (대한수학교육학회 수학교육학연구 11(1), 51-66)
· 임재훈(1999), 『플라톤주의, 구성주의, 구성주의 수학교육철학』 Math-Festival
· 임재훈·홍진곤(1998), 조작적 구성주의와 사회적 구성주의에서 구성의 의미와 과정 (대한수학교육학회)
· 임재훈(1998), 지식에 대한 구조주의적 관점과 수학에서의 '지식의 구조' (대한수학교육학회)
· 임재훈(1998), 『플라톤의 수학교육 철학 연구』 서울대박사학위논문
· 장경윤(1996), 『컴퓨터와 수학. 수학교육』 대한수학교육학회논문집 6(1)
· 장태환 외 3인(1984), 『고등학교 수학 1 교사용 지도서』 삼화출판사
· 전혜영(1996), 『중학교 수학의 학력 신장에 관한 고찰』 명지대석사학위논문
· 정영옥(1997), 『Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구』 서울대박사학위논문
· 정영옥(1997), 수리철학의 변화와 수학교육에의 시사점 (대한수학교육학회)
· 주영희(1997), 『수학교육에 있어 수학사 활용에 대한 교사들의 인식』 강원대석사학위논문
· 조승제·정동명(1998), 『실해석학개론』 경문사
· 최연희(1989), 『Bruner의 발견적 수업과 Ausubel의 설명적 수업의 비교연구』 상명여대석사학위논문
· 한국교육과정평가원(1997), 수학과 수준별 교육과정 적용 방안과 교수 학습 자료 개발 연구 (한국교육과정평가원)
· 한국교육과정평가원(1999), 『수행 평가의 이론과 실제』 (교육진흥연구회)
· 한혜숙(2013), STEAM 교수-학습프로그램의 개발 동향 분석 및 수학교과 중심의 STEAM교수-학습프로그램의 개발 (한국수학논문집 27(4), 523-545)
· 허 민, 양영오 역, 『수학적 경험(하)』 경문사
· 황우형, 지영조(2008), 『고등학생의 무한에 대한 개념정의와 개념이미지』 (한국수학교육학회 논문집 11(2), 249-283)
· 황혜정(1997), 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 (서울특별시 교육청)
· 황혜정 외(2001), 『수학교육학신론』 문음사

· 황혜정 외(2007), 『개정판 수학교육학신론』 문음사
· Albert P. Shulte·James R. Smart(1981), 『Teaching Statistics And Probability: 1981 Yearbook』 NCTN
· Alder. C. F.(1966), Modern Grometry, McGraw-Hill
· Apostol, P. M.(1975), Mathematical Analysis, Addison-Wesley
· Balacheff. N.(1991), Artificial intelligence and real teaching, In C. Keitel & K. Rughven (Eds.), Learnign from computers; mathematics education and technology(pp. 131-158), New York: Springer-Verlag
· Cajori(정지호역)(1977), 『수학의 역사』 창원사
· Carl B. Boyer and Uta C. Merzbach. 양영오, 조윤동 역(2000), 『수학의 역사』 경문사
· Cobb. P. & Steffe. L.P.(1983), The constructivist researcher as teacher and model builde. Journal for Research in Mathematics Education
· Cockcroft. W.M.(1982), Mathematics counts, London: HMSO
· Cohen. L. & Ehrlich. G(1963), The Structure of Real Number System. Van Nostrand.
· Devlin(허민 역, 1995), 『수학: 새로운 황금시대』, 경문사
· Devlin(허민, 오혜영 역, 1996), 『수학: 양식의 과학(1996)』 경문사
· English. L. & Halford. G.(1995), Mathematics Education: Models and · Process. Mahwah. NJ: Laurence Erlbaum Associates. Pub.
· Ernest. P.(1994), Social constructivism and the psychology of mathematics education. In P. Ernst(Ed.), Constructing mathematical knowledge: epistemology and neductio (pp. 62-72), London: The Falmer Press
· Ernest, P.(1994), The Philosophy of Mathematics Education. New York: Falmer Press.
· Euclid·이우현 역(1997), 『기하학 원론』 교우사
· Freudenthal, H.(1991), Revisition mathematics education, Kluwer Academic Publisher
· George W. Bright, Karl Hoeffner(〔n.d.〕), (박경미 역, 1995), 『측정, 확률, 통계, 그리고 그래프 그리는 것. 수학교육 연구 주제1』 (대한수학교육학회)
· George. Polya, 우정호 역(1986), 『어떻게 문제를 풀 것인가?』 천재교육
· Greenberg, M. J, 지음, 이우영 옮김(1988), 『Euclid 기하학과 비Euclid 기하학』 경문사
· Howard Eve 지음, 이우영·신항균 옮김(1996), 『수학사』 경문사
· Howard Eves, 허민 외 역(1996), 『수학의 위대한 순간들』 경문사
· Howard Eves, 허민, 오혜영 역(1999), 『수학의 기초와 기본 개념』 경문사
· Imre Lakatos, 우정호 역(1999), 『수학적 발견의 논리』 아르케
· J. Michael. Shaughnessy(1993), Probability and Statistics. Mathematics Teacher, vol 86. No 3. March 1993

· Keith Devlin, 허민 역(1999), 『수학 새로운 황금시대』 경문사
· Lang, S.(1984), Algebra, Addison-Wesley
· Lauren B, Rensnick 외, 구광조 외(1995), 『수학 학습 심리학』 교우사
· Lin, Y. F. & Lin, S. Y.(1974), Set Theory, An intuitive Approach, Houghton Mifflin
· M. J. Greenberg. 이우영 옮김(1990), 『유클리드 기하학과 비유클리드 기하학』 경문사
· M. Kenney(1991), Discrete Mathematics across the Curriculum K-12, NCTM
· NCTM(1989), (구광조, 오병승, 류희찬 공역, 1994), 『수학 교육 과정과 평가의 새로운 방향』 경문사
· NCTM(1991), Professional Standards for Teaching Mathematics, NCTM
· Pinter, C. C.(1971), Set Theory, Addison-Wesley
· R. Skemp, 황우형 역(1997), 『수학 학습 심리학』 민음사
· Ramesh Kapadia, Manfred Borovcnik(1991), 『Chance Encounter: Probability in Education』, Kluwer Academic Publisher
· Richard Courant, 박평우 외 역(2002), 『수학이란 무엇인가』 경문사
· Schoenfeld, A. H.(1985). Mathematical Problem Solving, Academic Press, Inc.
· Silverman, H.(1975), Complex Variables, Houghton Mifflin
· Steven G. Krantz, 좌준수, 임중삼 역(2000), 『문제 해결의 수학적 전략』 경문사
· Steven R. Lay(1990), Analysis with an Introduction to Proof 2nd Edition, Prentice hall
· T. Cooney(1990), Teaching and Learning Mathematics in 1990's, NCTM
· Theoni Pappas, 고석구 외(1999), 『수학의 스캔들』 경문사
· Tord Hall, 이우영, 신항균, 이홍렬 역(2000), 『수학의 황제 가우스』 경문사
· Usiskin, Z.(1988), Conceptions of school algebra and uses of variable
· S · ternberg, R. J., Wagner, R. K., Williams, W. M., & Horvath, J. A., (1995)
· esting common sence, American Psychologist, 50(11), 912-927
· Whitehaed, A. N. (1967), The aims of education and other essays, · London: Williams & Norgate
· William R. Parzynsky & Phillip W. Zipse(1987), Introduction to Mathematical Analysis
· Wolfram, S.(1996), The Mathematica book, Third Edition, Cambridge Univ. Press Group. Boston

박혜향

1999년부터 현재까지 전국 최초로 수학교육론을 단독으로 강의하면서 많은 예비수학교사들의 꿈을 함께 이루고 있습니다. 수학교육을 전문적이고 심도 있게 다루는 것은 기본이며 현장에 적용할 수 있는 풍부한 예와 상황을 함께 접목시키는 것을 가장 중요하게 생각합니다.
더불어 수험생 입장에서 생각하는 관심과 매년 출제위원을 능가하는 실전모의고사 및 그에 대한 모범답안에 대한 노련함은 박혜향만의 능력이라 할 수 있습니다.
이제는 그 어느 곳에서도 박혜향의 수학교육론을 능가할 수 없습니다.

- 다수 대학교(고려대, 성균관대, 아주대, 조선대, 부산대 등 다수 대학) 강사
- 성균관대학교 일반대학원 수학교육 박사
- 고려대학교 일반대학원 수학교육 석사
- 성균관대학교 사범대학 수학교육과 졸업
- 캐나다 Queen's University 수료
- ICME-12 조직위원
- 대한 수학교육학회 회원
- 한국 수학교육학회 회원 및 편집위원
- 전국 최초 수학교육론 강사

〔온드림빅북〕 박혜향의 수학교육론 바이블

발행일 2016년 2월 1일

저작권자 빅북운동본부
대표자 조영복
작성자 박혜향
주소 부산광역시 금정구 구서2동 248-10 현대빌딩 2F
문의처 051-510-2570 홈페이지 http://bigbook.or.kr/

발행처 교보문고 퍼플
출판등록 2012년 09월 07일 제3-2012-167호
주소 서울시 종로구 종로1가 1번지
대표전화 1544-1900
홈페이지 www.kyobobook.co.kr

ISBN 978-89-24-03671-8 (93410)